5. ***Ласый П.Г.*** О характеристических векторах линейных систем Пфаффа. //Дифференц. уравнения. 1982. Т.18, N5, с.901 - 903.
6. ***Петровский Г.Н.*** О матрицах, коммутирующих со своими частными производными. //Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук. 1979, N4, с.45-47.
7. ***Морозов В.В.*** О коммутативных матрицах. // Уч. зап. Казан. ун-та. 1952, 112, кн.9, с. 17 - 20.
8. ***Демидович Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости . М., 1967.
9. ***Сурин Т.Л.*** О показателях правильных систем Лаппо - Данилевского. // Дифференц. уравнения.1989. Т.25, №3, с.543 - 545.

*SUMMARY*

*In the article we consider of characteristic sets of solutions of the linear perfectly integrable Pfaff system, which solutions can be represented as an exponent, and the criterions of the correctness of that system are also proved.*

УДК 517.936

**С.В. Шерегов**

# О векторе неправильности линейной системы Пфаффа

Рассмотрим вполне интегрируемую систему Пфаффа

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = A_i(t)\,x,\ \ x \in R^n,\ \ t \doteq (t_1, t_2) \geq 0,\ \ i = 1,2, \tag{1}$$

$n \times n$ — матрицы $A_i(t)$ которой непрерывно-дифференцируемы и ограничены при $t \geq 0$. Наряду с ней будем рассматривать возмущенную систему

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} = A_i(t)\,y + Q_i(t)\,y,\ \ y \in R^n,\ \ i = 1,2 \tag{2}$$

с непрерывно дифференцируемыми матрицами $Q_i(t)$ для которой также выполняется условие полной интегрируемости.

Известно, что для систем Пфаффа большую роль играет понятие характеристического вектора функций многих переменных [1,]. Для функций двух переменных понятия характеристического вектора, характеристического множества и их свойства приведены в [2], в [3] теория характеристических векторов применяется к исследованию пфаффовых систем (заметим, что в настоящее время под характеристическим вектором понимается вектор противоположный по знаку векторам, введенным в указанных работах). Для исследования по первому приближению устойчивости системы Пфаффа с m-возмущениями в [4] введена вектор-функция неправильности. Векторные аналоги некоторых величин, применяемых при исследовании устойчивости систем обыкновенных уравнений, введены в [5].

В настоящей работе для системы (1) введен вектор неправильности $\sigma(A)$, являющийся векторным аналогом коэффициента неправильности Д.М.Гробмана, и для системы (2) с возмущениями $Q_i(t)$, имеющими характеристические векторы строго меньшие вектора $\sigma(A)$ установлена связь между характеристическими множествами ее решений и характеристическими множествами решений системы (1).

Пусть $X(t) = [x_1(t),\ldots, x_n(t)]$ — некоторая фундаментальная матрица решений системы (1), $\bar{x}_j$ — j-ая строка матрицы $X^{-1}(t)$, $j = 1,\ldots, n$;

$\| \lambda \| = \max\{ |\lambda_1|, |\lambda_2| \}$ норма вектора.

Обозначим через $\chi[F] = (\chi_1[F], \chi_2[F])$ и $M[F]$ некоторый характеристический вектор и характеристическое множество вектор-функции или матрицы $F(t)$, непрерывной в квадрате $t \geq 0$.

Пусть $M[x_j] + M[\bar{x}_j] = \{ \chi [x_j] + \chi [\bar{x}_j] : \chi [x_j] \in M [x_j], \chi [\bar{x}_j] \in M [\bar{x}_j] \}$. Так как характеристические множества $M [x_j]$ и $M [\bar{x}_j]$ замкнуты [2,3], то замкнуто и множество $M [x_j] + M [\bar{x}_j]$, поэтому найдутся характеристические векторы $\chi_j = (\chi_1^j, \chi_2^j)$ и $\bar{\chi}_j = (\bar{\chi}_1^j, \bar{\chi}_2^j)$ из множеств $M [x_j]$ и $M [\bar{x}_j]$ соответственно, что для любых $\chi [x_j]$ и $\chi [\bar{x}_j]$ выполняется неравенство $\| \chi_j + \bar{\chi}_j \| \leq \| \chi [x_j] + \chi [\bar{x}_j] \|$. Вектор $\sigma(A) = (\sigma_1, \sigma_2)$ с компонентами $\sigma_1=\sigma_2= \inf\limits_{X(\bullet)} \max\limits_{j} \| \chi_j + \bar{\chi}_j \|$ назовем вектором неправильности системы (1).

