Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

МАТЕМАТИКА

Геометрические фигуры
на плоскости и в пространстве

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2017

УДК 514.1(075.8)
ББК 22.151.0я73
М34

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 25.10.2016 г.

Составители: доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат педагогических наук **В.В. Устименко;** старший преподаватель кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова **Т.В. Титова**

Рецензент:
доцент кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук
Ж.В. Иванова

М34 **Математика. Геометрические фигуры на плоскости и в пространстве :** методические рекомендации / сост. : В.В. Устименко, Т.В. Титова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – 50 с.

Учебное издание подготовлено в соответствии с действующей программой по математике и предназначено для студентов дневной и заочной форм получения образования педагогического факультета. В данных методических рекомендациях предлагаются теоретические сведения и необходимый задачный материал для усвоения курса.

УДК 514.1(075.8)
ББК 22.151.0я73

ВВЕДЕНИЕ

Учебная дисциплина «Математика» – важнейшая часть системы подготовки к профессиональной деятельности студентов по специальности 1-01 02 01 «Начальное образование».

Знание основ математики обеспечивает формирование соответствующих компетенций, необходимый уровень подготовки к практической деятельности и является базой для дальнейшего самообразования будущего учителя.

Универсальность математических знаний и умений заключается в том, что они обеспечивают успешность решения многих профессиональных проблем и задач.

Целью учебной дисциплины «Математика» является формирование у студентов знаний и компетенций для описания и объяснения процессов, предметов и явлений окружающего мира, оценки их количественных и пространственных отношений.

Предложенные методические рекомендации должны оказать помощь студентам педагогического факультета в достижении этой цели. Рекомендации состоят из двух разделов: «Планиметрия», «Стереометрия». Каждый раздел состоит из теоретического материала, изложенного в соответствии с целями и задачами учебной дисциплины, и заданий для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов.

При создании методических рекомендаций были использованы следующие источники:

1) Азаров, А.И. Математика для старшеклассников. Методы решения планиметрических задач. 8–11 классы: пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих общ. сред. образование / А.И. Азаров, В.В. Казаков, Ю.Д. Чурбанов. – Минск: Аверсэв, 2005. – 336 с.

2) Крамор, В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии / В.С. Крамор. – М.: Просвещение, 1992. – 320 с.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Углы, треугольники

Углы с соответственно параллельными сторонами либо равны (рис. 1), либо в сумме составляют 180^o (рис. 2).

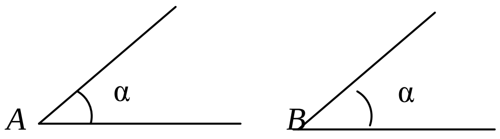

Рис. 1

Рис. 2

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами либо равны (рис.3), либо в сумме составляют 180^o (рис.4).

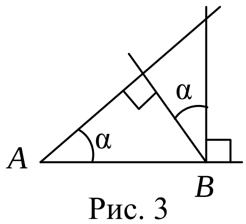

Рис. 3

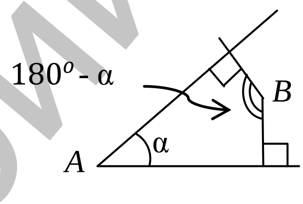

Рис. 4

Признаки равенства треугольников.

Два треугольника равны, если выполняется одно из условий:

1) две стороны и угол, заключённый между ними, одного треугольника равны двум сторонам и углу, заключённому между ними, другого треугольника;

2) сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника;

3) три стороны одного треугольника равны трём сторонам другого треугольника.

Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольник

Свойства средней линии треугольника:

1. Средняя линия параллельна одной из сторон треугольника и равна половине этой стороны (рис. 5).

2. Средняя линия делит пополам любой отрезок с концами в вершине треугольника и на противоположной стороне (рис. 5).

3. Три средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника, подобных данному с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ (рис. 6).

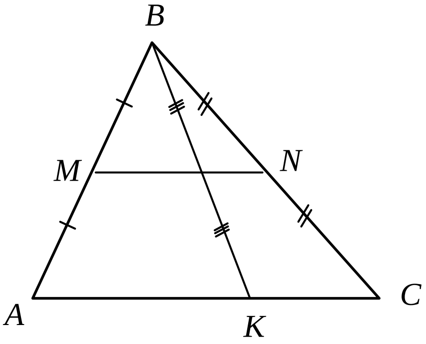

Рис. 5

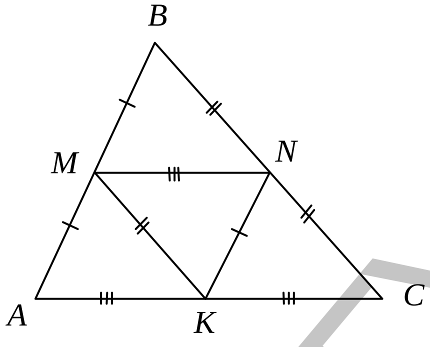

Рис. 6

Биссектриса внутреннего угла треугольника – это отрезок прямой, заключённый внутри треугольника и делящий данный угол пополам.

Свойства биссектрис:

1. Биссектриса – есть геометрическое место точек равноудалённых от сторон угла.
2. Во всяком треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке, которая лежит внутри треугольника. Эта точка является центром окружности, вписанной в треугольник (т.е. касающейся всех его сторон).
3. Биссектриса делит противолежащую сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
4. Длина биссектрисы треугольника может быть вычислена по формулам:

$l_a = \frac{2bc\cdot\cos\frac{a}{2}}{b+c}$, $l_n^2 = bc - b_1c_1$, где b_1 иc_1 – отрезки, прилежащие соответственно к сторонам b и с ,на которые биссектриса разделила сторону a.

5. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны.

Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой его противоположной стороны.

Свойства медиан:

1. Медиана – есть геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков прямых, заключённых внутри треугольника и параллельных той его стороне, к которой проведена медиана.
2. Три медианы пересекаются в одной точке, которая является центром тяжести треугольника. Эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.
3. Каждая медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника (одинаковой площади), а все медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников.
4. Длина медианы может быть вычислена (через стороны треугольника) по формуле: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону или её продолжение.

Свойства высот:

1. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке. Эта точка называется ортоцентром. Если треугольник остроугольный, то эта точка лежит внутри треугольника; если прямоугольный, то совпадает с вершиной прямого угла; если тупоугольный, то вне треугольника.

2. Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам: $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Взаимное расположение медианы, биссектрисы и высоты треугольника.

Биссектриса лежит внутри угла, образованного высотой и медианой, проведёнными из той же вершины. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.

Все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке O, являющейся центром окружности, описанной около треугольника (т.е. проходящей через все его вершины).

Если треугольник остроугольный, то центр вписанной окружности лежит внутри треугольника; если прямоугольный, то центр описанной окружности лежит в середине гипотенузы; если тупоугольный, то центр описанной окружности лежит вне треугольника.

Свойство серединного перпендикуляра и биссектрисы.

Продолжение биссектрисы $\angle B$ треугольника ABC пересекаются с серединным перпендикуляром к стороне AC в точке, описанной около треугольника.

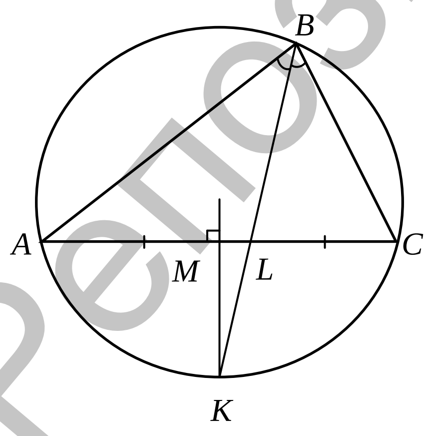

Рис. 7

Теорема синусов. Во всяком треугольнике ABC отношение любой стороны к синусу противоположного ей угла есть постоянная для данного треугольника величина, равная удвоенному радиусу окружности, описанной вокруг треугольника ABC,

т.е. $\frac{AB}{sin}\angle C = \frac{BC}{sin}\angle A = \frac{AC}{sin}\angle B = 2R$.

Теорема косинусов. Во всяком треугольнике ABC квадрат одной из сторон BC равен сумме квадратов двух других сторон ABи AC минус удвоенное произведение длин этих сторон на косинус угла между ними, т.е.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cos\angle A$.

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов.

Два треугольника называются подобным, если углы одного треугольника равны углам другого треугольника, а противолежащие равным углам стороны пропорциональны.

Признаки подобия.

1. По двум углам. Два треугольника подобны, если два угла одного треугольника равны дум углам другого треугольника.
2. По двум сторонам и углу. Два треугольника подобны, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключённые между этими сторонами, равны.
3. По трём сторонам. Два треугольника подобны, если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника.

Следствия.

1. В подобных треугольниках углы между любыми сходственными линейными элементами равны, а длины этих элементов относятся как коэффициент подобия k.
2. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

Площадь треугольника.

1. По стороне и проведённой к ней высоте:
$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$.
2. По двум сторонам и углу между ними:
$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot sin\alpha = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot sin\beta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sin\gamma$.
3. По трём сторонам (формула Герона):
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,
где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.
4. По полупериметру и радиусу вписанной окружности: $S = pr$.
5. По трём сторонам и радиусу описанной окружности: $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$.

Четырехугольники

Произвольный четырехугольник. Четырехугольник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от любой из прямой, содержащей сторону четырехугольника.

Если диагонали четырехугольника равны d_1 иd_2 и образуют угол α, то площадь четырехугольника: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\alpha$.

Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Стороны этого параллелограмма параллельны соответствующим диагоналям четырехугольника.

Средние линии (т.е. отрезки, соединяющие середины противоположных сторон) четырехугольника в точке своего пересечения делятся пополам.

