где $x(t) = \tilde{X}(t)\,[\tilde{X}^{-1}(0, 0)\, y(0,0) + g_0]$.

Из представления (8) решения y(t) по теореме 2.1 [2] из неравенства (7) получаем следующее утверждение: какой бы характеристический вектор χ [y] произвольного нетривиального решения y(t) системы (2) мы ни взяли, можно указать решение x(t) системы (1), у которого имеется характеристический вектор χ [x] = χ [y]. Учитывая, что для любого решения y(t) постоянный вектор g_0 принимает лишь конечное число значений (каждая j-ая его компонента имеет один из четырех видов), данное утверждение аналогично формулировке нашей теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гайшун И.В.*** Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн.: Наука и техника, 1983.
2. ***Грудо Э.И.*** // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 12. С.2115-2128.
3. ***Грудо Э.И.*** // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 5. С. 826-840.
4. ***Большаков Н.Е., Потапенко П.П.*** // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 934-936.
5. ***Ласый П.Г.*** Некоторые задачи теории характеристических векторов: Автореф. дис. физ.-мат. наук. Мн., 1983.

SUMMARY

Tht connection between characteristical multitudes of the Pfaff's system solutions and characteristical multitudes of unindignant Pfaff's system is established in this work.

УДК 517.946

С.М.Бородич

Аттракторы неавтономных эволюционных уравнений

С неавтономным эволюционным уравнением

$$\partial_t u = A(t,u) \quad (t \geq \tau \geq 0), \quad u|_{t=\tau} = u_0 \qquad (1)$$

можно связать семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau},\ t \geq \tau \geq 0\}$, действующих в банаховом пространстве E начальных данных уравнения (1) следующим образом: $\forall u_0 \in E\ S_{t,\tau}u_0 = u(t)$, где $u(t)$ — решение уравнения (1) при $t \geq \tau$. В настоящей работе исследуется поведение при $t \to +\infty$ траектории $S_{t,0}B$ произвольного ограниченного в E множества B. Аналогичный вопрос для автономных эволюционных уравнений (в этом случае в банаховом пространстве начальных данных действует полугруппа операторов) изучался в работах [1]-[4]. Мы будем предполагать некоторую асимптотическую автономность уравнения (1), обеспечивающую стабилизацию операторов $S_{t,\tau}$ при $\tau \to +\infty$. В первой части статьи будет доказана теорема о существовании и свойствах максимального аттрактора для абстрактного семейства эволюционных операторов. Вторая часть работы посвящена доказательству теоремы об аттракторе неавтономного гиперболического уравнения с диссипацией.

1.Семейства эволюционных операторов. Пусть E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$.

О п р е д е л е н и е 1. Семейством эволюционных операторов на E называется семейство $\{S_{t,\tau},\ t \ge \tau \ge 0\}$ отображений, действующих из E в E и обладающих следующими свойствами:

$S_{t,\theta}S_{\theta,\tau} = S_{t,\tau}$ при $t \ge \theta \ge \tau \ge 0$;

$S_{t,t} = I$ (тождественное отображение) $\forall t \ge 0$.

Пусть X и Y — непустые подмножества E. Отклонение X от Y определим равенством

$$\operatorname{dist}(X,Y) = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\|x-y\|.$$

Через $\mathcal{B}(E)$ обозначим совокупность всех ограниченных в E множеств.

О п р е д е л е н и е 2. Множество $\mathcal{M}\subset E$ назовем максимальным аттрактором семейства эволюционных операторов, если выполнены условия:

1) $\mathcal{M}$ компактно в E;

2) $\forall B\in \mathcal{B}(E)$ $\operatorname{dist}(S_{t,0}B, \mathcal{M}) \to 0$ при $t \to +\infty$;

3) если компактное в E множество $\mathcal{M}_1$ таково, что $\forall B\in\mathcal{B}(E)$ $\operatorname{dist}(S_{t,0}B, \mathcal{M}_1) \to 0$ при $t \to +\infty$, то $\mathcal{M}\subset \mathcal{M}_1$.

