лочки радиуса $R = R_2(\varphi_0)$. Заметим также, что при значениях F_0 близких к критическому, влияние поправки $\varepsilon^2 a_{2,n}$, учитывающей наличие эксцентриситета поперечного сечения цилиндра и (или) неоднородность статического нагружения, увеличивается.

Если $F_1^2 + F_2^2 \neq 0$, то решение (2), (5), (7), (11), (15) определяет параметрические колебания оболочки, которые являются устойчивыми или неустойчивыми в зависимости от соотношения входящих в задачу параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Болотин В.В.*** Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГТТИ. 1956. 573с.
2. ***Grundmann H.*** Zur dynamischen Stabilität des schwach gekrümmten zylindri schen Schalenfeldes // Ing. Arch. 1970. V. 39. No. 4. P. 261-272.
3. ***Vijayaraghavan A.,*** Evan-Ivanowski R.M. Parametric instability of circular cylindrical shells // Trans. ASME. E34. 1967. No.4. P. 985-990.
4. ***Wenzke W.*** Die dynamiseche stabilität der axiapul-sierend belasten Kreiszylinderschale // Wiss. Z. Techn. Hochschule Otto Von Guerickie Magdeburg. 1963. V. 7. H. 1. P. 93-124.
5. ***Yao John C.*** Dynamic stability of cylindrical shells under static and periodic axial and radial loads // AIAA Journal. 1963. V.1. No. 6. P. 1391-1396.
6. ***Товстик П.Е.*** Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука. 1995. 320с.
7. ***Товстик П.Е.*** Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 815-822.
8. ***Михасев Г.И.*** О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек // Прикл. механика. 1992. Т. 28. N. 9. С. 50-55.

SUMMARY

Free vibration and parametric instability of a noncircular cylindrical shell subjected to the axial static and periodic loads are studied. The loads are assumed to be nonuniform in the circumferential direction. By using asymptotic methods, the solutions are found in the form of functions localized near the "weakest" generatrix on the shell surface.

УДК 517.936

Т.Л.Сурин

О правильности некоторых линейных систем Пфаффа

Рассмотрим вполне интегрируемую систему Пфаффа

$$dx = \sum_{i=1}^{2} P_i(t)\, x\, dt_i \qquad (1)$$

где $t \in R^2$, $x(t) \in R^n$, $n \times n$ — матрицы $P_i(t)$ непрерывно-дифференцируемы и ограничены при $t_i \geq t_i^0$ $(i = 1,2)$.

В монографии [1, с.82], а также в статьях [2; 3] введено понятие характеристических векторов системы (1), дано определение правильности этой системы и приведены некоторые критерии правильности систем Пфаффа.

Пусть матрицы $P_i(t)$ (i =1,2) удовлетворяют условиям

$$[P_1(t), P_2(t)] = 0, \tag{2}$$

$$\left[P_j(t), \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{2} P_i(t)\,dt_i\right] = 0, (j = 1,2), \tag{3}$$

(здесь $\int_{t_0}^{t}$ – криволинейный интеграл, не зависящий от пути интегрирования; $[A, B]$ – коммутатор). В [4] показано, что в этом случае решение может быть представлено в виде:

$$X(t) = \exp Q(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{2} P_i(t)\,dt\right). \tag{4}$$

Из равенства (3) при $t_i = t_i^0$ получаем

$$\left[P_1(t_1, t_2^0), \int_{t_1^0}^{t_1} P_1(t_1, t_2^0)\,dt_1\right] = 0, \qquad \left[P_2(t_1^0, t_2), \int_{t_2^0}^{t_2} P_2(t_1^0, t_2)\,dt_2\right] = 0,$$

а это означает, что матрицы $P_1(t_1, t_2^0)$, $P_2(t_1^0, t_2)$ являются матрицами Лаппо-Данилевского.

Совместно с системой (1) рассмотрим системы

$$\frac{dx}{dt_1} = P_1(t_1, t_2^0)\,x, \tag{5}$$

$$\frac{dx}{dt_2} = P_2(t_1^0, t_2)\,x. \tag{6}$$

В [5] показано, что если все решения системы (1) и сопряженной к ней системы имеют по одному характеристическому вектору, то для правильности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы были правильными системы (5) и (6).

