3. *Гладков А.Л.* Задача Коши для некоторых вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с поглощением. // Сибирский мат. журнал. 1993. Т. 34. № 1. С. 47-64.
4. *Vazquez J. L., Wallas M.* Existence and uniqueness of solutions of diffusion - absorption equations with general data. // Differ. and Integral Equat. 1994. V.7. No 1. P.15-36.
5. *Gladkov A.L.* Cauchy problem for equations of nonlinear heat conductibility with convection in classes of growing functions. // Pitman Research Notes in Mathematics Series. 1995. V.325. P.106-119.
6. *Гладков А.Л.* О задаче Коши в классах растущих функций для уравнения фильтрации с конвекцией. // Матем. сборник. 1995. Т.186. № 6. С. 35-56.
7. *Гладков А.Л.* О неограниченных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с сильной конвекцией на бесконечности. // Журнал вычислит. математики и математич. физики. 1996. Т. 36. № 10. С. 73-86.
8. *Гладков А.Л.* Об одном нелинейном уравнении теплопроводности со степенными нелинейностями. // Вестник ВГУ. 1996. № 2. С.95-99.

S U M M A R Y

The growing at an infinity stationary solutions of the equations of nonlinear heat conductibility with convection and absorption terms are considered. The properties of such solutions are investigated.

УДК 539.3

Г.И. Михасев

К исследованию локальных колебаний и динамической неустойчивости цилиндрических оболочек

1. Введение. Хотя к настоящему времени выполнено большое количество исследований по параметрической неустойчивости тонких цилиндрических оболочек, полученные результаты в большинстве своем относятся к идеальным оболочкам с постоянными параметрами [1-5]. Как известно, параметрические колебания в этом случае сопровождаются образованием волн, покрывающих всю поверхность оболочки, а задача динамической неустойчивости сводится к уравнению Матье [1], коэффициенты которого суть функции статической бифуркационной нагрузки и собственной частоты колебания оболочки.

В настоящей работе рассматриваются свободные колебания и параметрическая неустойчивость некругового тонкого цилиндра под действием статической и дополнительной периодической осевых нагрузок. Обе компоненты нагружения являются неоднородными в окружном направлении оболочки, а частота периодической составляющей берется близкой к удвоенной частоте собственных колебаний оболочки. Исследуются колебания, характерные локализацией мод вблизи "наиболее слабой" образующей.

1. Постановка задачи. Введем на поверхности некруговой цилиндрической оболочки ортогональную систему координат, связанную с главными линиями кривизны, так что первая квадратичная форма поверхности имеет вид $R^2\left(ds^2+d\varphi^2\right)$. Здесь R- характерный размер срединной поверхности (будет введен ниже), $x=Rs$- координата на направляющей, φ - круговая координата. Тогда радиус кривизны $R_2=R\chi^{-1}(\varphi)$. Пусть $0\le s\le L/R$, $0\le\varphi\le\varphi_1$, где L - длина оболочки, а $\varphi_1\le 2\pi$.

Рассмотрим случай, когда оболочка испытывает неоднородную осевую нагрузку

$$F^*=Eh\left\{F_0(\varphi)+\varepsilon^2\left[F_1(\varphi)\sin\Omega^*t^*+F_2(\varphi)\cos\Omega^*t^*\right]\right\},$$

где E, h - модуль Юнга и толщина оболочки, $\varepsilon^6=h^2\Big/\left[12R^2\left(1-\nu^2\right)\right]$ - малый параметр, ν - коэффициент Пуассона, t^* - время, Ω^* - частота дополнительной периодической силы. Если $F_1^2+F_2^2\ne 0$, то предполагается F_1, $F_2\sim 1$ при $\varepsilon\to 0$.