Теорема 1. *Пусть $\{S_{t,\tau}\}$ — семейство эволюционных операторов на E. Пусть существует такое компактное в E множество K_0, что*

$$\forall B\in\mathcal{B}(E)\ \operatorname{dist}(S_{t,0}B, K_0) \to 0 \ \textit{при}\ t \to +\infty. \tag{2}$$

Тогда семейство $\{S_{t,\tau}\}$ обладает максимальным аттрактором $\mathcal{M}$. Если дополнительно предположить, что $S_{t,0}x$ непрерывно по $t\in[0;+\infty)$ $\forall x\in E$ и непрерывно по $x\in E$ $\forall t\in[0;+\infty)$, то $\mathcal{M}$ связно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\mathcal{M}$ определим формулой

$$\mathcal{M} = [\bigcup_{B\in\mathcal{B}(E)}\omega(B)], \tag{3}$$

где $[\cdot]$ — замыкание в норме пространства E, $\omega(B)$ — омега-предельное множество траектории $S_{t,0}B$: $\omega(B) = \{y\in E$: *существуют последовательности $t_n \to +\infty$ и $x_n\in B$, такие что $S_{t_n,0}x_n \to y$ при $n \to +\infty$*$\}$. Пусть $B\in \mathcal{B}(E)$, $B \ne \varnothing$. Из условия (2) и компактности множества K_0 легко следует, что $\omega(B) \ne \varnothing$, $\omega(B)\subset K_0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S_{t,0}B, \omega(B)) = 0$. Отсюда вытекает: 1) $\mathcal{M}\subset K_0$ и, следовательно (т.к. K_0 компактно, а $\mathcal{M}$ замкнуто), $\mathcal{M}$ компактно в E;
2) $\operatorname{dist}(S_{t,0}B, \mathcal{M}) \to 0$ при $t \to +\infty$ $\forall B\in\mathcal{B}(E)$. Кроме того, если таким же свойством притяжения обладает какое-то другое компактное множество $\mathcal{M}_1$, то $\mathcal{M}\subset \mathcal{M}_1$, поскольку в этом случае $\omega(B)\subset \mathcal{M}_1$ $\forall B\in\mathcal{B}(E)$. Таким образом, $\mathcal{M}$ — максимальный аттрактор семейства $\{S_{t,\tau}\}$. Связность множества

$\mathfrak{M}$ при дополнительных условиях непрерывности $S_{t,0}x$ легко доказывается методом "от противного"•

Определение 3. Семейство отображений $\{S_t,\ t \ge 0\}$ из E в E называется полугруппой операторов, действующей в E, если: $S_tS_\tau = S_{t+\tau}$ $\forall t,\tau \ge 0$; $S_0 = I$.

Определение 4 (Бабин А.В., Вишик М.И. [1]). Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется максимальным аттрактором полугруппы $\{S_t\}$, если выполнены следующие условия: 1) $\mathcal{A}$ компактно в E, 2) $S_t\mathcal{A} = \mathcal{A}$ $\forall t \ge 0$ (условие строгой инвариантности), 3) $\forall B \in \mathcal{B}(E)$ $\operatorname{dist}(S_t B, \mathcal{A}) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Теорема 2. *Пусть $\{S_{t,\tau},\ t \ge \tau \ge 0\}$ — семейство эволюционных операторов на E, $\{S_t,\ t \ge 0\}$ — полугруппа операторов, действующая в E. Пусть операторы $S_{t,\tau}$ и S_t непрерывны из E в E при любых фиксированных t и τ, $t \ge \tau \ge 0$. Пусть полугруппа $\{S_t\}$ обладает максимальным аттрактором $\mathcal{A}$. Предположим, что $\forall B \in \mathcal{B}(E)$ существуют $t_B \ge 0$ и множество $F_B \in \mathcal{B}(E)$, такие что*

1) $S_{t,0}B \subset F_B$ $\forall t \ge t_B$;

2) $\forall \theta \ge 0$ $\left\| S_{\tau+\theta,\tau}y - S_\theta y \right\| \to 0$ *при* $\tau \to +\infty$ *равномерно по* $y \in F_B$.