Четырехугольник можно описать около окружности тогда и только тогда, когда сумма противоположных сторон равны. В этом случае его площадь равна: $S = p \cdot r$, где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, $r -$ радиус вписанной окружности.

Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма противолежащих углов равна 180°. В этом случае справедлива теорема Птолемея: сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей $(ac + bd = d_1 d_2)$, и площадь: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Справедливы следующие свойства и признаки параллелограмма: противоположные стороны попарно равны; противоположные стороны равны и параллельны; сумма углов, прилежащих к любой стороне равна 180°; диагонали точкой пересечения делятся пополам. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон $(d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2)$.

Площадь параллелограмма вычисляется:

1. Через сторону и опущенную на нее высоту: $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.
2. По двум сторонам и углу между ними: $S = ab \cdot \sin \alpha$.
3. Через диагонали и угол между ними: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \phi$.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Длины диагоналей прямоугольника равны между собой.

Квадратом называется прямоугольник, у которого длины всех сторон равны.

Ромбом называется параллелограмм, у которого длины всех сторон равны.

Диагонали ромба и квадрата взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов.

В ромб и квадрат можно вписать окружность, цент которой находится в точке пересечения диагоналей.

Трапеция – это выпуклых четырехугольник, у которого две противоположные стороны (основания) параллельны, а две других не параллельны.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям, равна их полусумме и делит любой отрезок с концами, лежащими на прямых, соединяющих основания пополам. Сумма углов, прилежащих к любой боковой стороне, равна 180°. Треугольники, образованные боковыми сторонами и отрезками диагоналей, равновелики. Трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая. В трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны.

Площадь трапеции вычисляется:

1. Через полусумму оснований и высоту: $S = \frac{a+b}{2}h$.
2. Через среднюю линию MN и высоту: $S = MN \cdot h$.
3. Через диагонали и угол между ними: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \cdot \sin\phi$.

Окружность

Окружность – геометрическое место точек плоскости, удаленных на одно и то же расстояние R от заданной точки O (ее центра).

Круг – часть плоскости, ограниченная окружностью. **Длина окружности:** $L = 2\pi R$. **Площадь круга:** $S = \pi R^2$.

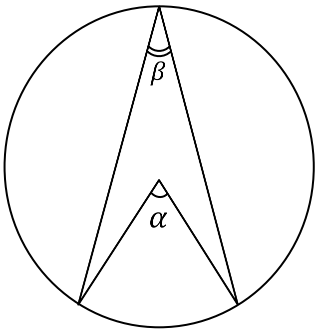

Рис. 8

Измерение углов, связанных с окружностью. Угол в один радиан равен центральному углу, опирающемуся на дугу, длина которой равна радиусу окружности. Центральный угол равен угловой величине дуги, на которую он опирается (рис. 8).

Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается (рис. 8). Вписанный угол равен половине центрального угла (рис. 8), опирающегося на ту же дугу, $\beta = \frac{1}{2}\alpha$. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 9). Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по одну сторону от этой хорды, равны (рис. 10).

Любая пара углов, опирающихся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по разные стороны хорды, составляет 180° (рис. 11), $\alpha + \beta = 180^{\circ}$

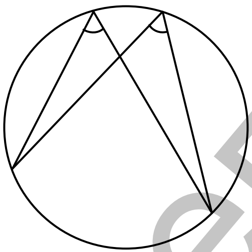
Рис. 9

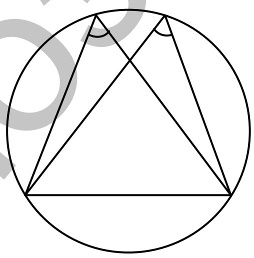
Рис. 10

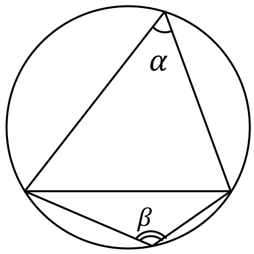

Рис. 11

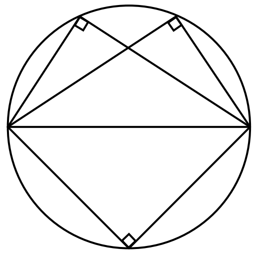
Рис. 12

Все вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые (рис. 12).

Угол между пересекающимися хордами окружности (рис. 13) измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается: $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Угол между секущими, пересекающимися вне окружности (рис. 14), измеряется полуразностью дуг, заключенных между секущими: $\gamma = \frac{\beta-\alpha}{2}$

Угол между касательной и секущей (рис. 15) измеряется полуразностью дуг, заключенных между касательной и секущей: $\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}$.

Угол между касательной и хордой (рис. 16) измеряется половинной дуги, заключенной между касательной и хордой: $\gamma = \frac{\alpha}{2}$.

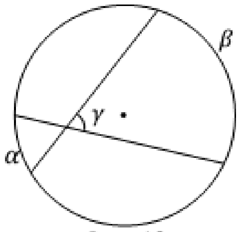

Рис. 13

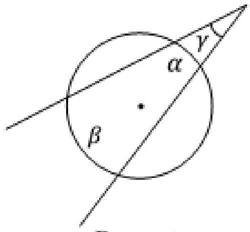

Рис. 14

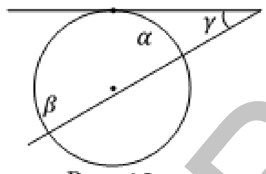

Рис. 15

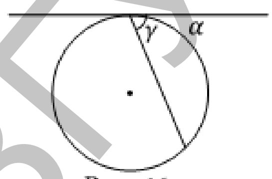

Рис. 16

Соотношение между длинами хорд, отрезков касательных и секущих. Если хорды AB иCD (рис. 17) пересекаются в точке M, то отрезки пересекающихся хорд связаны соотношением:

$$AM \cdot BM = CM \cdot DM.$$

Если из точки A к окружности проведены две касательные AB и AC (рис. 18), то отрезки касательных равны $AB = AC$.

Если из точки M к окружности проведены две секущие (рис. 19), пересекающие окружность соответственно в точках A, B и C, D, то произведения отрезков секущих равны: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Если из точки M к окружности проведены касательная MA и секущая, пересекающая окружность в точках B и C (рис. 20), то квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей: $AM^2 = MB \cdot MC$.

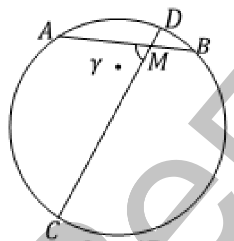

Рис. 17

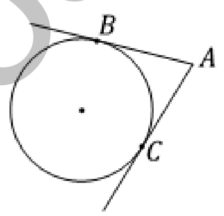

Рис. 18

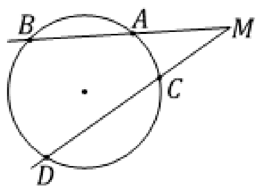

Рис. 19

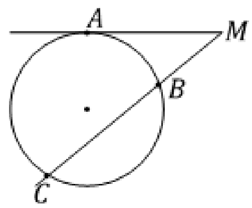

Рис. 20

Длина дуги: $l = \alpha \cdot r$ (угол в радианах).

Площади:

1. Площадь сектора: $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$ (угол α в радианах).
2. Площадь сегмента: $S = \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha)r^2$ (угол α в радианах).

Задачи для самостоятельного решения (планиметрия)

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 5. Найти расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной в треугольник окружности. (Ответ: $3\sqrt{2}$)

2. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружности. (Ответ: $\sqrt{5}$)

3. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6, а его проекция на гипотенузу равна 2. Найти гипотенузу и второй катет этого треугольника. (Ответ: 18; $12\sqrt{2}$)

4. В прямоугольном треугольнике отношение одного катета к гипотенузе равно 0,8, а другой катет равен 4. Найти площадь этого треугольника. (Ответ: $\frac{32}{3}$)

5. В прямоугольном треугольнике заданы площадь треугольника $S = 5$ см^2 и его периметр $P = 10$ см. Найти гипотенузу и высоту, проведенную из вершины прямого угла. (Ответ: 6 см; $\frac{5}{2}$ см)

6. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки, равные 24 и 54. Найти катеты этого треугольника. (Ответ: $18\sqrt{13}$;$12\sqrt{13}$)

7. В прямоугольном треугольнике с катетами, равными 6 и 8, найти радиус окружности, касающейся катетов, с центром, лежащих на гипотенузе. (Ответ: $\frac{24}{7}$)

8. Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 3 и 4. Найти площадь треугольника. (Ответ: 72)

9. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 20, а проекция другого катета на гипотенузу равна 9. Найти гипотенузу этого треугольника. (Ответ: 25)

10. В прямоугольном треугольнике разность катетов равна 4, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 3. Найти площадь треугольника. (Ответ: 12)

11. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 1, а гипотенуза этого треугольника равна 5. Найти катеты треугольника. (Ответ: 3; 4)

12. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена медиана CM. Найти $\sin\angle A$ и $\operatorname{tg}\angle A$, если $AC = 24$, $BC = 10$. (Ответ: $\sin\angle A = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\angle A = \frac{12}{13}$)

13. В прямоугольном треугольнике длина одного из катетов равна 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти периметр треугольника и его площадь. (Ответ: 60 см; 150 см^2)

14. Из вершины прямого угла треугольника проведена высота, делящая гипотенузу на отрезки длиной 9 см и 7 см. Найти периметр и площадь треугольника. (Ответ: $(28+4\sqrt{7})$ см; $24\sqrt{7}$ см^2)

15. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12. Найти радиус вписанной окружности. (Ответ: 10,4)

16. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, равна 24. Найти периметр треугольника, если его гипотенуза равна 50. (Ответ: 120)

17. Периметр прямоугольного треугольного равен 36 см, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 7,2 см. Найти длины сторон треугольника. (Ответ: 12 см; 9 см; 15 см)

