2. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий* В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., Наука. 1966. С.207.
3. *Изобов Н.А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. т.12. М.,ВИНИТИ. 1974. С.71-146.
4. *Изобов Н.А.* Исследования в Белоруссии по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения, 1993. т.29, №12. С.2034-2055.
5. *Миллионщиков В.М.* Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. т.5,№10. С. 1775-1784.
6. *Миллионщиков В.М.* Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сиб. мат. ж. 1969. т.10, №1. С. 99-104.

S U M M A R Y

The paper is a review of the results of the study of asymptotical theory of common differencial systems carried out under the supervision of Yu.S.Bogdanov and Lyapunov's characteristic indices and their applications done by the author.

УДК 517.956

А.Л. Гладков

О стационарных решениях некоторых квазилинейных параболических уравнений

1. **Введение**. Рассматривается уравнение

$$u_t = (u^\alpha)_{xx} + c_1(u^\lambda)_x - c_2u^\beta, \qquad (1.1)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > \max(\alpha,\beta)$, c_1 и c_2 – некоторые положительные постоянные. Уравнение (1.1) возникает, например, в процессах распространения тепла в нелинейной среде и диффузии жидкостей и газов.

Задача Коши для частных случаев уравнения (1.1) исследовалась в разных работах. Так, классы существования и единственности обобщенного решения задачи Коши для уравнения (1.1) с произвольными большими единицы значениями показателей степеней рассматривались при условии $c_1 = 0$ в [1] - [4] и при условии $c_2 = 0$ – в [5] - [7]. В [8] этот же вопрос исследовался при $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ и $\alpha = \beta = \lambda$. Некоторые понятия, встречающиеся в данной работе, определены в [8].

Вопрос о существовании для (1.1) решения задачи Коши с растущей на бесконечности начальной функцией может быть решен с помощью построения суперрешений. При построении таких решений возникает необходимость рассмотрения стационарных решений $u(x)$ уравнения (1.1). После введения обозначения $v(x) = u^\alpha(x)$ для новой неизвестной функции получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$v'' + c_1(v^{\lambda/\alpha})' - c_2 v^{\beta/\alpha} = 0. \qquad (1.2)$$

Для уравнения (1.2) будем решать задачу Коши с начальными условиями следующего вида:

$$v(0) = m > 0, \quad v'(0) = 0 \qquad (1.3)$$

Стационарным обобщенным решением уравнения (1.1) на всей прямой будет, например, функция $u(x)$, определенная формулами: $u(x) = m^{1/\alpha}$ при $x < 0$ и $u(x) = v^{1/\alpha}(x)$ при $x \geq 0$, где $v(x)$ – решение задачи (1.2), (1.3). Обоснование этого факта можно найти в [7].

Целью настоящей работы является исследование решений задачи (1.2), (1.3).

2. **Локальная разрешимость задачи** (1.2), (1.3).

Теорема 1. Существует такое $\delta > 0$, что на отрезке $[0, \delta]$ определено единственное решение задачи (1.2), (1.3).

Доказательство. Доказательство локальной разрешимости проводится стандартным методом с помощью сведения задачи (1.2), (1.3) к интегральному уравнению.

Рассмотрим уравнение

$$v(x) = T(v), \qquad (2.1)$$

где оператор $T(v)$ определен формулой

$$T(v) = m - c_1 \int_0^x v^{\lambda/\alpha}\, ds + c_1 m^{\lambda/\alpha} x + c_2 \int_0^x dr \int_0^r v^{\beta/\alpha}\, ds. \qquad (2.2)$$

Оператором $T(v)$ будем действовать на банахово пространство $E_{\delta,\, m} = \{v \in C\,[0, \delta] : m/2 \leq v \leq 2m\}$. В силу определения (2.2) $T(v)$ отображает $E_{\delta,\, m}$ в себя, если δ выбрать достаточно малым. Покажем теперь, что при подходящем значении δ этот оператор является сжимающим. Действительно, для любых $v_1 \in E_{\delta,\, m}$ и $v_2 \in E_{\delta,\, m}$ имеем:

$$\left\| T(v_1) - T(v_2) \right\|_{C[0,\delta]} = \sup_{0 \leq x \leq \delta} \left| c_1 \int_0^x \left(v_2^{\lambda/\alpha} - v_1^{\lambda/\alpha} \right) ds + c_2 \int_0^x dr \int_0^r \left(v_1^{\beta/\alpha} - v_2^{\beta/\alpha} \right) ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left\| v_1 - v_2 \right\|_{C[0,\delta]},$$

если δ достаточно мало. Таким образом, при достаточно малом $\delta > 0$ оператор $T(v)$ отображает банахово пространство $E_{\delta,\, m}$ в себя и является сжимающим. По теореме Банаха о сжимающих отображениях уравнение (2.1) имеет на отрезке $[0, \delta]$ единственное решение. В силу эквивалентности уравнения (2.1) и задачи (1.2.), (1.3) теорема доказана. Возможность продолжения решения задачи (1.2), (1.3) на всю положительную полуось вытекает из априорной оценки решения сверху, которая будет установлена в пункте 3, и следующего утверждения.