Тогда семейство $\{S_{t,\tau}\}$ имеет максимальный аттрактор $\mathfrak{M}$, причем $\mathfrak{M} \subset \mathcal{A}$ и $S_t\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ $\forall t \ge 0$ (строгая инвариантность $\mathfrak{M}$ относительно операторов полугруппы). Если $S_{t,0}x$ непрерывно по $t \in [0;+\infty)$ $\forall x \in E$, то $\mathfrak{M}$ — связное множество.

Доказательство. Покажем, что семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau}\}$ удовлетворяет условию теоремы 1, где в качестве K_0 берется множество $\mathcal{A}$. Пусть $B \in \mathcal{B}(E)$, $B \ne \varnothing$. В силу свойства притяжения максимального аттрактора полугруппы (см. определение 4) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \tau_0 \ge 0$:

$$S_{\tau_0}F_B \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}) \tag{4}$$

($O_\varepsilon(\cdot)$ — ε-окрестность множества). Из пункта 2) условия следует, что $\exists T \ge 0$:

$$S_{t+\tau_0,t}F_B \subset O_\varepsilon(S_{\tau_0}F_B) \quad \forall t \ge T. \tag{5}$$

С учетом пункта 1) условия теоремы и включений (4) и (5) при $t \ge \max(t_B, T)$ получаем

$$S_{t+\tau_0,0}B = S_{t+\tau_0,t}S_{t,0}B \subset S_{t+\tau_0,t}F_B \subset O_\varepsilon(S_{\tau_0}F_B) \subset O_{2\varepsilon}(\mathcal{A})$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем: $\operatorname{dist}(S_{t,0}B, \mathcal{A}) \to 0$ при $t \to +\infty$. Таким образом, семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau}\}$ удовлетворяет условию теоремы 1, где $K_0 = \mathcal{A}$. В силу этой теоремы семейство $\{S_{t,\tau}\}$ обладает максимальным аттрактором $\mathfrak{M}$, причем множество $\mathfrak{M}$ связно. Включение $\mathfrak{M} \subset \mathcal{A}$ очевидно. Кроме того, известно (см. доказательство теоремы 1), что $\mathfrak{M}$ задается формулой (3).

Докажем строгую инвариантность множества $\mathcal{M}$ относительно операторов полугруппы. Пусть $B \in \mathcal{B}(E)$, $B \neq \varnothing$. Используя компактность множества $\mathcal{A}$ и притяжение к нему траектории $S_{t,0}B$, нетрудно установить следующий факт: для любых $\theta \geq 0$ и $y \in \omega(B)$ найдутся точки w_1, $w_2 \in \omega(B)$ и последовательности $t_n^{(1)}, t_n^{(2)} \to +\infty$, такие что

$$S_{t_n^{(1)}+\theta,t_n^{(1)}}\, y \to w_1 \quad \text{и} \quad S_{t_n^{(2)}+\theta,t_n^{(2)}}\, w_2 \to y \quad \text{в } E \quad \text{при } n \to +\infty. \tag{6}$$

Очевидно, что y и w_2 принадлежат $[F_B]$. Поэтому в силу пункта 2) условия $S_{t_n^{(1)}+\tau,t_n^{(1)}}\, y \to S_\tau y$ и $S_{t_n^{(2)}+\tau,t_n^{(2)}}\, w_2 \to S_\tau w_2$ в E при $n \to +\infty$. Отсюда и из (6) следует, что: $S_\tau y = w_1$, $S_\tau w_2 = y$. Из этих равенств ввиду произвольности $\tau \geq 0$ и $y \in \omega(B)$, а также принадлежности точек w_1 и w_2 множеству $\omega(B)$ вытекает: $S_t\omega(B) = \omega(B)$ $\forall t \geq 0$. Отсюда, положив $M = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}(E)} \omega(B)$, получаем:

$$S_t M = M \quad \forall t \geq 0. \tag{7}$$

Заметим, что $\mathcal{M} = [M]$ (см. формулу (3)). В силу компактности $\mathcal{M}$ и непрерывности операторов S_t на E из (7) легко следует, что $S_t\, \mathcal{M} = \mathcal{M}$ $\forall t \geq 0$•