Рассмотрим два частных случая системы (1), решение которой можно представить в виде (4):

1) случай, когда матрицы $P_i(t)$ функционально - коммутативны при $t_i \ge t_i^0$ (i=1,2);

2) случай, когда выполнены условия (2) и (3) и $Q(t)$ консервативная [6] при $t_i \ge t_i^0$ (i=1,2) матрица.

В настоящей работе для этих случаев

1) указан метод нахождения характеристических векторов системы (1);

2) изучается связь между системами (1) и (5)-(6) и получены некоторые критерии правильности системы (1).

Известно [6], что если $Q(t)$ консервативная матрица, то она при помощи постоянного преобразования может быть приведена к блочнодиагональному виду, где каждый из диагональных блоков имеет единственное собственное значение, собственные значения двух различных блоков различны.

Рассуждая таким же образом, как в [6; 7] можно показать, что аналогичный результат справедлив и в том случае, когда матрицы $P_i(t)$ функционально-коммутативные, только при этом система приводима к блочно-треугольному виду. Будем считать, что уже исходная система (1) имеет блочно-треугольный (блочно-диагональный) вид.

Теорема 1. *Пусть (1) - система Пфаффа с функционально-коммутативными матрицами коэффициентов (консервативной матрицей $Q(t)$ при $t_i \ge t_i^0$ ($i=1,2$)), тогда у системы (1) существует фундаментальная матрица, характеристическое множество любого решения $x_i(t_1,t_2)$ $(i=1,\ldots,n)$ которой совпадает с характеристическим множеством некоторой из функций $\exp\left(\mathrm{Re}\,\lambda^j(t)\right)$ $(j=1,\ldots,n)$, где $\lambda^j(t)$ - собственные значения блоков матрицы $Q(t)$, причем эта фундаментальная матрица нормальна относительно любого выбора ее характеристических векторов.*

Доказательство. Пусть матрица $Q(t)$ имеет $k \in \{1,\ldots,n\}$ групп N_p собственных значений $\lambda^j(t)$ мощности $|N_p| = n_p$ совпадающих между собой и равных $\Lambda_p(t)$ функций $\lambda^j(t)$ при $j \in N_p$.

Воспользовавшись формулой Лагранжа - Сильвестра, получим

$$X(t) = \exp Q(t) = S(t)\exp\left(diag\left(\Lambda_1(t)E_{n_1},\ldots,\Lambda_k(t)E_{n_k}\right)\right) =$$
$$= S_1(t)\exp\left(diag\left(\mathrm{Re}\,\Lambda_1(t)E_{n_1},\ldots,\mathrm{Re}\,\Lambda_k(t)E_{n_k}\right)\right) \qquad (7)$$

Очевидно, что матрица $S_1(t)$ обобщенно ограничена [1, с.96; 3] и тогда из (7) мы получаем, что характеристические множества решения $x_j(t)$ и функции $\exp(\mathrm{Re}\,\lambda^j(t))$ совпадают.

Покажем, что матрица $X(t) = \exp Q(t)$ нормальна относительно любого выбора ее характеристических векторов. Действительно, возьмем произвольные характеристические вектора $\left(\lambda_1^j,\lambda_2^j\right)$ решений $x_j(t)$ и покажем, что не существует комбинации $x^*(t) = \sum_j c_j x_j(t)$, у которой был бы характеристический вектор (ν_1,ν_2) такой, что $\nu_1 \le \lambda_1^{j_p}$, $\nu_2 \le \lambda_2^{j_p}$ (одно из неравенств строгое), где решение j_p входит в комбинацию, а вектор $\left(\lambda_1^{j_p},\lambda_2^{j_p}\right)$ принадлежит данному выбору характеристических векторов.

Вначале предположим, что матрица $Q(t)$ состоит из одного блока и имеет единственное собственное значение $\lambda(t)$. Тогда $Sp\,Q(t) = n\lambda(t)$ и какие бы характеристические вектора $\left(\lambda_1^j,\lambda_2^j\right)$ мы ни взяли у решений

$x^j(t)$, $\exp Q(t)$ нормальна относительно этих векторов. Действительно, фиксируем некоторый вектор $\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k\right)$. Такой же характеристический вектор есть у каждого из решений $x^j(t)$, а у $\exp Sp\,Q(t)$ будет существовать характеристический вектор $(\nu_1, \nu_2) = \left(n\lambda_1^k, n\lambda_2^k\right)$, то есть будет выполняться равенство $\sum_j \lambda_i^j = \nu_i \; (i = 1,2)$, а это и будет означать [3], что $\exp Q(t)$ нормальная фундаментальная матрица относительно любого выбора характеристических векторов.