Лемма 1. Для решения задачи (1.2), (1,3) справедливы неравенства

$$v'(x) > 0 \text{ при } x > 0, \qquad (2.3)$$

$$v(x) > m \text{ при } x > 0. \qquad (2.4)$$

Доказательство. Докажем (2.3) методом от противного. Вследствие уравнения (1.2) и условий (1.3) $v''(0) > 0$ и $v'(x) > 0$ для положительных x достаточно близких к нулю. Пусть существует такое значение $x_0 > 0$, что $v'(x_0) = 0$ и $v'(x_0) > 0$ при $0 < x < x_0$. Тогда $v''(x_0) > 0$ и в силу непрерывности $v''(x) > 0$ для $x < x_0$ и достаточно близких к x_0. Но это противоречит условию $v'(x_0) = 0$. Неравенство (2.3) доказано. Соотношение (2.4) является следствием (2.3) и (1.3).

Замечание 1. После получения априорной оценки сверху решения задачи (1.2), (1.3) возможность продолжения этого решения на отрезок [0, p] произвольной длины устанавливается с помощью рассуждений приведенных в теореме 1 для пространств

$$S_i = \left\{ v \in C\left[\delta + (i-1)\delta_p, \delta + i\delta_p\right] : v \ge m \right\}, \quad i \ge 1.$$

3. Поведение при $x \to +\infty$ решений задачи (1.2), (1.3).

Две положительные функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$; определенные при $x > 0$, будем считать эквивалентными при $x \to +\infty$ и писать $\phi \cong \psi$, если $\phi(x) / \psi(x) \to 1$ при $x \to +\infty$.

Теорема 2. Для решения задачи (1.2), (1.3) справедлива следующая асимптотическая формула

$$v(x) \cong \left[\frac{c_2 (\lambda - \beta)}{c_1 \lambda} x \right]^{\frac{\alpha}{\lambda - \beta}} \qquad (3.1)$$

Доказательство. После введения обозначения $z(x) = v'(x)$ задача (1.2), (1.3) может быть переформулирована как задача Коши для системы дифференциальных уравнений

$$v' = z, \qquad (3.2)$$

$$z' = -c_1 \frac{\lambda}{\alpha} v^{(\lambda-\alpha)/\alpha} z + c_2 v^{\beta/\alpha} \qquad (3.3)$$

с начальными условиями

$$v(0) = m, \ z(0) = 0. \qquad (3.4)$$

Заметим, что в силу (2.3) функция $v(x)$ имеет при $x \ge 0$ обратную функцию $x(v)$. Причем вследствие (2.3), (2.4) $h(v) = z(x(v)) > 0$ при $v > m$ и $h(m) = 0$. Далее, $z'(x) = h'(v)v'(x) = h'(v)h(v)$. Разделив (3.3) на $h(v)$, приходим к задаче

$$h'(v) = -c_1 \frac{\lambda}{\alpha} v^{(\lambda-\alpha)/\alpha} + c_2 v^{\beta/\alpha} h^{-1}, \quad v > m, \qquad (3.5)$$

$$h(m) = 0 \qquad (3.6)$$

Сделаем в (3.5) замену неизвестной функции. Положим $f(v) = h(v)\, v^{(\lambda - \alpha - \beta)/\alpha}$. Тогда задачу (3.5), (3.6) можно переписать в следующем виде

$$f' = \frac{(\lambda - \alpha - \beta)}{\alpha} \frac{f}{v} - c_1 \frac{\lambda}{\alpha} v^{(2\lambda - 2\alpha - \beta)/\alpha} + c_2 v^{(2\lambda - 2\alpha - \beta)/\alpha} f^{-1} \equiv L(v, f), \quad v > m, \qquad (3.7)$$

$$f(m) = 0. \qquad (3.8)$$

Рассмотрим поведение решения задачи (3.7), (3.8) при разных значениях параметров λ, α и β. Пусть сначала $\lambda > \alpha + \beta$. Обозначим $b_0 = c_2\alpha / (c_1\lambda)$. Очевидно, что

$$f(v_0) = b_0 \qquad (3.9)$$

для некоторого значения $v_0 > m$. Действительно, если $f(v) < b_0$ для всех $v > m$, то из (3.7) следует неравенство

$$f' > \frac{(\lambda - \alpha - \beta)}{\alpha}\frac{f}{v}.$$

Интегрируя его по отрезку $[m_0, v]$, где $m_0 > m$, получаем

$$f(v) > f(m_0)\left(\frac{v}{m_0}\right)^{\frac{\lambda-\alpha-\beta}{\alpha}},$$