2.Гиперболическое уравнение с диссипацией. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$. В бесконечном полуцилиндре $Q = \{(t; x)\colon t \geq 0,\ x \in \Omega\}$ рассмотрим неавтономное гиперболическое уравнение с диссипацией

$$\partial_t^2 u + \varepsilon \partial_t u = \Delta u - f(t,u) - g(x), \qquad u|_{x \in \partial\Omega} = 0 \tag{8}$$

и аналогичное ему автономное уравнение

$$\partial_t^2 v + \varepsilon \partial_t v = \Delta v - \tilde{f}(v) - g(x), \qquad v|_{x \in \partial\Omega} = 0. \tag{9}$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{3} \partial^2/\partial x_i^2$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_t^2 = \partial^2/\partial t^2$, $g(x) \in L_2(\Omega)$.

Предполагается, что $f(t, u) \in C^1([0; +\infty) \times \mathbf{R})$, $\tilde{f}(u) \in C^1(\mathbf{R})$ и имеют место равномерные по $t \geq 0$ и $u \in \mathbf{R}$ оценки:

$$f(t, u)u \geq -C, \quad f_u'(t, u) \geq -C, \quad |f_u'(t, u)| \leq C(u^2 + 1), \tag{10}$$

$$\tilde{f}(u)\, u \geq -C, \quad \tilde{f}'(u) \geq -C, \quad |\tilde{f}'(u)| \leq C(|u|^\alpha + 1) \quad (0 \leq \alpha < 2), \tag{11}$$

$$|f(t, u) - \tilde{f}(u)| \leq k(t)(|u|^3 + 1), \tag{12}$$

где $k(t) \in \mathbf{C}([0; +\infty))$, $k(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Кроме того, на функцию $\varphi(t, u) \equiv \int_0^u f(t,s)ds$ накладываются следующие требования:

$$\varphi(t, u) \geq -C, \tag{13}$$

$$\varphi_t'(t, u) \leq \mu(t)(\varphi(t, u) + u^2 + C) + C_1, \tag{14}$$

$$\mu(t) \in \mathbf{C}([0; +\infty)), \quad \mu(t) \geq 0,$$

причем выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$\text{а) } \mu(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty,\ C_1 \ge 0; \qquad \text{б) } \int_0^{+\infty} \mu(t)dt < +\infty,\ C_1 = 0. \qquad (15)$$

Очевидно, что уравнение (8) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \partial_t u = p, \\ \partial_t p = -\varepsilon p + \Delta u - f(t,u) - g(x), \quad u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Пусть $E = \{y = (u, p)\colon u \in H_0^1(\Omega),\ p \in L_2(\Omega)\}$, $\|y\|_E^2 = \|u\|_1^2 + \|p\|^2$ ($\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|$ – нормы в пространстве Соболева $H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ и пространстве $L_2(\Omega)$ соответственно, $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega) \cap \{u\colon u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0\}$). Стандартными методами (см.[5]) устанавливается, что уравнение (8) (или эквивалентная ему система (16)) порождает на E семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau},\ t \ge \tau \ge 0\}$; $S_{t,\tau}\colon (u_0, p_0) \to (u(t), \partial_t u(t))$, где $u(t) = u(t, x)$ — решение уравнения (8) с начальными условиями $u|_{t=\tau} = u_0$, $\partial_t u|_{t=\tau} = p_0$. При этом операторы $S_{t,\tau}$ непрерывны из E в E, а $S_{t,\tau}y_0$ непрерывно по $t\in[\tau; +\infty)$ при любых фиксированных $\tau \ge 0$ и $y_0 \in E$. В свою очередь, автономному уравнению (9) отвечает полугруппа непрерывных операторов $\{S_t,\ t \ge 0\}$, действующая в E: $\forall(v_0, q_0)\in E$ $S_t(v_0, q_0) = (v(t), \partial_t v(t))$, где $v(t) = v(t, x)$ — решение уравнения (9) при начальных условиях $v|_{t=0} = v_0$, $\partial_t v|_{t=0} = q_0$. В работе [4] установлено, что при выполнении условий (11) полугруппа $\{S_t\}$ обладает максимальным аттрактором $\mathcal{A} \subset E$. Мы докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (10)-(15). *Тогда семейство эволюционных операторов* $\{S_{t,\tau}\}$, отвечающее уравнению (8), *имеет максимальный аттрактор* $\mathcal{M}$. *При этом:*