18. Разность длин катетов прямоугольного треугольника равна d, а длина гипотенузы равна c. Найти площадь треугольника. (Ответ: $\frac{c^2-d^2}{4}$)

19. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{5}$, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 2. Найти площадь треугольника. (Ответ: 5)

20. Катет прямоугольного треугольника равен 6, а гипотенуза равна 10. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до центра описанной около него окружности. (Ответ: $\sqrt{5}$)

21. В прямоугольном треугольнике радиус вписанной в него окружности равен 2 см, а радиус описанной около него окружности равен 13 см. Найти периметр треугольника. (Ответ: 30 см)

22. Расстояние от центра описанной около прямоугольного треугольника окружности до катета равно 2,5 см, а радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 2 см. Найди длину гипотенузы. (Ответ: 13 см)

23. В прямоугольном треугольнике радиус вписанной в него окружности вчетверо меньше одного из катетов. Найти отношение катетов этого треугольника. (Ответ: $\frac{3}{4}$)

24. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен a, а противоположный ему угол равен 30°. Найти расстояние от центра вписанной окружности до вершины B. (Ответ: $a\sqrt{2}$)

25. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, относится к радиусу вписанной в него окружности как 5:2. Найти площадь треугольника, если один из катетов равен a. (Ответ: $\frac{3a^2}{8}$ или $\frac{2a^2}{3}$)

26. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки длиной 15 и 20. Найти площадь треугольника. (Ответ: 294)

27. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 4,

а основание – $4\sqrt{3}$. Найти углы этого треугольника и его высóты . (Ответ: $\angle A = \angle C = 30^\circ$; $\angle B = 120^\circ$; $BH = 2; AK = 2\sqrt{3}$)

28.В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 10, основание – 12. Найти радиус описанной около этого треугольника окружности. (Ответ: 6,25)

29.В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 10, а основание – 16. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне. (Ответ: $3\sqrt{17}$)

30.В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 20, а основание 5. Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне. (Ответ: 6)

31.В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 5, а основание 6. Найти длину высоты, проведенной к боковой стороне. (Ответ: 4,8)

32.В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на боковую сторону, равна $\sqrt{3}$, а угол при основании равен 30°. Найти длину боковой стороны. (Ответ: $AB = BC = 2$)

33.В равносторонний треугольник вписан квадрат со стороной $\sqrt{3}$. Найти длину стороны треугольника. (Ответ: $2 + \sqrt{3}$)

34.Длина основания равнобедренного треугольника равна 12. Радиус вписанного в этот треугольник круга равен 3. Найти площадь треугольника. (Ответ: 48)

35.В равнобедренном треугольника ABC $(AB = BC)$ проведены высоты AD и BE. Найти основание AC этого треугольника, если $BC = 9$ и $CD: EC = 2: 3$. (Ответ: 6)

36.В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана боковой стороны. Найти основание треугольника, если медиана равна 3. (Ответ: $\sqrt{10}$)

37.Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана боковой стороны – 5. Найти длины боковых сторон. (Ответ: 6)

38.В равнобедренном треугольнике основание равно 16, а боковая сторона 10. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами. (Ответ: $\frac{8}{3}$;$\frac{25}{3}$ и 5)

39.В равнобедренном треугольнике основание равно a, а боковая сторона – b. Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне. (Ответ: $\frac{ab}{a+b}\sqrt{\frac{a+2b}{b}}$)

40.В равнобедренный треугольник с основание a вписана окружность радиуса r. Найти периметр треугольника. (Ответ: $\frac{2a^3}{a^2-4r^2}$)

41.В равнобедренном треугольнике высота равна 8, а основание относится к боковой стороне как 6:5. Найти радиус вписанного круга. (Ответ: 3)

42.В треугольнике $ABCAB = 3, BC = 4,\ AC = 2,\ BD$ – высота, опущенная из вершины B. Найти длину отрезка CD. (Ответ: $\frac{11}{4}$)

43.Найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5, $\sqrt{7}, 2\sqrt{3}$. (Ответ: $\sqrt{7}$)

44.В треугольнике $ABC, BC = \sqrt{3},\ AC = 3,\ \angle B = 60^{\text{o}}$. Найти площадь треугольника ABC. (Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$)

45.В треугольнике заданы стороны $a = 1$ и два прилежащих к ней угла $\beta = 30^{\text{o}}\text{b}\gamma = 45^{\text{o}}$. Найти стороны bис. (Ответ: $\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}); \sqrt{3} - 1$)

46.В равнобедренном треугольнике $ABC\ (AB = BC)\ D$ – точка на основании. Радиус окружности, описанной около треугольника ABD, равен $\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника CBD. (Ответ: $\sqrt{3}$)

47.В остроугольном треугольнике ABC известны две стороны $AC = 8$, $BC = 6$ и площадь $S_{ABC} = 3\sqrt{15}$. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника. (Ответ: $\frac{16\sqrt{15}}{15}$)

48.В треугольнике $ABCAB = 4, BC = 5,\ AC = 6, AM = \frac{1}{2}AB,\ CK = \frac{3}{5}BC$. Найти длину отрезка MK. (Ответ: $\sqrt{7}$)

49.Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 1. Косинус среднего по величине угла этого треугольника равен $\frac{2}{3}$. Найти периметр этого треугольника. (Ответ: $3\sqrt{10}$)

50.В прямоугольнике $ABCD$ сторонаAD вдвое длиннее стороны AB. Внутри прямоугольника взята точка M так, что $AM = \sqrt{2},\ BM = 2$, $CM = 6$. Найти косинус угла ABM и длину стороны AB. (Ответ: $\cos \angle ABM = \frac{3\sqrt{10}}{10}; AB = \sqrt{10}$)

51.В треугольнике известны длины сторон: 4, 6, 8. Найти длину медианы, проведенной к большей стороне. (Ответ: $\sqrt{10}$)

52.В треугольнике с длиной сторон a, b, c вычислить длину высоты, проведенной к стороне c. (Ответ: $\frac{\sqrt{(4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2c}$)

53.В равнобедренном треугольнике $ABC\ \angle B = 110^{\text{o}}$. Внутри треугольника взята точка M так, что $\angle MAC = 30^{\text{o}}$, $\angle MCA = 25^{\text{o}}$. Найти угол BMC. (Ответ: 85^{o})

54.В трапеции $ABCD$ диагональ AC отсекает равносторонний треугольник ACD. Из точки E диагонали AC основание BC видно под углом 60^{o}. Доказать, что середины отрезков AE, BC и CD являются вершинами равностороннего треугольника.

55.В ΔABC $\angle C = 90^{\circ}$ и радиус описанной окружности равен $2\sqrt{3}$ см. На AD взята точка D так, что $AD:DB = 2:1$, $CB = 2\sqrt{2}$ см. Найти площадь треугольника ABC. (Ответ: $3\sqrt{2}$ см^2)

56.В ΔABC известно, что $AC:BC = 2:1, \angle C = \arccos\frac{3}{4}$. На стороне AC взята точка D так, что $CD:AD = 1:3$. Найти отношение радиусов окружностей, описанных около ΔABC иΔCBD. (Ответ: 2)

57.В ΔABC известны$\angle A = 45^0$, $\angle B = 15^{\circ}$. На продолжении AC за точку C взята точка M так, что $CM = 2AC$. Найти $\angle AMB$. (Ответ: 75°)

58. Отношение величин двух углов треугольника равно 2, разность дин противолежащих им сторон равна 2 см. Длина третьей стороны треугольника равна 5 см. Найти длины двух других сторон. (Ответ: 6 см и 4 см)

59. В прямоугольный треугольнике ABC вписана окружность с центром в точке O. Точка M середина гипотенузы AB. Найти тангенсы острых углов треугольника ABC, если $\angle AOM = 90^{\circ}$. (Ответ: $\frac{4}{3}; \frac{3}{4}$)

60. Стороны треугольника равны $a = 5, b = \sqrt{52}, c = \sqrt{73}$. Найти площадь треугольника. (Ответ: 18)

61. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 2, BC = 3, AC = 4$ точка $M -$ середина AB. Найти радиус окружности, описанной около треугольника AMC. (Ответ: $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{46}{15}}$)

62. В треугольнике $ABCAB = 13, BC = 14, AC = 15$. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей. (Ответ: $\frac{\sqrt{65}}{8}$)

63. В треугольнике известны две стороны $a = 2, b = 3$ и медиана, проведённая к третьей стороне $m_c = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей. (Ответ: $R = \frac{8\sqrt{15}}{15}; r = \frac{\sqrt{15}}{6}$)

64. В треугольнике $ABCBC = 3, AC = 4$ и биссектриса $BM = \frac{3\sqrt{6}}{5}$. Найти сторону AB. (Ответ: 2).

65. В треугольнике $ABC: AB = 9, BC = 15, AC = 8$. Из основания биссектрисы BK точки Kпроведена прямая, параллельная стороне AB, которая пересекает сторону BC в точке M. Найти периметр треугольника BKM. (Ответ: $2\sqrt{30} + 11\frac{1}{4}$)

66. Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки длиной 9 и 6. Периметр треугольника равен 45. Найти стороны треугольника. (Ответ: 18;12;15)

67. В треугольнике ABC известно, что угол A в два раза больше угла C, сторона BC на 2 больше стороны $AB, AC = 5$. Найти стороны AB и BC. (Ответ: $AB = 4, BC = 6$)

68. В треугольнике ABC к стороне BC проведена медиана AD. Найти длину стороны BC, если$\angle A = 60^{\circ}$, $AD = 2\sqrt{11}$ и полупериметр $p = 10$. (Ответ: $BC = 4$)

69. В треугольнике ABC $AB = 3, \angle A = 30^{0}$. Найти две другие стороны, если известно, что их сумма равна $2\sqrt{3}$. (Ответ: $AC = BC = \sqrt{3}$)

70. В ΔABC заданы сторон $BC = 2, AC = 3$ и радиус описанной окружности $R = 5$. Найти третью сторону треугольника. (Ответ: $c = \frac{12\sqrt{6} \pm 2\sqrt{91}}{5}$)

71. В ΔABC даны стороны a и b и медиана m_a. Найти c. (Ответ: $\sqrt{\frac{a^2+4m_a^2-2b^2}{2}}$)

72. CD – высота ΔABC. Найти зависимость между углами A и B этого треугольника, если известно, что $CD^2 = AD \cdot DB$. (Ответ: $A + B = 90^{\circ}$ или$|A - B| = 90^{\circ}$)

73. В треугольнике ABC $\angle A = 30^{o}, \angle B = 50^{o}$. Доказать, что для сторон этого треугольника выполняется соотношение $c^2 = b(a + b)$.