что противоречит сделанному предположению. Как легко видеть из уравнения (3.7), $f'(v) > 0$ во всех точках v, где $f(v) = b_0$. Отсюда вытекает неравенство

$$f(v) > b_0 \text{ при } v > v_0 \tag{3.10}$$

Покажем, что

$$f(v) \to b_0 \text{ при } v \to +\infty. \tag{3.11}$$

Предположим, что при достаточно больших значениях аргумента $v \geq v_1$

$$f(v) \geq b_1 > b_0\,. \tag{3.12}$$

Отсюда и из уравнения (3.7) находим, что

$$f' \leq \frac{(\lambda - \alpha - \beta)}{\alpha}\frac{f}{v} - c_2\frac{b_1 - b_0}{b_1}v^{\frac{2\lambda-2\alpha-\beta}{\alpha}}, \quad v \geq v_1 \tag{3.13}$$

Из (3.7), (3.10) следует неравенство

$$f' < \frac{(\lambda - \alpha - \beta)}{\alpha}\frac{f}{v}, \quad v > v_0 \tag{3.14}$$

После интегрирования (3.14) по отрезку $[v_0, v]$ приходим к соотношению

$$f(v) < b_0\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{\lambda-\alpha-\beta}{\alpha}} \tag{3.15}$$

Из (3.13) и (3.15) для производной функции $f(v)$ получаем оценку

$$f' \leq \frac{(\lambda - \alpha - \beta)}{\alpha}b_0 v_0^{\frac{\alpha+\beta-\lambda}{\alpha}} v^{\frac{\lambda-2\alpha-\beta}{\alpha}} - c_2\frac{b_1 - b_0}{b_1}v^{\frac{2\lambda-2\alpha-\beta}{\alpha}}, \quad v \geq v_1.$$

Отсюда для достаточно большого значения v_2 и некоторого $d > 0$ имеем

$$f' \leq -d\,v^{\frac{2\lambda-2\alpha-\beta}{\alpha}}, \quad v \geq v_2.$$

Интегрирование по отрезку $[v_2, v]$ приводит к неравенству

$$f(v) \leq f(v_2) - \frac{d\alpha}{2\lambda - \alpha - \beta}\left(v^{\frac{2\lambda-\alpha-\beta}{\alpha}} - v_2^{\frac{2\lambda-\alpha-\beta}{\alpha}}\right), \quad v \geq v_2. \tag{3.16}$$

Очевидно, соотношения (3.12) и (3.16) противоречат друг другу. Таким образом, (3.12) неверно и для всех $b_1 > b_0$ среди сколь угодно больших v найдется такое значение v_3, что

$$b_0 < f(v_3) < b_1. \tag{3.17}$$

Сравним при $v \geq v_3$ $f(v)$ с функцией $g(v) \equiv b_1$. Для достаточно большого значения v_3

$$g' > L(v, g) \text{ при } v \geq v_3 \tag{3.18}$$

Из (3.7), (3.10), (3.17) и (3.18) получаем, что

$$b_0 < f(v) < b_1, \ v \geq v_3$$

Вследствие произвольности b_1 справедливо соотношение (3.11).

При условии $\lambda = \alpha + \beta$ уравнение (3.7) приобретает следующий вид:

$$f' = -c_1 \frac{\lambda}{\alpha} v^{(2\lambda-2\alpha-\beta)/\alpha} + c_2 v^{(2\lambda-2\alpha-\beta)/\alpha} f^{-1}. \qquad (3.19)$$

Предположим, что для решения задачи (3.19), (3.8) выполнено (3.9). Но тогда в некоторой левой полуокрестности точки v_0 определены два разных решения задачи (3.19), (3.9) $f(v)$ и $p(v) \equiv b_0$, что противоречит теореме единственности. Таким образом,

$$f(v) < b_0 \qquad (3.20)$$

и, следовательно, в силу уравнения (3.19)

$$f'(v) > 0 \text{ для всех } v > m. \qquad (3.21)$$

Отсюда легко следует (3.11).

Наконец, при $\lambda < \alpha + \beta$ из уравнения (3.7) находим, что выполнено (3.20), (3.21). Справедливость (3.11) устанавливается аналогично тому, как это сделано в случае $\lambda > \alpha + \beta$.

