построению ρ. Так как $\rho \in]0,\rho_0[$ выбирается произвольным образом, то точка x_0 устойчива. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. - М.: Физматгиз, 1958. С. 324.
2. *Hogbe - Nlend H.* Théorie des bornologies ef applications. - Berlin: Springer, 1971. - 168p.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. - М.: Мир, 1986. -751 с.
4. *Богданов Ю.С.* Асимптотические характеристики нелинейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения - 1965. - Т.1, №1. С.41 - 52.
5. *Гайшун И.В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. - Мн.: Наука и техника, 1983. С. 272.
6. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. - М.: Высш. школа, 1973. С. 271.

SUMMARY

Limit properties (aer some filter) of general dynamic systems in complete metric space are investigated. The interrelation of these properties and the stability of movement of the investigated systems is determined.

УДК 517.926.4

Н.А. Изобов

Исследования в Беларуси по асимптотической теории дифференциальных систем

Исследования в Белоруссии по ляпуновской асимптотической теории обыкновенных дифференциальных систем вообще и теории показателей Ляпунова, в частности, были начаты профессором Белорусского университета Ю. С. Богдановым (1920 — 1987 гг.) на рубеже пятидесятых - шестидесятых годов и затем продолжены его учениками. В этой теории им получен ряд глубоких результатов, приведенных в отдельном значительном по объему первом пункте вместе с результатами большинства его учеников. В остальных пунктах изложены результаты по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям к задаче Ляпунова об устойчивости по линейному приближению, системам Коппеля — Конти и уравнениям Эмдена — Фаулера, не указывая при этом из-за недостатка места источников, отсылая читателя к нашим достаточно полным обзорам [3] и [4], содержащим эти источники.

1^0. **Асимптотически эквивалентные, правильные и другие системы** (см. [1-4]). Ю. С. Богдановым доказано, что всякая линейная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \qquad (1)$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами эквивалентна относительно преобразований Ляпунова некоторой кусочно-постоянной системе, коэффициенты которой принимают всего лишь два значения; введены понятия асимптотических инвариантов и индексов линейных систем, позволяющие классифицировать эти системы при преобразованиях Ляпунова. Им также показана возможность эффективного построения для правильной системы с ограниченной на всей полуоси производной матрицы коэффициентов такой кусочно-постоянной возмущенной системы, что получающиеся при этом возмущения заведомо принадлежат классу указанных выше допустимых возмущений, при этом выведены формулы нескольких типов, в том числе и эффективные, для вычисления характеристических показателей возмущенной системы, а, следовательно, при допустимых возмущениях, и для исходной системы. Ю. С. Богдановым решена задача о существовании аппроксимирующей последовательности К. П. Персидского для правильных систем и показано, что существуют правильные системы, для которых аппроксимирующей последовательности не существует, однако каждая двумерная система преобразованием Ляпунова переводится в систему, для которой она уже есть. Им изучен ряд случаев сохранения характеристических показателей линейной системы при возмущениях ее матрицы коэффициентов, в частности, показано, что характеристические показатели системы сохраняются, если сумма характеристического показателя матрицы возмущений и коэффициента неправильности Ляпунова отрицательна.

Профессором Ю. С. Богдановым построена абстрактная теория норм Ляпунова — Богданова, получен критерий Басова — Гробмана — Богданова правильности линейных систем, состоящий в их приводимости к диагональным стационарным системам с помощью обобщенного преобразования Ляпунова — Богданова. Наконец, им выполнен большой цикл работ по построению для нелинейных систем аналогов преобразований Ляпунова совместно с М.П.Богдановой и характеристических показателей (*vd*-преобразования и *vd*-числа) и разработке универсального метода исследования асимптотической устойчивости существенно нелинейных систем.