Справедлива следующая

**Теорема.** Если существуют характеристические векторы $\chi [Q_1]$ и $\chi [Q_2]$, для которых выполняются условия

$$\max \{ \chi_i [Q_1], \chi_i [Q_2] \} = q_i < -\sigma_i , \quad i = 1, 2,$$

то для произвольного нетривиального решения $y(t)$ системы (2) существует конечная совокупность решений системы (1) таких, что объединение их характеристических множеств включает в себя характеристическое множество $M[y]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем решение системы (2) в форме Коши

$$y(t_1, t_2) = \tilde{X}(t_1, t_2) \, [\tilde{X}^{-1} (0, 0) \, y(0.0) + \int\limits_{(0,0)}^{(t_1,t_2)} f_1(\tau_1, \tau_2) \, d\tau_1 + f_2(\tau_1, \tau_2) \, d\tau_2 \,] ,$$

где $f_p(\tau_1, \tau_2) = [\tilde{X}^{-1} (t_1, t_2) \, Q_p (t_1, t_2) \, y(t_1, t_2)$, $p = 1, 2$, а $\tilde{X}(t_1, t_2)$ — фундаментальная матрица решений системы (1), для характеристических векторов которой выполняется неравенство

$$\max_j \| \chi_j + \bar{\chi}_j \| < \sigma_1 + \varepsilon, \tag{3}$$

при этом положительную константу $\varepsilon$ выбираем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\varepsilon < - \sigma_i - q_i, \quad i = 1, 2.$$

Так как для j-ой компоненты вектора $f_p(t)$ выполняется равенство $f_p^j(t) = (\bar{x}_j(t), Q_p(t) \, y(t))$, $j = 1,\ldots, n$, то по теореме 2.2 [2], какой бы характеристический вектор $\chi[y]$ мы не взяли, существуют характеристические векторы $\chi[f_1^j]$ и $\chi[f_2^j]$ такие, что выполняются неравенства

$$\max_{p=1,2} \{ \chi_i [f_p^j] \} \leq \bar{\chi}_i^j + q_i + \chi_i [y] < \bar{\chi}_i^j - \sigma_i - \varepsilon + \chi_i [y], \quad j = 1,\ldots, n, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение постоянный вектор $g_0$ и вектор $g(t)$, для компонент которых $g_j^0$ и $g_j(t)$, $j = 1,\ldots, n$ выполняются равенства

$$g_j^0 = \int\limits_{(0,0)}^{(+\infty,+\infty)} f_1^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 + f_2^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2\,,$$

$$g_j(t) = \int\limits_{(+\infty,+\infty)}^{(t_1,t_2)} f_1^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 + f_2^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2\,,$$

если $\chi_1[f_p^j] < 0$ и $\chi_2[f_p^j] < 0$, $p = 1, 2$;

$$g_j^0 = \int\limits_0^{+\infty} f_1^j(\tau_1,0)\,d\tau_1\,,\ g(t) = \int\limits_0^{t_2} f_2^j(t_1,\tau_2)\,d\tau_2 + \int\limits_{+\infty}^{t_1} f_1^j(\tau_1,0)\,d\tau_1$$

если $\chi_1[f_p^j] < 0$ и хотя бы одно из чисел $\chi_2[f_p^j]$, $p = 1, 2$, неотрицательно;

$$g_j^0 = \int\limits_0^{+\infty} f_2^j(0,\tau_2)\,d\tau_2\,,\ g_j(t) = \int\limits_0^{t_1} f_1^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 + \int\limits_{+\infty}^{t_2} f_2^j(0,\tau_2)\,d\tau_2\,,$$

если $\chi_2[f_p^j] < 0$ и хотя бы одно из чисел $\chi_1[f_p^j]$, $p = 1, 2$, неотрицательно;

$g_j^0 = 0$, $g_j(t) = \int\limits_{(0,0)}^{(t_1,t_2)} f_1^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 + f_2^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2$ во всех остальных случаях.