В качестве исходной используем полубезмоментные уравнения теории тонких оболочек[1, 6]

$$\varepsilon^6\Delta^2W+\varepsilon^3\chi(\varphi)\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}+\varepsilon^3F(\varphi,t)\frac{\partial^2W}{\partial s^2}+\frac{\partial^2W}{\partial t^2}=0,$$

$$\varepsilon^3\Delta^2\Phi+\chi(\varphi)\frac{\partial^2W}{\partial s^2}=0, \tag{1}$$

записанные в безразмерной форме. Здесь Δ - оператор Лапласса, а безразмерные величины введены по формулам:

$$W=W^*R^{-1},\qquad \Phi=\Phi^*\left(\varepsilon^3EhR^2\right)^{-1},\qquad F=F^*\left(\varepsilon^3Eh\right)^{-1},\qquad t=t^*t_c^{-1},$$

$$t_c=\sqrt{\rho R^2E^{-1}},\qquad F=F_0(\varphi)+\varepsilon^2\left[F_1(\varphi)\sin\Omega t+F_2(\varphi)\cos\Omega t\right],\qquad \Omega=\Omega^*t_c,$$

где W^*, Φ^*- соответственно, нормальный прогиб и функция напряжений, ρ- массовая плотность, t_c-характерное время. Считаем $\chi(\varphi)$, $F_j(\varphi)\in C^\infty[0,\varphi_1]$. Пусть на краях оболочки выполняются условия шарнирного опирания

$$W=\frac{\partial^2W}{\partial s^2}=\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}=0\qquad \text{при}\qquad s=0,\ L/R,$$

позволяющие искать функции W, Φ в виде

$$W=w_m(\varphi,t)\sin\left(\varepsilon^{-3/2}p_m s\right),\qquad \Phi=f_m(\varphi,t)\sin\left(\varepsilon^{-3/2}p_m s\right), \tag{2}$$

где $p_m=\varepsilon^{3/2}m\pi R/L$, m - натуральное число. Тогда уравнения (1) перепишутся в виде

$$\varepsilon^6\frac{\partial^4w_m}{\partial\varphi^4}-2\varepsilon^3p_m^2\frac{\partial^2w_m}{\partial\varphi^2}+p_m^2\chi(\varphi)f_m+\left[p_m^4-p_m^2F(\varphi,t)\right]w_m+\frac{\partial^2w_m}{\partial t^2}=0,$$

$$\varepsilon^6\frac{\partial^4f_m}{\partial\varphi^4}-2\varepsilon^3p_m^2\frac{\partial^2f_m}{\partial\varphi^2}+p_m^4f_m-p_m^2\chi(\varphi)w_m=0. \tag{3}$$

В дальнейшем индекс m опускается. Пусть сначала $F_1^2 + F_2^2 \equiv 0$ на $[0, \varphi_1]$. При определенном соотношении входящих в задачу функций и параметров, оболочка имеет "наиболее слабую" образующую $\varphi = \varphi_0$, вблизи которой локализуются собственные формы колебания [7, 8], а также имеет место локальная потеря устойчивости [6, 7]. Эта образующая находится из условий [6]

$$2\chi' - F_0' = 0, \qquad 4\left(\chi'^2 + \chi''\right) - F_0'^2 - 2F_0'' > 0$$

и

$$2\chi\chi' - p^2 F_0' = 0, \qquad 2\left(\chi'^2 + \chi''\right) - p^2 F_0'' > 0$$

для случаев $p < 1$ и $p > 1$, соответсвенно. В обоих случаях с использованием асимптотического метода Товстика могут быть построены решения уравнений (3) в виде ВКБ - разложений, убывающих при удалении от линии $\varphi = \varphi_0$. Однако при значениях p близких к единице построенные ВКБ - решения становятся непригодными (см.[6], стр. 97).