74. Основание треугольника равно 4, а медиана, проведенная к основанию, равна $\sqrt{6} - \sqrt{2}$. Один из углов при основании равен 15°. Найти острый угол между медианой и основанием. (Ответ: 45^{0})

75.В ΔABC медианыAF и BD пересекаются в точке O под углом $\angle = 60^{\circ}$ и $AD{:}\,BO = \sqrt{3}{:}\,2$. Найти отношение радиуса окружности, описанной около ΔABO к OD. (Ответ: $\frac{1}{2}$)

76. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен $2\sqrt{7}$. Цента окружности удален от двух вершин на $2\sqrt{42}$ и $2\sqrt{15}$. Найти расстояние от центра окружности до третьей вершины треугольника. (Ответ: $\sqrt{105}$)

77. Стороны треугольника относятся как 7:11:6, а его периметр равен 48 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей. (Ответ: $r = \sqrt{10}$ см; $R = \frac{77\sqrt{10}}{20}$ см)

78. В ΔABC $\angle B = 60^{0}$, периметр треугольника равен $(4 + \sqrt{7})$ см и $AC = \sqrt{7}$ см. Найти радиусы описанной и вписанной окружностей. (Ответ: $R = \sqrt{\frac{7}{3}}$ см; $r = 3\left(\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{7}+3}{\sqrt{19}}\right)$ см)

79. Найти длину стороны квадрата, вписанного в равнобедренный треугольник с основанием 6 и боковой стороной 5. (Ответ: 2,4)

80. В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ диагоналиAC и BD пересекаются в точке O, $AO{:}\,OC = 3$, $AD = 18$. Найти сторону BC. (Ответ: 6)

81. В треугольнике ABC со сторонами $a = 14, b = 15, c = 13$ найти расстояние от точки пересечения высот до вершины A. (Ответ: $\frac{33}{4}$)

82. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12, а боковой стороны -18. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Вычислить длину отрезка, концы которого совпадают с основанием высот. (Ответ: $\frac{28}{3}$)

83. Из вершины A и C остроугольного треугольника ABC проведены высоты AM и CN. Вычислить длину стороны AC, если периметр треугольника ABC равен 15, периметр треугольника BMN равен 9, а радиус окружности, описанной около треугольника BMN, равен 1,8. (Ответ: $\frac{24}{5}$)

84. В треугольник со сторонами 10, 17 и 21 вписан прямоугольник с периметром 24 так, что одна из его сторон лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника. (Ответ: $5\frac{7}{13}$; $6\frac{6}{13}$)

85. В треугольник вписан ромб со стороной m так, что один из углов у них общий, а противоположная вершина ромба лежит на стороне треугольника и делит эту сторону на отрезки длиной p и q. Найти стороны треугольника.

(Ответ: $p+q$; $\frac{m(p+q)}{p}$; $\frac{m(p+q)}{q}$)

86. На большем катете прямоугольного треугольника, как на диаметре, построена окружность. Определить радиус этой окружности, если меньший катет равен 7,5, а длина хорды, соединяющий вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы и окружности, равна 6. (Ответ: 5)

87. В треугольнике ABC величина угла A вдвое больше величины угла B, а длины сторон противолежащих этим углам, равны соответственное 12 и 8. Найти длину третьей стороны. (Ответ: 10)

88. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной m и n, считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найти длины отрезков касательных, заключенных между сторонами сторон треугольника. (Ответ: $\frac{2mn}{m+2n}$; $\frac{n(m+n)}{m+2n}$)

89. В треугольник с периметром 20 вписана окружность. Отрезок касательной, проведённой к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, равен 2,4. Найти основание треугольника. (Ответ: 4 или 6)

90. В треугольнике стороны равны 3, 5 ,$\sqrt{52}$. Найти площадь треугольника. (Ответ: 6)

91. В треугольнике $ABC\ \angle A = 60^{\circ}, \angle C = 45^{\circ}, AC = 4$. Найти площадь треугольника ABC. (Ответ: $12 - 4\sqrt{3}$)

92. В треугольнике заданы стороны $a = 4, b = 4\sqrt{3}$ и угол $\alpha = 30^{\circ}$. Найти разность между максимальной и минимальной возможными площадями таких треугольников. (Ответ: $4\sqrt{3}$)

93. В равностороннем треугольнике радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найти площадь треугольника. (Ответ: $9\sqrt{3}$)

94. Радиус вписанной в треугольник окружности равен 2, а одна из точек касания делит сторону треугольника на отрезки 3 и 4, Найти площадь треугольника. (Ответ: 21)

95. Найти площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание высота, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12. (Ответ: 75)

96. Расстояние от точек пересечения медиан ΔABC до стороны AB равно 1. Найти площадь ΔABC, если $AB = 8$. (Ответ: 12)

97. В трапеции $ABCD(AD \parallel BC)$ диагоналиAB и CD пересекаются в точке O. Отношение площадей треугольников BCD и BOC равно 3. Найти отношение оснований трапеции. (Ответ: $\frac{1}{2}$)

98. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как 3:1. Найти отношение площадей треугольников ACD и BOC, где O – точка пересечения диагоналей трапеции. (Ответ: 12)

99. В ΔABC на медиане BD взята точка K так, что $DK{:}KB = 3{:}2$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке E. Найти отношение площадей треугольников ABD и BKE. (Ответ: 10)

100. В ΔABC $\angle A = 60^{\circ}$ и радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$, а ее центр удалён от вершины B на $2\sqrt{7}$. Найти площадь этого треугольника и радиус описанной окружности. (Ответ: $S = 10\sqrt{3}$; $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$)

101. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BM и CN так, что $AM{:}CN = 2{:}3$. Найти отношение площадей треугольников BMN иABC, если $\angle BAC = \alpha$. (Ответ: $\frac{2}{5} - \cos^2 \alpha$)

102. В трапеции $ABCD$ основания$AD = a$, $BC = b$. Средняя линия $MN(M \in AB, N \in BD)$ трапеции пересекаются с диагональю AC в точке O. Найти отношение площадей треугольников AMO и CON. (Ответ: $\frac{b}{a}$)

103. Окружность радиуса 1 проходит через вершину прямого угла прямоугольного треугольника, касается его гипотенузы, причем точка касания разбивает гипотенузу на отрезки длины $\sqrt{2}$ и$2\sqrt{2}$. Найти площадь этого треугольника. (Ответ: $2\sqrt{2}$ или $3\sqrt{2}$)

104. Найти площадь треугольника, если основание равно a, и углы при основании $-\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$. (Ответ: $\frac{a^2(\sqrt{3}-1)}{4}$)

105. Дан ΔABC, в котором $\angle ABC = 30^{\circ}, AB = 4, BC = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определить площадь ΔABD. (Ответ: $\frac{12}{5}$)

106. Площадь ΔABC равна 16 см^2. Найти длину стороны AB, если $AC = 5$ см, $BC = 8$ см. (Ответ: $\sqrt{137}$ см или $\sqrt{41}$ см)

107. В ΔABC медианаAD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Площадь ΔDEF равна 5. Найти площадь ΔABC. (Ответ: 60)

108. В треугольнике две стороны соответственно 5 и 6, а высота, проведённая к третьей стороне, равна 4. Найти сумму максимальной и минимальной возможных площадей таких треугольников. (Ответ: $8\sqrt{5}$)

109. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что $AD:DC = 1:5$. В каком отношении точка N делит сторону BC, если отрезок DN делит площадь ΔABC на две равные части? (Ответ: 2:3)

110. Высота, основание и сумма боковых сторон треугольника равны соответственно 12, 14 и 28. Найти боковые стороны. (Ответ: 13; 15)

111. В треугольнике ABC точкиKи L лежат соответственно на сторонах AB и BC, а точка $O -$ точка пересечения отрезков AL и CK. Известно, что площади треугольников AOK и COL равны соответственно 1 и 8, а площадь треугольника AOC равна площади четырёхугольника $BKOL$. Найти площадь ΔABC. (Ответ: 21)

112. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CF. Найти отношение площадей треугольников ABC иAFD, если $AB = 21$, $AC = 28, CB = 20$. (Ответ: 4:1)

113. В треугольнике ABC медианаAD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найти площадь треугольника ABC. (Ответ: 60)

114. Дан треугольник ABC, площадь которого равна 1.На его медианах AK, BL, CM взяты соответственно точки P, Q, R так, что $AP = PK$, $BQ = \frac{1}{2}QL, CR = \frac{5}{4}RM$. Найти площадь треугольника PQR. (Ответ: $\frac{1}{12}$)

115. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$, площадь которого равна 1, взяты точки: K на AB, L на BC, M на CD, N на DA. При этом $AK:KB = 2:1; BL:LC = 1:3; CM:MD = 1:1; DN:NA = 1:5$. Найти площадь шестиугольника $AKLCMN$. (Ответ: $\frac{11}{12}$)

116. В прямоугольном треугольнике расстояние от точки пересечения медиан треугольника до катетов равны 3 и 4. Найти расстояние от точки пересечения медиан до гипотенузы. (Ответ: $\frac{12}{5}$)

117. Точка B_1 лежит на стороне AC треугольника ABC, причём $AB_1 = 3, B_1C = 5$. Точка O, лежащая на отрезке BB_1, такова, что площадь треугольника BOC равна 25. Найти площадь треугольника AOB. (Ответ: 15)

118. Пусть $AD -$ медиана треугольника ABC. В каком отношении отрезок AD делится прямой, параллельной стороне AB и отсекающей от треугольника ADC и ABD треугольники одинаковой площади?