Ряд исследований по асимптотической теории дифференциальных систем выполнен учениками Ю. С. Богданова. Проблемы устойчивости решений и инвариантных множеств систем изучались в работах Т. Э. Можджера (условия существования и единственности решений систем с избирательным переключением, устойчивость решений периодических систем с таким же переключением), В. Г. Скатецкого (устойчивость решений линейных периодических систем с возмущениями, содержащими малый параметр, а также систем с матрицей Лаппо — Данилевского и стохастическими возмущениями), В. Н. Лаптинского, проведшего глубокие исследования линейных систем с периодическими коэффициентами, результаты Л. В. Тригубовича по таким системам, являющегося учеником Н. П. Еругина, и испытывающего благотворное влияние Ю. С. Богданова, И. Г. Петровской (классификация и устойчивость инвариантных множеств динамических систем). А. А. Леваковым проведены исследования дифференциальных, функционально-дифференциальных включений, систем уравнений с частными производными параболического типа и введенных им *П*-систем, которые охватывают указанные классы систем, а также различных типов устойчивости стохастических дифференциальных уравнений. Работы Ю. Б. Сыроида посвящены триангулируемости дифференциальных систем и построению асимптотических характеристик (обобщенных показателей) решений нелинейных дифференциальных систем. С. Ç. Белявским изучалось поведение решений систем на конечном и бесконечном промежутках изменения аргумента с привлечением аппарата присоединенных по Богданову систем, для чего им были определены возвратные системы и изучено их поведение на конечном промежутке изменения аргумента. М.В.Зарецкий исследовал поведение решений и сдвиг старшего показателя линейной инвариантной системы. Асимптотические свойства решений систем дифференциальных уравнений специального вида исследовались в работах Г. Н. Петровского (сферически совместные системы, φ-инвариантные линейные дифференциальные системы, использование обобщенных характеристических чисел для исследования решений дифференциальных потоков), Т. Л. Сурин (системы Лаппо — Данилевского), И. И. Мартынова (системы с кусочно-постоянными коэффициентами). Зависимость различных характеристик систем от параметров изучается в работах О. А. Кастрицы (чувствительность параметров решений линейных систем, экстремальные отклонения параметров, исследование интегральных конфигураций линейных систем), М. М. Федени (влияние малых возмущений на простой и кратный спектр, матрицу монодромии, назначенный спектр для систем со скалярным модальным управлением), Б. В. Задворного (зависимость промежутка существования решений от параметров системы, поведение решений на концах промежутка существования). Исследованию классов эквивалентности при преобразовании линейных систем посвящены работы С. А. Мазаника (построены кусочно-постоянные системы-представители классов эквивалентных по Ляпунову линейных систем и линейных систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, и изучена структура распределения точек разрыва коэффициентов у построенных систем-представителей). Им также показано, что условие Лаппо — Данилевского не является необходимым для представления фундаментальной матрицы решений в экспоненциальной форме и установлено существование линейных систем, неприводимых к системам Лаппо — Данилевского. А. Ф. Наумовичем изучались взаимные расположения решений систем дифференциальных уравнений, Н. Ф. Наумовичем исследовались системы с постоянной секторной скоростью фазовых графиков вдоль траекторий. Г. П. Размыслович для совместной алгебраическо - дифференциальной системы с запаздыванием предложил алгоритм вычисления передаточной матрицы, широко применяемой в теории автоматического регулирования и являющейся одним из основных инструментов анализа таких систем на устойчивость. Р. А. Прохорова установила асимптотическую эквивалентность между линейными дифференциальными и соответствующими конечно-разностными системами. Н. А. Изобов исследовал вопрос о приводимости систем (1) с производной $\delta \equiv \sup \|A'(t)\|$, $t \geq 0$, матрицы коэффициентов к системе с диагональным приближением, составленным из вещественных частей собственных чисел матрицы $A(t)$, и возмущением $Q(t)y$ с нормой $\|Q(t)\| \leq \mathrm{const} \times \delta^{1/(1+n)}$, $t \geq 0$, матрицы $Q(\cdot)$. Он же доказал и достижимость в двумерном случае основной оценки в методе замораживания и указал случаи ее уточнения.

Ю. С. Богдановым в 1981г. была поставлена задача о существовании правильной системы (1_A) с непустым множеством неправильности W_A всех тех значений параметра μ, для которых системы ($1_{\mu A}$) являются неправильными. Е. К. Макаровым доказано существование правильных систем (1_A) любой размерности, чьи множества неправильности W_A реализуют следующие возможные варианты: а) W_A имеет нулевую меру Лебега и содержит заданное счетное множество, не содержащее 0 или 1, в том числе и всюду плотное; б) W_A имеет полную меру на R, в частности, совпадает с $R \setminus \{0,1\}$; в) имеет положительную меру на R в заданных пределах; г) $R \setminus W_A$ обладает свойством в). Им установлено существование правильных почти-периодических систем (1_A) с непустым множеством неправильности, а также доказана неинвариантность множеств неправильности относительно ляпуновских преобразований и найдено условие на малость нормы возмущения матрицы коэффициентов системы (1_A), необходимое и достаточное для неизменности множества W_A при всех таких возмущениях.