2. Решение задачи при $p \approx 1$. Пусть $\qquad p = 1 + \varepsilon^2 p'$. $\qquad$ (4)

Сделаем растяжение масштаба вблизи линии $\varphi = \varphi_0$ и введем "медленное" время t_k: $\quad \varphi - \varphi_0 = \varepsilon\xi, \quad t_k = \varepsilon^k t, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Предположим образующая $\varphi = \varphi_0$ находится вдали от краев $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_1$ (в случае панели), а амплитуда волн быстро убывает вне некоторой малой окрестности этой линии. Тогда можно поставить задачу об отыскании решения уравнений (3) такого, что для любого $t > 0$ $\; w \to 0,\ f \to 0$ при $|\xi| \to \infty$.

Равномерно пригодное по ξ и t формальное асимптотическое решение будем искать в виде

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w^{(k)}(\xi, t_0, t_1, \ldots), \qquad f = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f^{(k)}(\xi, t_0, t_1, \ldots). \tag{5}$$

Функции $\chi(\varphi)$, $F_j(\varphi)$ разложим в окрестности образующей $\varphi = \varphi_0$ в ряды по степеням ξ. При этом пусть $\chi(\varphi_0) = 1$. Тогда характерный размер оболочки $R = R_2(\varphi_0)$, где число φ_0 будет найдено ниже.

Подстановка (5) в (3) приводит к последовательности дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=0}^{k} D_j w^{(k-j)} = 0, \tag{6}$$

где

$$D_0 = \partial^2/\partial t_0^2 + \left[2 - F_0(\varphi_0)\right], \qquad D_1 = \left[2\chi'(\varphi_0) - F_0'(\varphi_0)\right]\xi,$$

$$D_2 = 4\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2p\left[2 - F_0(\varphi_0)\right] + \left[\chi''(\varphi_0) + \chi'^2(\varphi_0) - \frac{1}{2}F_0''(\varphi_0)\right]\xi^2 -$$

$$-\left[F_1(\varphi_0)\sin\Omega t + F_2(\varphi_0)\cos\Omega t\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial t_0\,\partial t_1}, \ldots$$

В нулевом приближении (k = 0) получаем однородное дифференциальное уравнение, которое имеет решение

$$w^{(0)}(\xi, t_0, t_1, \ldots) = w_s^{(0)}(\xi, t_1, t_2, \ldots)\sin\omega_0 t_0 + w_c^{(0)}(\xi, t_1, t_2, \ldots)\cos\omega_0 t_0 . \tag{7}$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{2 - F_0(\varphi_0)}$ - собственная частота колебаний круговой цилиндрической оболочки радиуса $R_2(\varphi_0)$, нагруженной однородной осевой силой $F_0(\varphi_0)$.

При k = 1 в (6) имеем неоднородное уравнение, правая часть которого порождает секулярные члены относительно t_0. Условие отсутствия секулярных членов дает уравнение

$$2\chi'(\varphi_0) - F_0'(\varphi_0) = 0 \tag{8}$$

для определения "наиболее слабой" образующей $\varphi = \varphi_0$. Далее исследуется частный случай, когда $\chi'(\varphi_0) = 0$ и (или) $F_0'(\varphi_0) = 0$.

Введем "расстройку" частоты возбуждения

$$\Omega = 2\omega + \varepsilon\sigma , \quad \sigma \sim 1 \text{ при } \varepsilon \to 0 \tag{9}$$

и рассмотрим уравнение (6) при k = 2. Правая часть последнего снова порождает вековые члены при $t_0 \to \infty$. Условие их отсутствия, с учетом (7), (9), дает систему дифференциальных уравнений

$$4\omega_0 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t_1} + 2\Xi \mathbf{E}_{-1}\mathbf{X} - \mathrm{T}\mathbf{X} = 0 \tag{10}$$

относительно вектор-функции $\mathbf{X} = \left(w_s^{(0)}(\xi, t_1, t_2, \ldots),\ w_c^{(0)}(\xi, t_1, t_2, \ldots)\right)^{\mathrm{T}}$, где

$$\Xi = 4\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 2p'\omega_0^2 + \frac{1}{2}\left[2\chi''(\varphi_0) - F_0''(\varphi_0)\right]\xi^2 ,$$