(Ответ: $\sqrt{2}: 1$)

119. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Биссектрисы углов AD иD пересекаются в точке E, лежащей на стороне BC. Найти отношение площадей треугольников ABE иCDE, если $BC = 3CD$. (Ответ: 2)

120. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ площадью 25 см^2 проведены диагонали. Известно, что площадь треугольника ACD вдвое больше площади треугольника ADB, а площадь треугольника CDB втрое больше площади треугольника CDA. Найти площадь треугольников ACB, ABD, CBD и CDA. (Ответ: 20 см^2, 10 см^2, 15 см^2, 5 см^2)

121. В параллелограмме $ABCD$ точкиP и Q делят диагональ BD на три равные части. Точки M и$N -$ середины сторон DC и CB. Найти отношение площади четырехугольника $PQMN$ к площади параллелограмма. (Ответ: $\frac{5}{24}$)

122. Площадь треугольника равна S. Прямая, параллельная основанию треугольника, отсекает от него треугольник, площадь которого равна Q. Определить площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами отсеченного треугольника, а четвертая лежит на основании исходного треугольника. (Ответ: $\sqrt{SQ}$)

123. В ΔABC проведены три отрезка AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в точке O. Оказалось, что $S_{AOB_1} = S_{COA_1} = S_{BOC_1} = S$. Найти площадь ΔABC. (Ответ: $6S$)

124. В треугольнике ABC $AB = 4, BC = 5, AC = 6$. Найти длину медианы AM. (Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{2}$)

125. Найти площадь треугольника по двум сторонам, равным 6 и 8, и медиане, равной 5, проведенной к третьей стороне. (Ответ: 24)

126. В треугольнике ABC $AB = \sqrt{41}, BC = 13, BH -$ высота, опущенная на сторону $AC, BH = 5$. Найти длину медианы AM. (Ответ: $\frac{5\sqrt{17}}{2}$)

127. Медианы треугольника равны 3, 4 и 5. Найти площадь треугольника. (Ответ: 8)

128. В треугольнике ABC $AB = 8\sqrt{3}; BC = 24,\ \angle ABC = 30^{\circ}$. Найти медиану AM. (Ответ: $4\sqrt{3}$)

129. Основание треугольника равно 14, а медианы, проведённые к боковым сторонам, $- 3\sqrt{7}$ и$6\sqrt{7}$. Найти боковые стороны.

(Ответ: $4\sqrt{7}; 2\sqrt{91}$)

130. Основание треугольника равно 26. Медианы боковых сторон равны 30 и 39. Найти площадь треугольника. (Ответ: 720)

131. В остроугольном треугольнике ABC длины медиан BM, CN и высоты AH равны соответственно 4, 5 и 6. Найти площадь треугольника. (Ответ: $2(\sqrt{7} + 4)$)

132. На медиане BD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) взята точка K такая, что $KD = 2BK$. Прямая AK пересекает сторону BC в

точке M. Найти площадь $\Delta\, AMC$, если площадь треугольника ΔABC равна 20. (Ответ: 16)

133. Две стороны треугольника равны соответственно 6 и 8, а медианы, проведенные к этим сторонам, перпендикулярны. Найти площадь треугольника. (Ответ: $4\sqrt{11}$)

134. Одна сторона треугольника равна a, а другая $-b$. Найти третью сторону, если она равна медиане, к ней проведенной. (Ответ: $\sqrt{\frac{2}{5}(a^2+b^2)}$)

135. В ΔABC медианыAB и CE взаимно перпендикулярны, $AB=c, BC=a$. Найти AC. (Ответ: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$)

136. Найти отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон. (Ответ: $\frac{3}{4}$)

137. В прямоугольной трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC, AB \perp AD)$ диагонали пересекаются в точке O, $M -$ середина AB. Найти длину отрезка OM, если $AB=4, BC=1, CD=\sqrt{13}$. (Ответ: $\sqrt{34}$)

138. Площадь треугольника ABC равна$15\sqrt{3}$ см^2. Угол BAC равен 120°. Величина угла ABC больше угла ACB. Расстояние от вершины A до центра окружности вписанной в ΔABC, равно 2 см. Найти длину медианы, проведенной из вершины B. (Ответ: $\sqrt{51}$ см)

139. В треугольнике ABC $AB=3, BC=5, AC=6$. Найти длину биссектрисы наименьшего угла треугольника. (Ответ: $\frac{4\sqrt{210}}{11}$)

140. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найти отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла треугольника разделена центром вписанной окружности. (Ответ: $\frac{11}{7}$)

141. В треугольнике ABC $AB=3, BC=4$ и $\angle B = \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найти длину биссектрисы угла A. (Ответ: $\frac{6\sqrt{30}}{7}$или$\frac{6\sqrt{6}}{7}$)

142. В треугольнике ABC $AB=1, BC=\sqrt{3}, \angle A = 60^0$. Найти длину биссектрисы угла C. (Ответ: $3\sqrt{2}-\sqrt{6}$)

143. В прямоугольном ΔABC $\angle C = 90^0$, катеты $AC=6, BC=8$. Найти длину биссектрисы, проведенной из вершины прямого угла.

(Ответ: $\frac{24\sqrt{2}}{7}$)

144. В ΔABC $AC=2\sqrt{3}, BC=8, \angle ACB = 60^0$. Найти длину биссектрисы CL. (Ответ: $\frac{24(4-\sqrt{3})}{13}$)

145. Дан треугольник ABC, в котором $AC=5, AB=6, BC=7$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Определить площадь треугольника ADC. (Ответ: $\frac{5}{2}\sqrt{6}$)

146. В ΔABC со стронами $AB = 8, BC = 14, AC = 18$ проведена медиана BD, на которой выбрана точка E так, что $BE : ED = 8 : 9$. Найти расстояние от точки E до вершины A. (Ответ:$\frac{24}{17}\sqrt{30}$)

147. В ΔKLMдлина стороны KL равна 27, длина биссектрисы KN равна 24, а длина отрезка MN равна 8. Найти периметр ΔKLM. (Ответ: 68)

148. В ΔABC биссектриса AM перпендикулярна медиане BL и $AM = BL = 4$. Найти стороны треугольника.

(Ответ:$AB = \sqrt{13}; AC = 2\sqrt{13}; BC = 3\sqrt{5}$)

149. Найти площадь треугольника, если две стороны равны 35 см и 14 см, а биссектриса угла между ними − 12 см. (Ответ: 235,2 см^2)

150. В ΔABC биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Найти радиус окружности, описанной около ΔABD, если $BC = 12$, $AB = 6$ и $\angle ABC = 120^0$. (Ответ: $\frac{2\sqrt{21}}{3}$)

151. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, находится на расстоянии $2\sqrt{5}$ и$2\sqrt{10}$ от концов гипотенузы. Найти катеты этого треугольника. (Ответ: 6 и 8)

152. Вычислить биссектрису угла A треугольника ABC со сторонами $BC = 18, AC = 15, AB = 12$. (Ответ: 10)

В ΔABC биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке K. Известно, что $BC = 2, KC = 1, BK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Найти площадь ΔABC. (Ответ: $\frac{15\sqrt{7}}{16}$)

153. В прямоугольном ΔABC биссектриса CE прямого угла C делится центром вписанной окружности в отношении $CO : DE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Найти остные углы треугольника. (Ответ: 15^0 и 75^0)

154. В ΔABC биссектриса угла при вершине A пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла при вершине B пересекает AC в точке P, причём $AM = BP$. Биссектрисы пересекаются в точке O и$BO = (1 + \sqrt{3})OP$. Найти площадь треугольника ABC, если $BC = 1$. (Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$)

155. В трапеции $ABCD$ биссектрисы внешних углов при вершинах A и B, C и D пересекаются соответственно в точка M и K. Найти периметр трапеции, если $MK = a$. (Ответ: $2a$)

156. Стороны треугольника равны 2, 3 и 4. Найти длину биссектрисы, проведённой к стороне длиной 3. (Ответ: $\sqrt{6}$)

157. В ΔABC $AB = 10, AC = 26$. Угол между биссектрисами AK и CN равен 45^0. Найти площадь ΔABC. (Ответ: 120)

158. Найти углы треугольника, если известно, что две его стороны видны из центра вписанной окружности под углами 102^0 и 120^0.