Пусть матрица $Q(t)$ состоит из нескольких блоков. Тогда, так как матрица $X(t)$ блочно-треугольная (блочно-диагональная), то у решения $x^*(t)$ координаты равны комбинациям соответствующих координат определенных блоков, причем каждая координата является комбинацией координат одного блока. Далее, воспользовавшись тем, что комбинация решений из одного блока не может быть понижающей и теоремой 1.10 [2] получаем, что у решения $x^*(t)$ не существует характеристического вектора (ν_1, ν_2), такого, что $\nu_1 \le \lambda_1^{j_p}, \nu_2 \le \lambda_2^{j_p}$ (одно из неравенств строгое). Теорема доказана.

Совместно с системой (1) рассмотрим системы (5) и (6). Справедлива

Теорема 2. *Система (1) с функционально-коммутативными матрицами коэффициентов (консервативной матрицей $Q(t)$) правильна тогда и только тогда, когда правильны системы (5) и (6).*

Доказательство. Необходимость доказана в [5].

Достаточность. Пусть системы (5) и (6) правильные. Предположим вначале, что матрица $Q(t)$ состоит из одного блока. Обозначим через

$$q(t) = \int_{t_1^0}^{t_1} \operatorname{Re} Sp P_1(t)\,dt + \int_{t_2^0}^{t_2} \operatorname{Re} Sp P_2(t_1^0, t_2)\,dt_2 =$$

$$= \int_{t_1^0}^{t_2} \operatorname{Re} Sp P_1(t_1, t_2^0)\,dt_1 + \int_{t_2^0}^{t_2} \operatorname{Re} Sp P_2(t)\,dt_2 = n \operatorname{Re} \lambda(t),$$

где $\lambda(t)$ - собственное значение матрицы $Q(t)$. Так как системы (5) и (6) правильные, то будут выполнятся равенства

$$\lim_{t_1 \to \infty} \frac{1}{t_1} \int_{t_1^0}^{t_1} \operatorname{Re} Sp P_1(t_1, t_2^0)\,dt_1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_1^j, \qquad \lim_{t_2 \to \infty} \frac{1}{t_2} \int_{t_2^0}^{t_2} \operatorname{Re} Sp P_2(t_1^0, t_2)\,dt_2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_2^j, \tag{8}$$

где λ_1^j (λ_2^j) $(j = 1, \ldots, n)$ — характеристические показатели системы (5) (соответственно системы (6)) (см. [8,с.166]).

Учитывая, что $\int_{t_0^1}^{t_1} \operatorname{Re} Sp P_1(t)\,dt_1$ (соответственно $\int_{t_2^0}^{t_2} \operatorname{Re} Sp P_2(t)\,dt_2$) ограниченная функция $t_2(t_1)$ при фиксированном t_1 (t_2) , а также справедливость равенств (8) , можно показать, что у функции $\exp q(t)$ существует характеристический вектор $\left(\sum_j \lambda_1^j, \sum_j \lambda_2^j\right)$ и этот вектор единственный. Совершенно аналогично можно показать, что у функции $\exp(-q(t))$ существует характеристический вектор $\left(-\sum_j \lambda_1^j, -\sum_j \lambda_2^j\right)$, а это и означает, что система (1) правильная.

Пусть теперь матрица $Q(t)$ имеет общий вид, т.е. состоит из k блоков. Разбив систему (1) на k подсистем $dx_k = \sum_{i=1}^{2} P_i^k(t) x_k \, dt_i$, получим, что каждая из них правильная, но тогда и исходная система тоже правильная. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы 2 следует, что каждая из функций $\exp(\mathrm{Re}\,\lambda^j(t))$ обладает точным характеристическим вектором.