Кроме того, Е. К. Макаровым установлена взаимосвязь между характеристическими функционалами и слабыми характеристическими показателями многомерных дифференциальных уравнений.

С. Г. Красовским для сингулярно возмущенной линейной системы с диагональным приближением получен критерий стремления к нулю решений при $\varepsilon \to +0$.

В эту статью не вошли известные исследования В. И. Мироненко по вложенным системам и построенной им теории отражающей функции.

2^0. Устойчивость характеристических показателей. (см. [2-5]). Это понятие возникло из работ О. Перрона, впервые обнаружившего неустойчивость показателей Ляпунова и доказавшего их устойчивость для диагональных систем с разделенной диагональю (подробнее см. [3, 4]). Усилиями Б. Ф. Былова и Р. Э. Винограда была доказана общая теорема [2] о геометрическом расположении и оценке роста решений возмущенных систем с малыми возмущениями, содержащая общий признак устойчивости показателей линейной системы. Его необходимость была доказана позднее В. М. Миллионщиковым [5] и его методом поворотов [6; см. также 3] (являющимся на протяжении последних двадцати пяти лет одним из основных методов теории показателей Ляпунова и систематически нами используемым во всех последующих пунктах, за исключением пп. 9 и 13) совместно Б. Ф. Быловым и Н. А. Изобовым [3]. Тем самым доказан следующий критерий: для устойчивости показателей системы (1) необходимо и достаточно, чтобы она преобразованием Ляпунова приводилась к блочно-треугольному виду $\dot{x}_k = P_k(t)x_k$ $(k=1,\dots,m,\ x_k \in R^{n_k})$, причем : 1) эти блоки интегрально разделены; 2) для каждого блока верхний $\Omega(A_k)$ и нижний $\bar{\omega}(A_k)$ центральные показатели совпадают. С доказательством этого критерия возникает задача о построении различных коэффициентных признаков устойчивости показателей. Один из них получен Н. А. Изобовым [3, 4], его обобщения даны М. И. Рахимбердиевым. Как известно, проблема достижимости верхнего и нижнего центральных показателей решена В. М. Миллионщиковым [6]. Их одновременная достижимость для общих двумерных и n-мерных диагональных систем установлена Т. Е. Зверевой, а для общих линейных систем — позднее К. А. Дибом.

Для точной нижней грани старших показателей $\lambda_n(A+Q)$ систем (1_{A+Q}) с малыми возмущениями — так называемого минимального показателя, используемого для исследования свойства стабилизации линейных систем малыми возмущениями, даны алгоритм вычисления в двумерном случае и достаточно точная оценка снизу в n-мерном (Н. А. Изобов, [4]). Это направление достаточно успешно развивает И. Н. Сергеев.

К этому пункту могут быть отнесены интересные результаты А. Г. Суркова по вычислению точных верхней и нижней граней каждого из показателей двумерных систем (1_A) с матрицами коэффициентов, принимающими в каждый момент времени значения из произвольного ограниченного множества постоянных вещественных матриц 2-го порядка, а также по построению спектрального множества характеристических показателей рассматриваемого семейства систем.

3^0. Взаимное расположение характеристических и иных показателей. [4]. Как известно, определяющую роль в исследовании экспоненциальной устойчивости и неустойчивости по линейному приближению (1_A) систем с возмущениями, принадлежащими трем основным классам (малых линейных, линейных экспоненциально убывающих и высшего порядка малости возмущений), играют младшие и старшие показатели систем (1_A) [2-4]: характеристические Ляпунова $\lambda_1(A)$ и $\lambda_n(A)$, центральные Р. Э. Винограда $\omega(A)$ и $\Omega(A)$, особые (генеральные) П. Боля $\omega_0(A)$ и $\Omega_0(A)$ и экспоненциальные автора $\Delta(A)$ и $\nabla(A)$. Полное описание их совместного распределения в двумерном случае дают соотношения (Н. А. Изобов, см. [4]): ранее известные $\omega_0(A) \le \omega(A) \le \Delta(A) \le \lambda_1(A) \le \lambda_2(A) \le \nabla(A) \le \Omega(A) \le \Omega_0(A)$; $\omega_0(A)+\Omega(A) \le \min\{\lambda_1(A)+\lambda_2(A),\ \Delta(A)+\nabla(A)\}$; $2\Delta(A) \le \omega(A)+\Omega(A)$; если $\lambda_1(A)+\lambda_2(A) = \omega_0(A)+\Omega\ (A) = \omega_0(A)+\Omega_0(A)$ то $\Delta(A) = \lambda_1(A)$.