1) $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$, *где* $\mathcal{A}$ *— максимальный аттрактор полугруппы* $\{S_t\}$, *порождаемой в E уравнением* (9),

2) $S_t\, \mathcal{M} = \mathcal{M}\ \forall t \ge 0$,

3) $\mathcal{M}$ *- связное множество.*

Доказательство. Доказательство сформулированной теоремы заключается в проверке условий теоремы 2. Формальные выкладки, проводимые ниже при получении необходимых нам оценок, обосновываются, как обычно, методом Галеркина (см., напр., [5]).

Пусть $B\in\mathcal{B}(\mathrm{E})$. Докажем равномерную по t и τ ($t \ge \tau \ge 0$) ограниченность множеств $S_{t,\tau}B$, т.е. установим, что

$$\exists F_B \in \mathcal{B}(\mathrm{E})\colon S_{t,\tau}B \subset F_B \qquad \forall t,\ \forall\tau,\ t \ge \tau \ge 0. \qquad (17)$$

Пусть $\tau \geq 0$. Пусть $u(t)$, $t \geq \tau$, — решение уравнения (8) с начальными данными $u|_{t=\tau} = u_0$, $\partial_t u|_{t=\tau} = p_0$, причем $(u_0, p_0) \in B$. Пусть $y = (u, \partial_t u)$. Умножив уравнение (8) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $\partial_t u$, после несложных преобразований получаем:

$$\frac{1}{2}\partial_t\|\partial_t u\|^2 + \frac{1}{2}\partial_t\|\nabla u\|^2 + \varepsilon\|\partial_t u\|^2 + \frac{d}{dt}\langle\varphi(t,u),1\rangle = \langle\varphi_t'(t,u),1\rangle - \partial_t\langle g,u(t)\rangle$$

($\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $\|\nabla u\|^2 = \sum_{i=1}^{3}\|\partial u/\partial x_i\|^2$). Интегрируя это равенство по t от 0 до $t \geq \tau$ и пользуясь условием (14), выводим

$$\|y(t)\|_E^2 + \langle\varphi(t,u)+C,1\rangle \leq$$

$$\leq C_2\left(\|y(\tau)\|_E^2 + \langle\varphi(\tau,u_0),1\rangle + \int_\tau^t \mu(t)\left\langle\varphi(t,u)+u^2+C,1\right\rangle dt\right) + C_2C_1(t-\tau)+C_3,$$

где C_1, C_2 — положительные константы, не зависящие от τ. (Нами также учитывалась эквивалентность норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_1'$ ($\|\cdot\|_1' = \|\nabla\cdot\|$) в пространстве $H_0^1(\Omega)$.) Из полученного неравенства легко следует оценка

$$\|y(t)\|_E^2 + \langle\varphi(t,u)+C,1\rangle \leq C_2\int_\tau^t \mu(t)\left(\|y\|_E^2 + \langle\varphi(t,u)+C,1\rangle\right)dt + C_2C_1(t-\tau)+C_4(B).$$

(Для оценки $\langle\varphi(t,u_0)+C,1\rangle$ мы использовали третье неравенство из (10) и непрерывность вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$.) Принимая во внимание, что $\varphi(t, u) + C \geq 0$, и применяя неравенство Гронуолла, отсюда получаем

$$\|y\|_E^2 \leq \left(C_4(B)+C_2C_1(t-\tau)\right)\exp\left(C_2\int_\tau^t \mu(t)dt\right).$$

Если в (15) выполнено условие б), то из полученного неравенства сразу же следует (17).