(Ответ: 24^0, 72^0, 84^0)

159. В треугольнике $ABC\ \angle B = 60^0$, радиус окружности описанной около ΔABC, равен 2. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и C и центр окружности, вписанной в ΔABC. (Ответ: 2)

160. В прямоугольном ΔABC гипотенуза равна 35, а биссектриса, проведённая к гипотенузе, равна $12\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника. (Ответ: 294)

161. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15. Найти наименьшую высоту треугольника. (Ответ: 11,2)

162. Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 5, и основанием, равным 8. Найти высоту, проведенную из вершины угла при основании. (Ответ: 4,8)

163. В треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Найти AB, если $BD = 18, BC = 30, AE = 20$. (Ответ: 25)

164. В равнобедренном ΔABC $(AB = BC)$ точка$O -$ точка пересечения высот. Найти ΔABC, если $OB = AC$. (Ответ: 45^0)

165. В остроугольном ΔABC из вершин A и C на стороны BC и AB опущены высоты AP и CQ. Найти длину стороны AC, если известно, что периметр ΔABC равен 15, периметр ΔBPQ равен 9, а радиус окружности, описанной около ΔBPQ, равен 1,8. (Ответ: $\frac{24}{5}$)

166. В треугольнике ABC уголA равен 60^0, BH_1 и $CH_2 -$ высоты, точка $M -$ середина стороны BC. Найти периметр ΔMH_1H_2 если$H_1H_2 = 4$. (Ответ: 12)

167. В $\Delta ABC\ AB = 3$ и высота CD, опущенная на сторону AB, равна 3. Основание D высоты CD лежит на стороне AB и $AD = BC$. Найти длину стороны AC. (Ответ: $3\sqrt{2}$)

168. В остроугольном треугольнике ABC на стороны AB и BC опущены высоты AP и CQ. Сторона AC равна 6. Вычислить площадь четырехугольника $AQPC$, если известно, что площадь ΔBPQ равна 1, а радиус окружности, описанной около ΔABC, равен $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. (Ответ: 8)

169. В остроугольном ΔABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равны $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около ΔABC. (Ответ: $\frac{9}{2}$)

170. В остроугольном $\Delta ABC\ AA_1, BB_1, CC_1 -$ высоты. Доказать, что AA_1, BB_1, CC_1 являются биссектрисами углов $\Delta A_1B_1C_1$.

171. Найти сумму длин высот ΔABC, в котором радиус описанной около его окружности равен R, а сумма трех попарных произведений длин его сторон равна $5R^2$. (Ответ: $\frac{5}{2}R$)

172. Высота прямоугольного ΔABC, опущенная на гипотенузу AB, равна $h, D -$ основание высоты, M и $N -$ середины отрезков AD и DB. Найти расстояние от вершины C до точки пересечения высот ΔCMN. (Ответ: $\frac{3}{4}h$)

173. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найти площадь треугольника. (Ответ: 195)

174. В остроугольном ΔABC проведены высоты CH и AH_1. Известно, что $AC = 2$ и площадь круга, описанного около треугольника HBH_1, равна $\frac{\pi}{3}$. Найти$\angle HCB$. (Ответ: $\frac{\pi}{6}$)

175. В треугольнике основание равно 6 см, а высоты, опущенные на боковые стороны, -2см и $2\sqrt{3}$ см. Найти боковые стороны треугольника. (Ответ: $\sqrt{6}$ см и $3\sqrt{2}$ см)

176. В параллелограмме заданы диагонали $d_1 = \sqrt{13}$ и$d_2 = \sqrt{37}$ и острый угол $\alpha = 60^0$. Найти стороны. (Ответ: 3 и 4)

177. Найти площадь параллелограмма со сторонами 3 и 5 и углом между диагоналями, равным 60^0. (Ответ: $8\sqrt{3}$)

178. В прямоугольнике $ABCD$ на его сторонах взяты точки M, N, P, K так, что $MB{:}\,AM = CN{:}\,NB = DP{:}\,PC = AK{:}\,KD = 2{:}\,1$. Найти площадь четырехугольника $MNPK$, если $S_{ABCD} = 18$. (Ответ: 10)

179. В ромбе $ABCD$ сторона равна $a, \angle B = 120^0$, BH и $BK -$ высоты, проведенные к сторонам AD и DC. Найти периметр ΔHBK. (Ответ: $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$)

180. Сторона ромба $ABCD$ равна$6, \angle BAD = 60^0$. На стороне BC взята точка E так, что $CE = 2$. Найти расстояние от точки E до центра ромба. (Ответ: $\sqrt{13}$)

181. Определить острый угол ромба, в котором сторона есть среднее геометрическое диагоналей. (Ответ: 30^0)

182. В параллелограмме $ABCD$ точкаM лежит на стороне BC так, что $BM = MC$, точка N лежит на стороне AD так что, что $AN = 2ND$. Прямые AC иMN пересекаются в точке K. Найти отношение $AK{:}\,KC$. (Ответ: $\frac{4}{3}$)

183. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 и 5 и диагональю, равной 6. Найти стороны треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма соответственно параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника. (Ответ: 9; 9; $6\sqrt{2}$)

184. Дан параллелограмм $ABCD$. Диагональ AC на 2 больше диагонали BD. Биссектриса BE угла ABD делит сторону AD на отрезки $AE = 6{,}8$, $ED = 10{,}2$. Найти диагонали параллелограмма. (Ответ: 21; 23)

185. На гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами, равными 3 и 4, построен квадрат. Найти расстояние от вершины прямого угла до центра квадрата. (Ответ: $\frac{7\sqrt{2}}{2}$)

186. Найти площадь четырехугольника, образованного пересечением биссектрис прямых углов прямоугольника, стороны которого равны a и b. (Ответ: $\frac{(a-b)^2}{2}$)

187. В квадрате $ABCD$ заданы точки M, N, P, K – середины сторон AB, BC, CD, AD. Какую часть площади квадрата составляет площадь четырехугольника, образованного пересечением прямых AP, CM, BK, DN? (Ответ: $\frac{1}{5}$)

188. В квадрате $ABCD$ точкаB соединена с серединами сторон AD и CD соответственно точками M и N. Найти какую часть площади квадрата составляет площадь треугольника, ограниченного отрезками BM и BN и диагональю AC. (Ответ: $\frac{1}{6}$)

189. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка K так, что треугольник CKD – равносторонний. Известно, что расстояния от точки K до прямых AD, AB и BC равны соответственно 3, 6 и 5. Найти периметр параллелограмма. (Ответ: $\frac{49\sqrt{3}}{2}$)

190. В ромб вписан круг. Каждая сторона ромба точкой касания делится на отрезки, длины которых a и b. Найти площадь круга. (Ответ: πab)

191. Вершины квадрата лежат на границе второго квадрата. Найти отношения длин отрезков, на которые эти вершины разбивают стороны второго квадрата, если известно, что отношение площадей квадратов равно $\frac{5}{8}$. (Ответ: 3)

192. Найти площадь параллелограмма, если его диагонали равны 3 и 5, а острый угол параллелограмма – 60°. (Ответ: $4\sqrt{3}$)

193. Длины меньшей диагонали, стороны и большей диагонали ромба составляют геометрическую прогрессию. Найти углы ромба. (Ответ: $2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3});\pi-2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})$)

194. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса тупого угла B пересекает его сторону AD в точке F. Найти периметр параллелограмма, если $AB = 12, AF{:}FD = 4{:}3$. (Ответ: 66)

195. В ромбе $ABCD$ угол при вершине A равен 60°. Точка N делит сторону AB в отношении $AN{:}NB = 2{:}1$. Найти тангенс угла DNC. (Ответ:$\frac{9\sqrt{3}}{11}$)

196. Периметр параллелограмма равен 90, а острый угол – 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол в отношении 1:3. Найти стороны параллелограмма. (Ответ: 15 и 30)

197. В параллелограмме острый угол равен 45°, а расстояния от точек пересечения диагоналей до неравных сторон равны соответственно 2 и 3. Найти площадь параллелограмма. (Ответ: 24)

198. Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 и 15. Разность длин

сторон параллелограмма равна 7. Найти стороны параллелограмма и его диагонали. (Ответ: 10, 17, 21 и $\sqrt{337}$)

199. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A$ – острый, $AD - AB = 3$, $AC - BD = 2$ и $\angle ABC + \angle ABD = 180^{\circ}$. Найти расстояние от вершины D до AB. (Ответ: $3\sqrt{5}$)

200. В трапеции $ABCD$, около которой можно описать окружность и в которую можно вписать окружность, средняя линия MN равна 12. Из точки N на боковую сторону AB или ее продолжение опущен перпендикуляр, длина которого равна 6. Найти площадь трапеции. (Ответ:72)

201. Высота, проведенная из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, равна 4 и делит большее основание на части, имеющие длины 5 и 2. Найти площадь трапеции. (Ответ: 20)

202. Основания трапеции равны 4 и 16. Найти ее площадь, если известно, что в трапецию можно вписать окружность и вокруг нее можно описать окружность. (Ответ: 80)

203. Найти отношение оснований трапеции, если известно, что средняя линия делится диагоналями на три равные части. (Ответ: 1:2)

204. В трапеции $ABCD$ нижнее основание $AD = 5$, верхнее основание $BC = 4$, а боковая сторона $CD = 2, \angle BAD = 60^{\circ}$. Найти площадь трапеции. (Ответ: $\frac{9(\sqrt{39}+\sqrt{3})}{8}$)

205. Найти площадь трапеции, основания которой равны 2 и 1, а углы, прилегающие к большему основанию, – 30° и 60°. (Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{3}$)

206. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, равен 10, а отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 6. Найти основания трапеции. (Ответ: 16; 4)

207. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 12. Диагональ трапеции равна 15 и делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найти основания трапеции. (Ответ: $3\sqrt{\frac{3}{5}}; 3\sqrt{\frac{5}{3}}$)

208. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника взяты соответственно точки P и Q так, что $BP: CQ = 1: 2$. На отрезке PQ взята точка M так, что $PM: MQ = 1: 2$. Найти расстояние от точки M до основания AC, если высота BK треугольника ABC равна h. (Ответ: $\frac{2h}{3}$)

209. В трапеции $ABCD$ сумма углов при основании AD равна 90°. Нижнее и верхнее основания равны соответственно 7 и 3. Определить отрезок, соединяющий середины оснований. (Ответ: 2)

210. Биссектриса острого угла равнобедренной трапеции делит боковую сторону длиной 13 в отношении 26:11, считая от большего основания. Найти большее основание трапеции, если меньшее основание равно 2. (Ответ: 26)

211. Площадь трапеции равна 3, основания 1 и 2. Найти площадь треугольников, на которые трапеция разбивается диагоналями. вет:$\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}$)

212. В равнобокой трапеции длины оснований равны 21 и 9, а высота – 8. Найти радиус описанной окружности. (Ответ: $\frac{85}{8}$)