4^0. Характеристические показатели линейных систем с гробмановскими возмущениями ([4]). Пусть $\sigma_0(A)$ и $\sigma_1(A)$ — соответственно угловая неправильность и коэффициент неправильности Гробмана системы (1_A), совокупность показателей которой будем интерпретировать точкой $\lambda(A)=(\lambda_1(A),\dots,\lambda_n(A))$ пространства R^n. В случае гробмановских возмущений $Q(\cdot)y$: $\lambda[Q] \equiv \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln\|Q(t)\| \le -\sigma_1(A)$, — получены следующие результаты (Н. А. Изобов, О. П. Степанович, [4]): 1) $\sigma_0(A)\ne\sigma_1(A) \Rightarrow \lambda(A+Q)=\lambda(A)$; 2) $\lambda(Q)<0 \Rightarrow \lambda_1(A) \le \lambda_k(A+Q) \le \lambda_n(A)$, $k=1,\dots,n$; 3) существует система (1_A) с характеристиками неправильности $\sigma_0(A)=\sigma_1(A)$ и гробмановское возмущение $Q(\cdot)y$ такие, что $\lambda(A+Q)\ne\lambda(A)$; 4) существуют системы (1_A) произвольного порядка $n\ge2$ с гробмановскими спектральными множествами $\Gamma_n(A)\equiv\{\lambda(A+Q)$: $0>\lambda[Q]\in \in (-\infty, -\sigma_1(A)]\}$ положительной меры Лебега.

5^0. Старший сигма-показатель линейной системы ([4]). Для старшего сигма-показателя $\nabla_\sigma(A)=\sup\lambda_n(A+Q)$, $Q\in K_\sigma\equiv\{Q(\cdot)$: $\lambda[Q]\le-\sigma<0$ }, системы (1_A) справедлив следующий алгоритм вычисления по ее матрице Коши (Н. А. Изобов): $\xi_1^{(\sigma)}=0$, $\xi_k^{(\sigma)} = \max\limits_{1\le i<k}\{\ln\|X_A(k,i)\|+\xi_i^{(\sigma)} - \sigma i\}$, $\nabla_\sigma(A) = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, k^{-1}\xi_k^{(\sigma)}$. С помощью этого алгоритма удается полностью описать множество функций, представимых старшими сигма-показателями (Е. А. Барабанов и Н. А. Изобов). Е. А. Барабановым и А. М. Нурматовым полностью описаны множества функций, представимых старшими сигма-показателями линейных уравнений и гамильтоновых систем. Полностью описана (Е. А. Барабанов) и зависимость, существующая между старшими сигма-показателями $\nabla_\sigma(P)$ треугольной системы (1_P) и $\nabla_\sigma(P_d)$ ее диагонального приближения (1_{P_d}).

Для исследования условной устойчивости используют величину $\overline{\Delta}_\sigma(A) \equiv \equiv \sup \lambda_1(A+Q)$, $Q\in K_\sigma$, которая, в отличие от старшего сигма-показателя, уже является, вообще говоря, разрывной аргумента $\sigma>0$, например, в точке, равной коэффициенту неправильности Перрона (Р. А. Прохорова).

6^0. Оценки показателей линейных систем с экспоненциально убывающими возмущениями ([4]). Первой такой нетривиальной оценкой является оценка Р. А. Прохоровой $\lambda_n(A+Q)-\lambda_n(A) \leq 4a[\sigma_1(A)-\sigma]/\sigma_1(A)$ для всех $Q\in K_\sigma$ и $\sigma\in(0,\sigma_1(A)]$, $a \geq \|A(t)\|$ при $t \geq 0$. В общем случае справедливы оценки (Н. А. Изобов): 1) $|\lambda_k(A+Q)-\lambda_k(A)| \leq 2a[\sigma_1(A)-\sigma]/[\sigma_1(A)-\sigma_0(A)]$, $k=1,..,n$, в некоторой окрестности $(\sigma_1(A)-\rho(A), \sigma_1(A)]$ точки $\sigma=\sigma_1(A)\neq\sigma_0(A)$; 2) $\max\{\lambda_1(A)-\lambda_1(A+Q), \lambda_n(A+Q)-\lambda_n(A)\} \leq 2a[\sigma_1(A)-\sigma]/\sigma_1(A)$ для всех $0 < \sigma \leq \sigma_1(A) = \sigma_0(A)$.