Пусть в (15) выполнено условие а). Тогда из последней оценки вытекает справедливость следующего утверждения:

$$\forall T > 0 \quad \|y(t)\|_E \leq C_5(B,T) \text{ при } t \in [\tau, \tau + T], \quad (18)$$

где константа $C_5(B,T)$ зависит от множества B и момента времени T, но не зависит от τ. Рассмотрим функцию

$$\Phi_\eta(t) = \frac{1}{2}\|\partial_t u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2 + \langle\varphi(t,u(t)),1\rangle + \langle g,u(t)\rangle + \eta\langle u(t),\partial_t u(t)\rangle, \quad t \geq \tau,$$

где $0 < \eta < 1$ (ср. с [6]). Дифференцируя $\Phi_\eta(t)$ по t и применяя оценки (10), при достаточно малых положительных η и γ получаем

$$\frac{d}{dt}\Phi_\eta(t) + \gamma\Phi_\eta(t) \leq \langle\varphi_t'(t,u),1\rangle - c(\eta)\left(\|\nabla u\|^2 + \langle f(t,u),u\rangle\right) + C_6, \quad c(\eta) > 0, \quad (19)$$

(γ, $c(\eta)$ и C_6 не зависят от τ). В силу неравенства $f_u'(t, u) \geq -C$ имеем $\varphi(t, u) \leq f(t, u)u + (C/2)u^2$. Используя эту оценку, условие (14) и то, что $\mu(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, из (19) выводим

$$\frac{d}{dt}\Phi_\eta(t)+\gamma\Phi_\eta(t)\le C_7 \qquad \forall t\ge\tau+T_1,$$

где $T_1>0$ достаточно велико; T_1 и C_7 не зависят от τ. Из полученного дифференциального неравенства следует, что

$$\Phi_\eta(t)\le\Phi_\eta(\tau+T_1)+C_7/\gamma \qquad \forall t\ge\tau+T_1. \tag{20}$$

Возвращаясь к определению функции $\Phi_\eta(t)$, нетрудно установить, что

$$\nu\|y(t)\|_T^2-C'\le\Phi_\eta(t)\le C'\left(\|y(t)\|_E^4+1\right), \qquad \nu>0, C'>0.$$

Отсюда и из (20) вытекает

$$\|y(t)\|_E^2\le C_8\left(\|y(\tau+T_1)\|_E^4+1\right) \qquad \forall t\ge\tau+T_1.$$

Из этой оценки и (18) следует справедливость утверждения (17).

Как и выше, полагаем $B\in\mathcal{B}(E)$. Докажем, что

$$\forall\theta\ge0 \quad \left\|S_{\tau+\theta,\tau}y-S_\theta y\right\|_E\to0 \text{ при } \tau\to+\infty \text{ равномерно по } y\in B. \tag{21}$$

Пусть $(u_0, p_0)\in B$, $(v_0, q_0)\in B$, $\tau\ge0$. Пусть $u(t)$, $t\ge\tau$, — решение уравнения (8) с начальными условиями $u|_{t=\tau}=u_0$, $\partial_t u|_{t=\tau}=p_0$, а $v(t)$, $t\ge0$, — решение уравнения (9) с начальными условиями $v|_{t=0}=v_0$, $\partial_t v|_{t=0}=q_0$.

Функция $u_\tau(t)\equiv u(\tau+t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t^2u_\tau(t)+\varepsilon\partial_tu_\tau(t)=\Delta u_\tau(t)-f(\tau+t,u_\tau(t))-g(x). \tag{22}$$

Положим $w(t)=u_\tau(t)-v(t)$. Вычитая из уравнения (22) уравнение (9) и умножая получившееся равенство скалярно в $L_2(\Omega)$ на $\partial_t w(t)$, выводим

$$\frac12\partial_t\|\partial_tw\|^2+\varepsilon\|\partial_tw\|^2+\frac12\partial_t\|\nabla w\|^2=\left\langle\tilde f(v)-f(\tau+t,u_\tau),\ \partial_tw\right\rangle\le$$

$$\le\left|\left\langle\tilde f(u_\tau)-\tilde f(v),\ \partial_tw\right\rangle\right|+\left|\left\langle f(\tau+t,u_\tau)-\tilde f(u_\tau),\partial_tw\right\rangle\right|. \tag{23}$$