а $\mathbf{E}_{-1}$ и T - матрицы размерности 2×2 с элементами e_{ij} и τ_{ij} соответственно:

$$e_{11} = e_{22} = 0, \quad e_{12} = -e_{21} = 1, \quad \tau_{11} = -\tau_{22} = F_1(\varphi_0)\cos\sigma t_1 - F_2(\varphi_0)\sin\sigma t_1 ,$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = F_1(\varphi_0)\sin\sigma t_1 + F_2(\varphi_0)\cos\sigma t_1 .$$

После преобразования Фурье

$$\mathrm{X}(\xi, t_1, \ldots) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}^{\mathrm{F}}(\eta, t_1, \ldots)\exp(i\eta\xi)d\eta \tag{11}$$

приходим к системе дифференциальных уравнений

$$4\omega_0 \frac{\partial \mathbf{X}^{\mathrm{F}}}{\partial t_1} - \mathrm{T}\mathbf{X}^{\mathrm{F}} - 2\left[2\chi''(\varphi_0) - F_0''(\varphi_0)\right]^{2/3} D_x \mathbf{E}_{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{F}} = 0 \tag{12}$$

относительно $\mathbf{X}^{\mathrm{F}} = \left(w_s^{\mathrm{F}}(\eta, t_1, \ldots),\ w_c^{\mathrm{F}}(\eta, t_1, \ldots)\right)^{\mathrm{T}}$.

Здесь $D_x = \partial^2/\partial x^2 - \left(\delta + x^4\right)$ - дифференциальный оператор, где

$$x = \left\{8^{-1}\left[2\chi''(\varphi_0) - F_0''(\varphi_0)\right]\right\}^{-1/6}\eta, \quad \delta = 2p'\omega_0^2\left[2\chi''(\varphi_0) - F_0''(\varphi_0)\right]^{-2/3}. \tag{13}$$

Требуется найти нетривиальное решение системы уравнений (12), стремящееся для любого t_1 к нулю при $|x| \to \infty$. Рассмотрим задачу

$$y''_{xx} + \left(\lambda - x^4\right)y = 0, \qquad y \to 0 \text{ при } x \to \pm\infty, \tag{14}$$

которая является частным случаем ранее изученной задачи (см.(5.2.7) в [6]). Пусть λ_n и y_n - соответственно, собственные числа и собственные функции для (14). В частности, λ_1 = 1,125; λ_2 = 3, 750. Будем искать решение уравнений (12) в виде

$$w_s^F = y_n(x)T_{n,s}(t_1,...), \quad w_c^F = y_n(x)T_{n,c}(t_1,...). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (12) и учитывая (14), приходим к системе дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\partial T_{n,s}/\partial t_1 = -a_1 \sin(\sigma t_1 - \theta)T_{n,s} - \left[a_{2,n} - a_1\cos(\sigma t_1 - \theta)\right]T_{n,c}$$

$$\partial T_{n,c}/\partial t_1 = \left[a_{2,n} + a_1\cos(\sigma t_1 - \theta)\right]T_{n,s} + a_1\sin(\sigma t_1 - \theta)T_{n,c} \tag{16}$$

относительно $T_{n,s}$, $T_{n,c}$. В (16) приняты обозначения

$$a_1 = \left[F_1^2(\varphi_0) + F_2^2(\varphi_0)\right]^{1/2}(4\omega_0)^{-1}, \quad a_{2,n} = (\lambda_n + \delta)\left[2\chi''(\varphi_0) - F_0''(\varphi_0)\right]^{2/3}(2\omega_0)^{-1}, \tag{17}$$

$$\sin\theta = F_1(\varphi_0)\left[F_1^2(\varphi_0) + F_2^2(\varphi_0)\right]^{-1/2}, \ \cos\theta = F_2(\varphi_0)\left[F_1^2(\varphi_0) + F_2^2(\varphi_0)\right]^{-1/2}.$$

Рассматривая уравнение (6) в высших приближениях(k>2), можно построить функции $w^{(k)}(\xi, t_0, t_1, ...)$.