7^0. Нижние показатели Перрона [3, 4]. Для исследования устойчивости по Пуассону используются введенные О. Перроном нижние показатели $\pi[x]= \varliminf_{t\to\infty} t^{-1}\ln\|x(t)\|$ бесконечно продолжимых вправо решений $x(\cdot)$ дифференциальных систем. Для них справедливо общее с показателями Ляпунова свойство (Н. А. Изобов): почти все (в смысле меры Лебега) решения системы (1_A), начинающиеся на произвольном аффинном подпространстве l_k пространства R^n, имеют нижние показатели, равные точной верхней грани π_k множества нижних показателей таких решений. Принципиальное же отличие устанавливает факт существования (Н. А. Изобов) систем (1_A) с множествами — отрезками нижних показателей. Позднее полностью описаны (Е. А. Барабанов) множества нижних показателей линейных систем: множество $M \subset R$ является множеством нижних показателей некоторой системы (1_A) тогда и только тогда, когда оно: 1) ограничено; 2) является A-множеством (суслинским множеством); 3) содержит свою точную верхнюю грань. Е. А. Барабановым установлено также, что множество $\{x_0\in l_k: \pi[x(\cdot,x_0)]\}<\pi_k$ является $G_{\delta\sigma}$-множеством (и в случае $k=1$ имеет нулевую $\ln^{\upsilon}|\ln(\cdot)|$-меру Хаусдорфа при любом $\upsilon<-1$), а функция $\pi[x(\cdot,x_0)]$ — функцией точного второго класса Бэра.

8^0. Равномерные показатели. Нижний и верхний равномерные показатели (или, как их еще называют, генеральные или показатели Боля) ненулевого решения $x_A(t;\alpha)$ (где $\alpha= x_A(0;\alpha)$) системы (1_A) определяются соответственно равенствами: $\underline{\beta}_A(\alpha) \overset{def}{=} \varliminf_{t-\tau\to+\infty} \dfrac{1}{t-\tau}\ln\dfrac{\|x(t;\alpha)\|}{\|x(\tau;\alpha)\|}$ и $\overline{\beta}_A(\alpha) \overset{def}{=} \varlimsup_{t-\tau\to+\infty} \dfrac{1}{t-\tau}\ln\dfrac{\|x(t;\alpha)\|}{\|x(\tau;\alpha)\|}$. Описание классов функций, образованных верхними (нижними) показателями Боля, получено Е. А. Барабановым и А. В. Конюхом: функция $\beta: R_*^n \to R$ тогда и только тогда является верхним (нижним) показателем некоторой системы (1), когда она: 1) ограничена; 2) для любых $r\in R_*$ и $\alpha\in R_*^n$ выполняется равенство $\beta(r\alpha)=\beta(\alpha)$; 3) при всяком вещественном q множество Лебега $[\beta\geq q]$ функции β есть G_δ-множество (при всяком вещественном q множество Лебега $[\beta>q]$ функции β есть F_σ-множество).

Отсюда вытекает, что множество M тогда и только тогда является множеством значений верхнего или нижнего равномерного показателя какой-либо системы (1_A), когда оно — ограниченное суслинское множество вещественной прямой. Полное описание множеств значений, которые могут принимать вектор-функции $(\underline{\beta}_A, \overline{\beta}_A)$: $R_*^n\to R^2$, $A\in M_n$ получено Е. А. Барабановым.

9^0. **Множества Коппеля — Конти линейных систем** (см. [4]). В этом пункте рассматриваем введенные В. Коппелем в случае $p=1$ и Р. Конти в случае $p>1$ и достаточно полно ими исследованные множества всех тех линейных систем (1_A) с кусочно-непрерывными, вообще говоря, неограниченными на полуоси $t \geq 0$ коэффициентами, для матриц Коши $X_A(t,\tau)$ которых выполнено условие $\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \|X_A(t,\tau)\|^p d\tau \leq C_p(A) < +\infty$, $t \geq 0$, и обозначаемые: L^pS при $\alpha(t)=0$ и $\beta(t)=t$; M^pS при $\alpha(t)=t$ и $\beta(t)=+\infty$. Ими же установлено, что системы (1_A) из этих множеств определяют ограниченность всех или одного решений неоднородных линейных систем с соответствующими неоднородностями.