Тогда вектор $y(t_1, t_2)$ можно представить в виде

$$y(t_1,t_2) = \tilde{X}(t_1,t_2)\,[\tilde{X}^{-1}(0,0)\,y(0,0) + g_0\,] + \tilde{X}(t_1,t_2)\,g(t_1,t_2). \qquad (5)$$

Как следует из теоремы 2.7 [2] функция $g_j(t)$ имеет характеристический вектор $v_j = (\,v_1^j, v_2^j\,)$, для координат которого выполнены неравенства $v_i^j \le \max\limits_{p=1,2} \{\,\chi_i[f_p^j]\,\}$, $i = 1, 2$, $j = 1,\ldots, n$, из которых, воспользовавшись оценками (4), имеем неравенства

$$v_i^j < \chi_i^j - \sigma_i - \varepsilon + \chi_i[y],\ i = 1, 2. \qquad (6)$$

По теореме 2.2 [2] с помощью неравенства (6) получаем оценки

$$\chi_i[\,\|x_j\|\,|g_j|\,] < \chi_i^j + \bar{\chi}_i^j - \sigma_i - \varepsilon + \chi_i[y],\ i = 1, 2,\ j = 1,\ldots, n$$

для координат характеристического вектора $\chi[\,\|x_j\|\,|g_j|\,]$. Далее, воспользовавшись неравенством (3) имеем следующее неравенство $\chi[\|x_j\|\,|g_j|] < \chi[y]$. Учитывая, что выполняется неравенство $\|X(t)\,g(t)\| \le n\sum\limits_{j=1}^{n}[\|x_j\|\,|g_j|]$, по теореме 2.1 [2] получаем следующее утверждение: какой бы характеристический вектор $\chi[y]$ мы ни взяли, найдется характеристический вектор $\chi[X\,g]$, для которого верно неравенство

$$\chi[\tilde{X}g] < \chi[y] \qquad (7)$$

Докажем теперь, что постоянная $\tilde{X}^{-1}(0,0)\,y(0,0) + g_0$ отлична от нуля. Предположив противное, из представления (5) решения $y(t)$ имеем равенство $y(t) = \tilde{X}(t)\,g(t)$, а вместе с ним и равенство $M[y] = M[\tilde{X}g]$, которое противоречит неравенству (7). Полученное противоречие и доказывает требуемое.

Запишем теперь решение $y(t)$ системы (2) в виде

$$y(t) = x(t) + \tilde{X}(t)\,g(t), \qquad (8)$$

где $x(t) = \tilde{X}(t)\,[\tilde{X}^{-1}(0, 0)\,y(0,0) + g_0]$.

Из представления (8) решения y(t) по теореме 2.1 [2] из неравенства (7) получаем следующее утверждение: какой бы характеристический вектор $\chi$ [y] произвольного нетривиального решения y(t) системы (2) мы ни взяли, можно указать решение x(t) системы (1), у которого имеется характеристический вектор $\chi$ [x] = $\chi$ [y]. Учитывая, что для любого решения y(t) постоянный вектор $g_0$ принимает лишь конечное число значений (каждая j-ая его компонента имеет один из четырех видов), данное утверждение аналогично формулировке нашей теоремы.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. ***Гайшун И.В.*** Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн.: Наука и техника, 1983.
2. ***Грудо Э.И.*** // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 12. С.2115-2128.
3. ***Грудо Э.И.*** // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 5. С. 826-840.
4. ***Большаков Н.Е., Потапенко П.П.*** // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 934-936.
5. ***Ласый П.Г.*** Некоторые задачи теории характеристических векторов: Автореф. дис. физ.-мат. наук. Мн., 1983.



## *SUMMARY*

*Tht connection between characteristical multitudes of the Pfaff's system solutions and characteristical multitudes of unindignant Pfaff's system is established in this work.*



УДК 517.946



**С.М.Бородич**


# Аттракторы неавтономных эволюционных уравнений

С неавтономным эволюционным уравнением

$$\partial_t u = A(t,u) \quad (t \geq \tau \geq 0), \quad u|_{t=\tau} = u_0 \tag{1}$$

можно связать семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau},\ t \geq \tau \geq 0\}$, действующих в банаховом пространстве $E$ начальных данных уравнения (1) следующим образом: $\forall u_0 \in E\ S_{t,\tau}u_0 = u(t)$, где $u(t)$ — решение уравнения (1) при $t \geq \tau$. В настоящей работе исследуется поведение при $t \to +\infty$ траектории $S_{t,0}B$ произвольного ограниченного в $E$ множества $B$. Аналогичный вопрос для автономных эволюционных уравнений (в этом случае в банаховом пространстве начальных данных действует полугруппа операторов) изучался в работах [1]-[4]. Мы будем предполагать некоторую асимптотическую автономность уравнения (1), обеспечивающую стабилизацию операторов $S_{t,\tau}$ при $\tau \to +\infty$. В первой части статьи будет доказана теорема о существовании и свойствах максимального аттрактора для абстрактного семейства эволюционных операторов. Вторая часть работы посвящена