3. Анализ решения. При $F_1^2 + F_2^2 \equiv 0$ уравнения (16) допускают решения в замкнутом виде. В этом случае формулы (2), (5), (7), (11), (15) определяют свободные колебания оболочки с частотой $\omega = \omega_0 + \varepsilon^2 a_{2,n}$. Принимая во внимание (13), (17), находим частоту

$$\omega = \sqrt{2 - F_0(\varphi_0)} + \sqrt[3]{\frac{h^2}{12R_0^2\left(1 - \nu^2\right)}}\left\{\frac{\left[2\chi''(\varphi_0) - F_0''(\varphi_0)\right]^{2/3}\lambda_n}{2\sqrt{2 - F_0(\varphi_0)}} + p'\sqrt{2 - F_0(\varphi_0)}\right\} \tag{18}$$

как функцию параметра p' и собственного числа λ_n. Следует заметить, что $\left|X^F\right| \to 0$ при $x \to \pm\infty$ если $\qquad 2\chi''(\varphi_0) - F''(\varphi_0) > 0$. (19)

Таким образом, "наиболее слабая " образующая находится из условий (8), (19). Формула (18) указывает на то, что $F_0 < F_b = 2$. Здесь $F_b = 2$ соответствует критическому значению классической осевой нагрузки [6], при которой происходит потеря устойчивости круговой цилиндрической оболочки радиуса $R = R_2(\varphi_0)$. Заметим также, что при значениях F_0 близких к критическому, влияние поправки $\varepsilon^2 a_{2,n}$, учитывающей наличие эксцентриситета поперечного сечения цилиндра и (или) неоднородность статического нагружения, увеличивается.

Если $F_1^2 + F_2^2 \neq 0$, то решение (2), (5), (7), (11), (15) определяет параметрические колебания оболочки, которые являются устойчивыми или неустойчивыми в зависимости от соотношения входящих в задачу параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Болотин В.В.*** Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГТТИ. 1956. 573с.
2. ***Grundmann H.*** Zur dynamischen Stabilität des schwach gekrümmten zylindri schen Schalenfeldes // Ing. Arch. 1970. V. 39. No. 4. P. 261-272.
3. ***Vijayaraghavan A.,*** Evan-Ivanowski R.M. Parametric instability of circular cylindrical shells // Trans. ASME. E34. 1967. No.4. P. 985-990.
4. ***Wenzke W.*** Die dynamiseche stabilität der axiapul-sierend belasten Kreiszylinderschale // Wiss. Z. Techn. Hochschule Otto Von Guerickie Magdeburg. 1963. V. 7. H. 1. P. 93-124.
5. ***Yao John C.*** Dynamic stability of cylindrical shells under static and periodic axial and radial loads // AIAA Journal. 1963. V.1. No. 6. P. 1391-1396.
6. ***Товстик П.Е.*** Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука. 1995. 320с.
7. ***Товстик П.Е.*** Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 815-822.
8. ***Михасев Г.И.*** О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек // Прикл. механика. 1992. Т. 28. N. 9. С. 50-55.

SUMMARY

Free vibration and parametric instability of a noncircular cylindrical shell subjected to the axial static and periodic loads are studied. The loads are assumed to be nonuniform in the circumferential direction. By using asymptotic methods, the solutions are found in the form of functions localized near the "weakest" generatrix on the shell surface.

УДК 517.936

Т.Л.Сурин

О правильности некоторых линейных систем Пфаффа

Рассмотрим вполне интегрируемую систему Пфаффа

$$dx = \sum_{i=1}^{2} P_i(t)\, x\, dt_i \qquad (1)$$

где $t \in R^2$, $x(t) \in R^n$, $n \times n$ — матрицы $P_i(t)$ непрерывно-дифференцируемы и ограничены при $t_i \geq t_i^0$ $(i = 1,2)$.