При исследовании свойств множеств L^pS и M^pS получены, в частности, следующие результаты (Н. А. Изобов и Р. А. Прохорова): 1) доказаны включения $L^qS \subset L^pS$ и $M^qS \subset M^pS$ для любых $q>p>0$; 2) установлено, что множества L^pS и M^pS открыты тогда и только тогда, когда $p\geq1$; 3) доказаны утверждения

$$Int \lim_{p\to q-0} L^pS = \lim_{p\to q-0} L^pS \Leftrightarrow 1 < q \leq +\infty,$$

$$Int \lim_{p\to q+0} L^pS = \lim_{p\to q+0} L^pS \Leftrightarrow 1 \leq q < +\infty.$$

10^0. **Частная задача Ляпунова об экспоненциальной устойчивости по линейному приближению** (см. [4]). Ею является следующая задача: по системе линейного приближения (1_A) получить необходимое и достаточное условие экспоненциальной устойчивости нулевого решения возмущенной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in R^n, \quad n \geq 2, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

с любым кусочно-непрерывным по $t \geq 0$ и непрерывным по y возмущением f из класса $F_1 \equiv \left\{f: \|f(t,y)\| \leq C_f \|y\|^{m_f}, C_f > 0, m_f > 1, \|y\| \leq \rho_f, t \geq 0\right\}$. Таким условием является отрицательность конструктивного показателя (Н. А. Изобов) $\Omega''_m(A)$ при всяком $m > 1$, вычисляемого по матрице Коши системы (1_A). Необходимым же и достаточным условием сильной экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2) в классе F_1 является отрицательность старшего экспоненциального показателя $\nabla_0(A)$ (Н. А. Изобов) системы (1_A); установлена также связь между экспоненциальной устойчивостью нулевого решения системы (2) с любым $f \in F_1$ и такой же устойчивостью системы (1_{A+Q}) с любой экспоненциально убывающей при $t \to +\infty$ матрицей возмущения $Q(\cdot)$.

11^0. **Общая задача Ляпунова об экспоненциальной устойчивости по линейному приближению** (см. [2 — 4]), имеет туже формулировку, что и частная, но с заменой класса F_1 на класс

$$F_m \equiv \{f: \|f(t,y)\| \leq C_f \|y\|^m, C_f > 0, \|y\| \leq \rho_f, t \geq 0\}$$

с фиксированным $m>1$. Для решения этой задачи были введены вычисляемые по матрице Коши m-показатели системы (1_A): оценочный Р.Э.Винограда $\Omega'_m(A)$ и конструктивный Н.А.Изобова $\Omega''_m(A)$, такие, что отрицательность первого является достаточным условием, а отрицательность второго — необходимым условием экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2) с любым $f \in F_m$. В некритическом случае $m > \inf\{m > 1 : \Omega''_m(A) < 0\}$ эти два показателя совпадают между собой и их отрицательность является необходимым и достаточным условием (Р.Э.Виноград и Н.А.Изобов) исследуемой устойчивости; сами они определяют точную асимптотику убывания при $t \to +\infty$ решений системы (2) из достаточно малой окрестности начала координат. Важные и тонкие обобщения этих результатов на случай более общих g-возмущений получены Н.Е.Большаковым. В общем же случае произвольного $m>1$ условие $\Omega'_m(A) < 0$ не является необходимым, а условие $\Omega''_m(A) < 0$ -достаточным (Н.А.Изобов) для экспоненциальной устойчивости решения системы (2) с любым $f \in F_m$. Последним автором также дано решение общей задачи Ляпунова по диагональному приближению, а также неулучшаемость известного условия Ляпунова-Массеры-Гробмана экспоненциальной устойчивости во всем множестве систем (1_A).