Используя формулу конечных приращений, третье неравенство из условия (11) и неравенство Гельдера, получаем оценку

$$\left|\left\langle\tilde f(u_\tau)-\tilde f(v),\ \partial_tw\right\rangle\right|\le C_9\left(\left(\|u_\tau\|_{L_6(\Omega)}^4+\|v\|_{L_6(\Omega)}^4\right)\|w\|_{L_6(\Omega)}^2+\|w\|^2+\|\partial_tw\|^2\right).$$

В силу (17), аналогичного утверждению (17) факта для уравнения (9) и непрерывности вложения $H_0^1(\Omega)\subset L_6(\Omega)$ ($n=3$) из последней оценки следует, что

$$\left|\left\langle\tilde f(u_\tau)-\tilde f(v),\ \partial_tw\right\rangle\right|\le C_{10}(B)\|w\|_E^2.$$

Воспользовавшись этим неравенством и условием (12), из (23) нетрудно получить следующую оценку

$$\partial_t\left(\|\partial_tw(t)\|^2+\|\nabla w(t)\|^2\right)\le C_{11}(B)\left(k(\tau+t)+\|w(t)\|_E^2\right).$$

Проинтегрировав полученное неравенство по t от 0 до $t>0$, выводим

$$\|w(t)\|_E^2\le C_{12}\|w(0)\|_E^2+C_{13}(B)t\max_{s\in[\tau,\tau+t]}k(s)+C_{13}(B)\int_0^t\|w(t)\|_E^2dt$$

(все константы не зависят от τ). После применения неравенства Гронуолла имеем

$$\|w(t)\|_E^2 \le \left(C_{12}\|w(0)\|_E^2 + C_{13}(B)t \max_{s\in[\tau,\tau+t]} k(s) \right) e^{C_{13}(B)t}.$$

В силу того, что $k(s) \to 0$ при $s \to +\infty$, из этой оценки следует (21). Как легко видеть, доказанные нами утверждения (17) и (21) гарантируют выполнение условий теоремы 2.•

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Babin A.V., Vishik M.I.*** Regular attractors of semi-groups and evolution equations.//J. Math. Pures Appl. 1983. Vol.62. P.441-491.
2. ***Бабин А.В., Вишик М.И.*** Неустойчивые инвариантные множества полугрупп нелинейных операторов и их возмущения.// УМН. 1986. Т.41, №4. С.3-34.
3. ***Бабин А.В., Вишик М.И.*** Аттракторы эволюционных уравнений. М., Наука, 1989.
4. ***Haraux A.*** Two remarks on dissipative hyperbolic problems.// College de France Seminar. Vol.VI, Pitman, Research Notes in Math. 1985.
5. ***Лионс Ж.-Л.*** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., Мир, 1972.
6. ***Морозов Н.Ф.*** Избранные двумерные задачи теории упругости. Л., Изд-во ЛГУ, 1978.

SUMMARY

In the article we study behaviour of trajectories of nonautonomous evolution equations as $t \to +\infty$. We consider trajectories of bounded sets. The theorem on existence and propeties of maximal attractor of a family of evolution operators are proved. The result on attractor of nonautonomous dissipative hyperbolic equation are stated also.

УДК 517.936

П.П. Потапенко

Центральные характеристические множества решений вполне интегрируемых систем Пфаффа

Для изучения устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений широко используется первый метод Ляпунова, основанный на использовании характеристических чисел [1]. В работе [2] введено понятие характеристического вектора функции многих переменных для исследования вопросов устойчивости систем уравнений в полных дифференциалах. Однако прямой перенос результатов, полученных для обыкновенных дифференциальных уравнений, на системы Пфаффа оказывается затруднительным в связи с тем, что на плоскости невозможно ввести естественное отношение порядка. Поэтому представляется целесообразным при построении характеристик решений систем Пфаффа использовать теоретико-множественный подход.