Обозначим через $\bar{\lambda}^j(t)$ (через $\lambda_1^j(t)$, $\lambda_2^j(t)$) (j = 1,...,n) собственные значения матрицы $Q(t)$ (соответственно матрицы $Q_1(t) = \int_{t_1^0}^{t_1} P_1(t)dt_1$, матрицы $Q_2(t) = \int_{t_2^0}^{t_2} P_2(t)dt_2$). Справедлива

Теорема 3. *Система (1) с функционально-коммутативными матрицами коэффициентов (консервативной матрицей $Q(t)$) правильна тогда и только тогда, когда каждая из функций* $\exp(\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}^j(t))$ *(j = 1,...,n) обладает точным характеристическим вектором.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы аналогично доказательству теоремы 4 в [9].

Следствие 1. Если система с функционально - коммутативными матрицами правильная, то характеристические вектора решений некоторой нормальной фундаментальной матрицы этой системы равны $(\lambda_1^j, \lambda_2^j)$, где

$$\lambda_1^j = \lim_{t_1\to\infty} \tfrac{1}{t_1} \mathrm{Re}\,\lambda_1^j(t_1, t_2^0), \quad \lambda_2^j = \lim_{t_2\to\infty} \tfrac{1}{t_2} \mathrm{Re}\,\lambda_2^j(t_1^0, t_2),$$

$$\lambda_1^j(t_1, t_2) + \lambda_2^j(t_1^0, t_2) = \bar{\lambda}^j(t), \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Доказательство следует из [5], [9] и теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гайшун И.В.*** Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн.,1983.
2. ***Грудо Э.И.*** Характеристичные векторы и множества функций двух переменных и их основные свойства. // Дифференц. уравнения.1976. Т.12, N12, с.2115 - 2128.
3. ***Грудо Э.И.*** Характеристичные векторы решений линейных однородных систем Пфаффа. // Дифференц. уравнения.1977. Т.13, N5, с.826 - 840.
4. ***Гайшун И.В.*** Один результат, относящийся к устойчивости линейной системы в полных дифференциалах. // Весці АН БССР, сер. фіз. - мат. навук. 1974, N4, с.11 - 14.

5. ***Ласый П.Г.*** О характеристических векторах линейных систем Пфаффа. //Дифференц. уравнения. 1982. Т.18, N5, с.901 - 903.
6. ***Петровский Г.Н.*** О матрицах, коммутирующих со своими частными производными. //Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук. 1979, N4, с.45-47.
7. ***Морозов В.В.*** О коммутативных матрицах. // Уч. зап. Казан. ун-та. 1952, 112, кн.9, с. 17 - 20.
8. ***Демидович Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости . М., 1967.
9 .***Сурин Т.Л.*** О показателях правильных систем Лаппо - Данилевского. // Дифференц. уравнения.1989. Т.25, №3, с.543 - 545.

S U M M A R Y

In the article we consider of characteristic sets of solutions of the linear perfectly integrable Pfaff system, which solutions can be represented as an exponent, and the criterions of the correctness of that system are also proved.

УДК 517.936

С.В. Шерегов

О векторе неправильности линейной системы Пфаффа

Рассмотрим вполне интегрируемую систему Пфаффа

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = A_i(t)\,x,\ \ x \in R^n,\ \ t \doteq (t_1, t_2) \geq 0,\ \ i = 1,2, \tag{1}$$

$n \times n$ — матрицы $A_i(t)$ которой непрерывно-дифференцируемы и ограничены при $t \geq 0$. Наряду с ней будем рассматривать возмущенную систему

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} = A_i(t)\,y + Q_i(t)\,y,\ \ y \in R^n,\ \ i = 1,2 \tag{2}$$

с непрерывно дифференцируемыми матрицами $Q_i(t)$ для которой также выполняется условие полной интегрируемости.

Известно, что для систем Пфаффа большую роль играет понятие характеристического вектора функций многих переменных [1,]. Для функций двух переменных понятия характеристического вектора, характеристического множества и их свойства приведены в [2], в [3] теория характеристических векторов применяется к исследованию пфаффовых систем (заметим, что в настоящее время под характеристическим вектором понимается вектор противоположный по знаку векторам, введенным в указанных работах). Для исследования по первому приближению устойчивости системы Пфаффа с m-возмущениями в [4] введена вектор-функция неправильности. Векторные аналоги некоторых величин, применяемых при исследовании устойчивости систем обыкновенных уравнений, введены в [5].

В настоящей работе для системы (1) введен вектор неправильности $\sigma(A)$, являющийся векторным аналогом коэффициента неправильности Д.М.Гробмана, и для системы (2) с возмущениями $Q_i(t)$, имеющими харак-