12^0. Центральные показатели высшего порядка и множества показателей систем с *m*-возмущениями (см. [4]). Решение общей задачи Ляпунова об экспоненциальной устойчивости по линейному приближению (1) в некритическом случае сводится к вычислению априорного m-показателя $\Omega_m(A)$ системы (1), совпадающего в рассматриваемом случае с ее оценочным $\Omega'_m(A)$ и конструктивным $\Omega''_m(A)$ m-показателями. В связи с этим возникает задача о выяснении всех тех свойств m-показателя $\Omega_m(A)$ как функции аргумента $m>1$, которыми он полностью определяется. Доказано (Н.А.Изобов), что функция $\varphi(m)<0$ на промежутке $(m_1,m_2]$, $m_1>1$, является m-показателем $\Omega_m(A)$ некоторой системы (1_A) тогда и только тогда, когда она является на этом промежутке огибающей некоторого семейства равномерно сходящихся степенных рядов (подробнее см. [4]). Из этого критерия, в частности, следует, что 1) верхнее левое $D^-\varphi(m)$ и нижнее правое $D_+\varphi(m)$ производные числа Дини функции - m-показателя удовлетворяют условию $D^-\varphi(m) \le D_+\varphi(m)$; 2) m-показатель является дифференцируемой функцией во всех своих точках выпуклости. Для определенных естественным образом множеств $\omega_0(A,f)$ нижних и $\Lambda_0(A,f)$ характеристических показателей нелинейной системы (2) с m-возмущением $f \in F_m$, $m>1$, доказано существование таких систем с этими множествами, состоящими из отрезка (Н.А.Изобов), счетного числа компонент связности(И.А.Волков, Н.А.Изобов), произвольного промежутка (И.А.Волков); полностью описано (Е.А.Барабанов, И.А.Волков) строение множества $\{\Lambda_0(A,f): f \in E_m\}$.

13^0. Уравнения Эмдена — Фаулера (см. [4]). Н. А. Изобовым и В. А. Рабцевичем выполнен цикл работ по исследованию бесконечно продолжимых вправо быстрорастущих и исчезающих кнезеровских решений уравнения Эмдена — Фаулера

$$u^{(n)} = p(t)|u|^{\lambda} \operatorname{sign} u, \quad n \ge 2, \ \lambda > 0, \ t \ge 0, \tag{2}$$

и его нетривиальных обобщений, связанных с решением 2-х достаточно известных задач И. Т. Кигурадзе и примыкающих к ним некоторых других задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богданов Ю.С.* Асимптотические характеристики решений линейных дифференциальных систем // Тр. 4-го Всес. мат. съезда. т.2 Л., Наука, 1964. С. 424-432.

2. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий* В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., Наука. 1966. С.207.
3. *Изобов Н.А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. т.12. М.,ВИНИТИ. 1974. С.71-146.
4. *Изобов Н.А.* Исследования в Белоруссии по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения, 1993. т.29, №12. С.2034-2055.
5. *Миллионщиков В.М.* Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. т.5,№10. С. 1775-1784.
6. *Миллионщиков В.М.* Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сиб. мат. ж. 1969. т.10, №1. С. 99-104.

SUMMARY

The paper is a review of the results of the study of asymptotical theory of common differencial systems carried out under the supervision of Yu.S.Bogdanov and Lyapunov's characteristic indices and their applications done by the author.

УДК 517.956

А.Л. Гладков

О стационарных решениях некоторых квазилинейных параболических уравнений

1. **Введение**. Рассматривается уравнение

$$u_t = (u^{\alpha})_{xx} + c_1(u^{\lambda})_x - c_2u^{\beta}, \qquad (1.1)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > \max(\alpha,\beta)$, c_1 и c_2 – некоторые положительные постоянные. Уравнение (1.1) возникает, например, в процессах распространения тепла в нелинейной среде и диффузии жидкостей и газов.

Задача Коши для частных случаев уравнения (1.1) исследовалась в разных работах. Так, классы существования и единственности обобщенного решения задачи Коши для уравнения (1.1) с произвольными большими единицы значениями показателей степеней рассматривались при условии $c_1 = 0$ в [1] - [4] и при условии $c_2 = 0$ – в [5] - [7]. В [8] этот же вопрос исследовался при $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ и $\alpha = \beta = \lambda$. Некоторые понятия, встречающиеся в данной работе, определены в [8].

Вопрос о существовании для (1.1) решения задачи Коши с растущей на бесконечности начальной функцией может быть решен с помощью построения суперрешений. При построении таких решений возникает необходимость рассмотрения стационарных решений $u(x)$ уравнения (1.1). После введения обозначения $v(x) = u^{\alpha}(x)$ для новой неизвестной функции получаем обыкновенное дифференциальное уравнение