Из (3.2), (3.11) и определения функции $f(v)$ выводим равенство

$$h(v) = b_0 v^{\frac{\alpha+\beta-\lambda}{\alpha}} (1 + \gamma(v)), \qquad (3.22)$$

где $\gamma(v)$ – бесконечно малая при $v \to +\infty$ функция. Далее, применяя (3.22) и формулу среднего значения для определенных интегралов, получаем при $a > 0, x > a$

$$x = a + \int_a^x \frac{v'(x)dx}{h(v)} = a + \frac{1}{b_0} \int_{v(a)}^{v(x)} v^{\frac{\lambda-\alpha-\beta}{\alpha}} \frac{dv}{1+\gamma(v)} = a + \frac{\alpha \left\{ [v(x)]^{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}} - [v(a)]^{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}} \right\}}{(\lambda-\beta) b_0 (1+\gamma(\bar{v}))}. \qquad (3.23)$$

Здесь $v(a) \leq \bar{v} \leq v(x)$. Выражая из (3.23) $v(x)$, получаем

$$v(x) = \left\{ \frac{\lambda-\beta}{\alpha} b_0 (1+\gamma(\bar{v}))(x-a) + [v(a)]^{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}} \right\}^{\frac{\alpha}{\lambda-\beta}},$$

откуда вытекает асимптотическая формула (3.1). Теорема доказана.

Замечание 2. Следует отметить, что из (3.2), (3.15) в случае $\lambda > \alpha + \beta$ и из (3.2), (3.20) при $\lambda \leq \alpha + \beta$ вытекает априорная оценка сверху для функции $v(x)$, гарантирующая глобальную разрешимость задачи (1.2), (1.3).

Замечание 3. Покажем, что при $\lambda \leq \alpha + \beta$ решение задачи (1.2), (1.3) является вогнутой функцией. Действительно, вследствие определения $f(v)$ и (3.21) $h'(v) > 0$ при $v > m$. Так как функции $h'(v)$ и $z'(x)$ при $v > m$ или что то же самое при $x > 0$ имеют один и тот же знак и выполнено (3.2), то справедливо неравенство $v''(x) > 0$ для $x > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Kamin S., Peletier L. A., Vazquez J.L.*** A nonlinear diffusiion - absorption equation with unbounded initial data. // Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States. 1992. V.3. P. 243-263.
2. ***McLeod J.B., Peletier L.A., Vazquez J.L.*** Solutions of a nonlinear ODE appearing in the theory of diffusion and absorption. // Differ. and Integral Equat. 1991. V.4. P.1-14.

3. *Гладков А.Л.* Задача Коши для некоторых вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с поглощением. // Сибирский мат. журнал. 1993. Т. 34. № 1. С. 47-64.
4. *Vazquez J. L., Wallas M.* Existence and uniqueness of solutions of diffusion - absorption equations with general data. // Differ. and Integral Equat. 1994. V.7. No 1. P.15-36.
5. *Gladkov A.L.* Cauchy problem for equations of nonlinear heat conductibility with convection in classes of growing functions. // Pitman Research Notes in Mathematics Series. 1995. V.325. P.106-119.
6. *Гладков А.Л.* О задаче Коши в классах растущих функций для уравнения фильтрации с конвекцией. // Матем. сборник. 1995. Т.186. № 6. С. 35-56.
7. *Гладков А.Л.* О неограниченных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с сильной конвекцией на бесконечности. // Журнал вычислит. математики и математич. физики. 1996. Т. 36. № 10. С. 73-86.
8. *Гладков А.Л.* Об одном нелинейном уравнении теплопроводности со степенными нелинейностями. // Вестник ВГУ. 1996. № 2. С.95-99.

S U M M A R Y

The growing at an infinity stationary solutions of the equations of nonlinear heat conductibility with convection and absorption terms are considered. The properties of such solutions are investigated.

УДК 539.3

Г.И. Михасев

К исследованию локальных колебаний и динамической неустойчивости цилиндрических оболочек

1. Введение. Хотя к настоящему времени выполнено большое количество исследований по параметрической неустойчивости тонких цилиндрических оболочек, полученные результаты в большинстве своем относятся к идеальным оболочкам с постоянными параметрами [1-5]. Как известно, параметрические колебания в этом случае сопровождаются образованием волн, покрывающих всю поверхность оболочки, а задача динамической неустойчивости сводится к уравнению Матье [1], коэффициенты которого суть функции статической бифуркационной нагрузки и собственной частоты колебания оболочки.

В настоящей работе рассматриваются свободные колебания и параметрическая неустойчивость некругового тонкого цилиндра под действием статической и дополнительной периодической осевых нагрузок. Обе компоненты нагружения являются неоднородными в окружном направлении оболочки, а частота периодической составляющей берется близкой к удвоенной частоте собственных колебаний оболочки. Исследуются колебания, характерные локализацией мод вблизи "наиболее слабой" образующей.

1. Постановка задачи. Введем на поверхности некруговой цилиндрической оболочки ортогональную систему координат, связанную с главными линиями кривизны, так что первая квадратичная форма поверхности име-