213. Длины оснований трапеции – 10 и 24, а боковых сторон – 13 и 15. Найти площадь трапеции. (Ответ: 204)

214. Длины оснований трапеции – 3 и 6, а диагоналей – 7 и 8. Найти площадь трапеции. (Ответ: $12\sqrt{5}$)

215. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найти длины оснований этой трапеции. (Ответ: 5 и 15)

216. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна средней линии, а периметр равен 48. Найти боковую сторону трапеции. (Ответ: 12)

217. Высота и диагональ равнобокой трапеции равны соответственно 5 и 13. Найти площадь трапеции. (Ответ: 60)

218. В прямоугольной трапеции большая диагональ, имеющая длину 24, является биссектрисой острого угла. Найти площадь трапеции, если расстояние от вершины тупого угла до диагонали равно 9. (Ответ: $246\frac{1}{4}$)

219. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках E и $F, EF = 2$. Определить основания трапеции, если их отношение равно 4. (Ответ: 5 и $\frac{5}{4}$)

220. Площадь четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, равна S. Найти площадь четырехугольника $ABCD$. (Ответ: $2S$)

221. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 2. Его стороны продолжены: сторона AB – за точку B так, что $BL = \frac{1}{2}AB$; сторона BC – за точку C так, что $CP = \frac{1}{2}BC$; сторона CD – за точку D так, что $DN = \frac{1}{2}CD$; сторона DA – за точку A так, что $AM = \frac{1}{2}AD$. Найти площадь четырехугольника $LPNM$. (Ответ: 5)

222. Точки M и N – середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Найти площадь четырехугольника $AMCN$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна 20. (Ответ: 10)

223. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точкиM, N, K, L соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA. Прямые MK и NL пересекаются в точке O. Найти площадь четырехугольника $OKDL$, если $S_{AMOL} = 4, S_{BNOM} = 2, S_{ONCK} = 3$. (Ответ: 5)

224. Диагонали выпуклого четырехугольника равны a и b, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны. Найти площадь четырехугольника. (Ответ: $\frac{ab}{2}$)

225. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 2005. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD. (Ответ: 2005)

226. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найти величину угла, образованного прямыми AB и CD. (Ответ: 90°)

227. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E, F, P и K – соответственно середины сторон AB, BC, CD и AD. Известно, что $EP = KF$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если $AC = 15$ и $BD = 20$. (Ответ:150)

228. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найти площадь четырехугольника, если известно, что площадь треугольников AOB, BOC и COD равны 12, 18 и 24. (Ответ: 70)

229. AB и AC – хорды окружности, угол между которыми равен 30°. Найти отрезок BC, если радиус окружности равен 6. (Ответ: 6)

230. Дана окружность $R = \frac{3}{\pi}$. Из точки M окружности проведены касательная и секущая к окружности. Угол между касательной и секущей равен 60°. Найти длину меньшей дуги, отсекаемой секущей. (Ответ: 2)

231. Треугольник ABC вписан в окружность. LK – касательная к окружности в точке A.Хорда MN, параллельная AK, пересекает стороны AB и AC в точках P и T соответственно. Найти $\angle PTC$, если $\angle B = 40^{\circ}$. (Ответ: 140°)

232. Дана точка P, удаленная на 7 от центра окружности с радиусом 11. Через эту точку проведена хорда длиной 18. Каковы длины отрезков, на которые делится хорда точкой P? (Ответ: 6 и 12)

233. В ΔABC $AB = 5, BC = 7, AC = 6$.Точка M – середина стороны AC. Найти длину хорды, проходящей через точки B и M окружности, описанной около ΔABC. (Ответ: $\frac{37\sqrt{7}}{14}$)

234. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной равна 12, а расстояние между точками касания 14,4. Определить радиус окружности. (Ответ: 9)

235. Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5. (Ответ: 13)

236. Окружность проходит через вершины A и C прямоугольного треугольника $ABC, \angle C = 90^{o}, AC = 4\sqrt{3}, BC = 12$, и пересекает гипотенузу AB в точке K так, что $AK : KB = 3 : 1$. Найти радиус окружности. вет: $2\sqrt{7}$)

237. Две окружности касаются внешним образом в точке $K. AB$ – внешняя касательная, KM – внутренняя, где M – точка пересечения этих касательных. Найти KM и AB, если радиусы окружностей равны R и r. (Ответ: $\sqrt{Rr};\ 2\sqrt{Rr}$)

238. Из точки A к окружности проведены две касательные AB и AC. Радиус окружности равен 6, расстояние от точки A до хорды BC равно 6,4. Найти расстояние от точки A до центра окружности. (Ответ: 10)

239. Даны две параллельные хорды окружности длиной 8 и 6. Найти радиус окружности, если расстояние между хордами равно 7. (Ответ: 5)

240. Окружность радиуса R проходит через две смежные вершины квадрата. Касательная к окружности, проведенная из третьей вершины квадрата, вдвое больше стороны квадрата. Найти сторону квадрата. (Ответ: $\frac{R\sqrt{10}}{5}$)

241. Вокруг ΔABC описана окружность. Через точку B проведена касательная к этой окружности до пересечения с продолжением стороны CA в точке D. Известно, что $AB + AD = AC, CD = 3$, $\angle BAC = 30^{o}$. Найти периметр ΔABC. (Ответ: $3 + \sqrt{3}$)

242. Окружность радиуса 3 проходит через вершину B, середины сторон AB и BC, а также касается стороны AC треугольника ABC, $\angle BAC$ – острый и $\sin \angle BAC = \frac{1}{3}$. Найти площадь ΔABC. (Ответ: $16\sqrt{2}$)

243. Сторона AB квадрата$ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной CK, проведенной из вершины C к той же окружности, равна 2. Чему равен диаметр окружности? (Ответ: $\sqrt{10}$)

244. Точка C делит хорду AB окружности радиуса 6 на отрезки $AC = 4$ и $CB = 5$. Найти минимальное из расстояний от точки C до точки окружности. (Ответ: 2)

245. Круг радикса 13 касается двух смежный сторон квадрата, длина стороны которого равна 18. На какие два отрезка делит круг каждую из двух других сторон квадрата? (Ответ: 1 и 17)

246. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найти радиус окружности. (Ответ: $\frac{10}{3}$)

247. Найти отношение сторон треугольника ABC, если известно, что окружность, вписанная в треугольник, делит медиану BM на три равные части. (Ответ: 5:10:13)

248. Вокруг правильного треугольника ABC описана окружность. На дуге $\cup BC$ взята точка M и проведены хорды AM, BM и CM. Найти CM, если $AM = 8, BM = 6$. (Ответ: 2)

249. Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на четыре дуги. Найти расстояние от середины одной из больших дуг до вершины прямоугольника, если стороны его равны 24 и 7. (Ответ: 20 и 15)

250. В равнобедренной трапеции основания равны 21 и 9, а высота 8. Найти радиус описанной окружности. (Ответ: $\frac{85}{8}$)

251. В окружность вписан четырехугольник с углами 120^o, 90^o, 60^o и 90^o. Площадь четырехугольника равна $9\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, если диагонали четырехугольника взаимно перпендикуляры. (Ответ: 3)

252. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AB в точке D, стороны AC – в точке E. Найдите площадь треугольника ADE, если известно, что $AD = 6, EC = 2, \angle BCA = 60^o$(Ответ:$\frac{27\sqrt{3}}{7}$)

253. Около трапеции описана и в трапецию вписана окружности. Найти радиусы этих окружностей, если основания трапеции равны 4 и 16. (Ответ: $r = 4; R = \frac{5\sqrt{41}}{4}$)

254. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее большей боковой стороны на 3 см и 9 см. Найти стороны трапеции. (Ответ: $BC = \frac{12}{\sqrt{10}}; AD = \frac{36}{\sqrt{10}}; AB = \frac{18}{\sqrt{10}}; CD = 3\sqrt{10}$)

255. Стороны треугольника относятся как 7:8:9. Найти отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной в треугольник окружности. (Ответ: $\frac{21}{10}$)

256. Равнобедренная трапеция с боковой стороной 9 и углом при основании в 60^o описана около круга. Найти основание трапеции. (Ответ:4;12)

257. Равнобедренная трапеция описана около окружности радиуса 5. Расстояние между точками касания боковых сторон равно 8. Найти площадь трапеции. (Ответ: 125)

258. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Длина отрезка касательной, заключенного между боковыми сторонами треугольника, равна 2. Найти основание треугольника. (Ответ: 3 или 6)

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Призма

1. Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащий в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющий соответствующие точки этих многоугольников (рис. 22). Многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ называются основаниями призмы. Многоугольники $AA_1B_1B, BB_1C_1C,$ … (параллелограммы) называются боковыми гранями призмы. Отрезки $AA_1, BB_1, CC_1,$ … называются боковыми ребрами. Перпендикуляр $HH_1,$ опущенныйиз какой-нибудь точки верхнего основания призмы на плоскость нижнего основания, называется высотой призмы.

2. Призма называется треугольной, четырехугольной и т.д., когда ее основание – треугольник, четырехугольник и т.д.

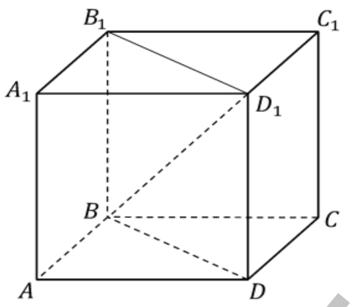

Рис. 21

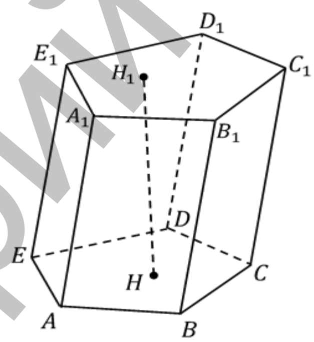

Рис. 22

3. Призма называется наклонной, если ее боковые ребра не перпендикулярны основаниям.

4. Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.

5. Призма называется правильной, если она прямая и ее основания – правильные многоугольники.

6. Площадь поверхности призмы – это сумма площадей всех ее граней.

7. Площадь боковой поверхности призмы – это сумма площадей вех боковых граней.

8. Плоскость, перпендикулярная к боковому ребру призмы, пересекает ее грани. Полученный в сечении многоугольник называют перпендикулярным сечением призмы.

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы (на длину бокового ребра), т.е. $S = PH$.

Контрольные вопросы

1. Сколько диагональных сечений можно провести в кубе?
2. Имеем модель наклонной призмы. Какие размеры необходимо определить, чтобы вычислить площадь боковой поверхности призмы?
3. Что такое высота призмы?

4. Что такое диагональ призмы?
5. Что такое диагональное сечение призмы?
6. Какая прямая называется прямой, наклонной?
7. Какая призма называется правильной?

Параллелепипед

1. Параллелепипедом называется призма, у которой основаниями служат параллелограммы. Параллелепипеды, как и всякие призмы, могут быть прямые и наклонные.

2. Из определений следует:

– у параллелепипеда все шесть граней – параллелограммы;

– у прямого параллелепипеда четыре боковые грани – прямоугольники, а два основания – параллелограммы;

– у прямоугольного параллелепипеда все шесть граней – прямоугольники.

3. В любом параллелепипеде:

– противоположные грани равны и параллельны

– диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

4. Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

5. Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Контрольные вопросы

1. Что называется параллелепипедом?
2. Какое свойство у диагоналей параллелепипеда?
3. Какой параллелепипед называется прямым, прямоугольным?
4. Чему равны диагонали прямоугольного параллелепипеда, если известны его измерения?
5. Как изменится площадь полной поверхности куба, если увеличить его ребро в два раза?

Пирамида

1. Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника – основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания, – вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания. На рисунке 23 изображена пирамида $SABCD$, где $ABCD$ – основание, точка S – вершина. Треугольники SAB, SBC, SCD, SDA называются боковыми ребрами пирамиды. Перпендикуляр SO, опущенный из вершины на основание, называется высотой пирамиды и обозначается H.

2. Сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания, называется диагональным сечением пирамиды. Например, треугольник ASC – диагональное сечение пирамиды.

3. Пирамида называется треугольной, четырехугольной и т. д., если ее основание – треугольник, четырехугольник и т. д.

4. Пирамида называется правильное, если ее основание – правильный многоугольник, а высота ее проходит через центр основания.

5. Боковые грани правильной пирамиды – равнобедренные треугольники, равные между собой.

6. Высота боковой грани правильной пирамиды называется апофемой пирамиды.

7. Треугольная пирамида называется также тетраэдром. Если все четыре грани тетраэдра – правильные треугольники, то и тетраэдр называется правильным.

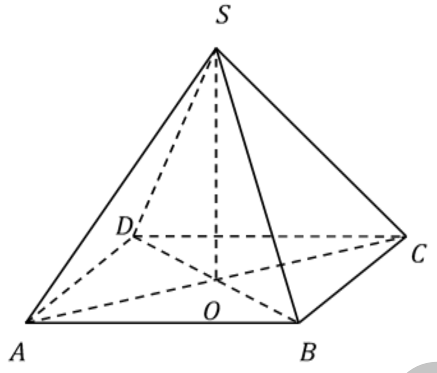

Рис. 23

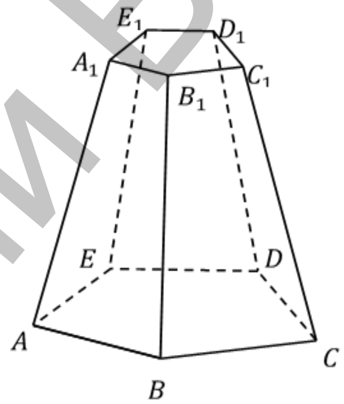

Рис. 24

8. Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то получится новый многогранник, который называется усеченной пирамидой (рис. 24). Многоугольник $ABCDE$ – нижнее основание, многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ – верхнее основание.

9. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на высоту.

10. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусумму периметров ее оснований на апофему.

11. Если в пирамиде все боковые ребра равны, то вершина ее проектируется в центр описанной около основания окружности.

12. Если в пирамиде все двугранные углы при основании, то вершина проектируется в центр вписанной в основание окружности.

Контрольные вопросы

1. Какой многогранник называется пирамидой?
2. Какая пирамида называется треугольной?
3. Какая пирамида называется правильной?
4. Что такое апофема правильной пирамиды?
5. Какая пирамида называется тетраэдром?
6. Какая пирамида называется усеченной?

7. Как относятся площади сечения пирамиды и основания, если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию?

8. Чему равна площадь боковой поверхности правильной пирамиды?

9. Чему равна площадь боковой поверхности усеченной пирамиды?

10. Что такое высота пирамиды?

Цилиндр

1. Цилиндром (точнее, круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Круги называются основаниями цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точно окружностей кругов, – образующими цилиндра.

2. Поверхность цилиндра состоит из оснований цилиндра – двух равных кругов, лежащих в параллельных плоскостях, и боковой поверхности.

3. Цилиндр называется прямым, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. (В настоящем пособии будем рассматривать только прямой цилиндр, называет его для краткости просто цилиндром).

4. Прямой цилиндр можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг его стороны как оси (рис. 25).

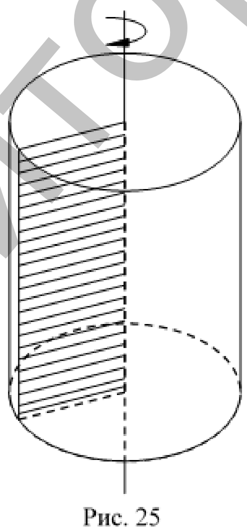

Рис. 25

5. Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

6. Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований.

7. Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.

8. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется осевым сечением.

9. Цилиндр, осевое сечение которого квадрат, называется равносторонним.

10. Плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

11. Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому, проведенному через эту образующую, называется касательной плоскостью цилиндра.

Контрольные вопросы

1. Объясните, что такое круговой цилиндр (образующая цилиндра, основания и боковая поверхность цилиндра).
2. Какой цилиндр называется прямым?
3. Что такое радиус цилиндра, высота цилиндра, ось цилиндра, осевое сечение цилиндра, касательная плоскость цилиндра?
4. Какая фигура является осевым сечением цилиндра?
5. Какой цилиндр называется равносторонним?

Конус

1. Конусом (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга – основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга – вершины конуса, и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими конуса.

2. Полная поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

3. Конус называется прямым, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания. (В данном пособии будем рассматривать только прямой конус, называя его для краткости просто конусом).

4. Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания.

5. Осью прямого конуса называется прямая, содержащая его высоту.

6. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется осевым сечением.

7. Прямой конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси. На рисунке 26 изображен прямой конус с его элементами, где: а) B – вершина конуса; б) $AB = BC = l$ – образующая конуса; в) $OB = H$ – высота, ось конуса; г) K – основание конуса, круг; д) $AO = OC = R$ – радиус основания; е) AC – диаметр основания; ж) треугольник ABC – осевое сечение конуса; з) $\angle AOB = 90^{\circ}$.

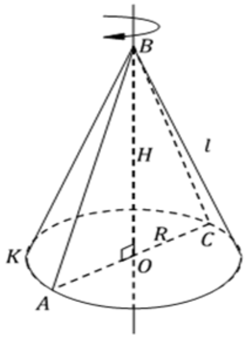

Рис. 26

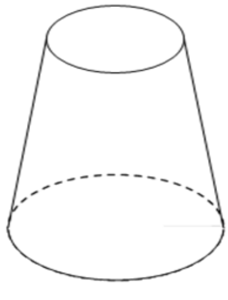

Рис. 27

8. Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность по окружности с центром на оси конуса.

9. Плоскость, перпендикулярная оси конуса, осекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется усеченным конусом (рис. 27).

10. Пирамидой, вписанной в конус, называется такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса. Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса.

11. Пирамида называется описанной около конуса, если ее основанием является многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса.

Контрольные вопросы

1. Что такое круговой конус, вершина конуса, образующая конуса, боковая поверхность конуса?
2. Какой конус называется прямым?
3. Что такое высота конуса, ось конуса, осевое сечение конуса?

Шар

1. Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного от данной точки. Эта точка называется центром шара, а данное расстояние – радиусом шара.
2. Граница шара называется шаровой поверхностью или сферой.
3. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется диаметром.
4. Шар, так же как и цилиндр, конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси.
5. Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.
6. Плоскость, проходящая через центр шара, называется диаметральной плоскостью.
7. Сечение шара диаметральной плоскостью называется большим кругом, а сечение сферы – большой окружностью.

8. Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку касания.

9. Многогранник называется вписанным в сферу (а сфера – описанной около многогранника), если все вершины многогранника лежат на сфере.

10. Для того, чтобы около пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы около основания пирамиды можно было описать окружность.

11. Для того, чтобы около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и чтобы около ее основания можно было описать окружность.

12. Центр сферы, описанной около пирамиды, лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр окружность, описанной около основания.

13. Центр сферы, описанной около призмы, является серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, описанный около оснований призмы.

14. Из указанных выше утверждений следует, что около любой правильной пирамиды и около любой правильной призмы можно описать сферу.

15. Сфера называется вписанной в многогранник (многогранник – описанным около сферы), если ока касается всех его граней.

16. Центр вписанной сферы является общей точной биссекторов всех внутренних двугранных углов многогранников. Отсюда следует, что если вписанная сфера существует, то только одна.

Контрольные вопросы

1. Что такое шар (шаровая поверхность или сфера)?
2. Что такое радиус шара, диаметр шара?
3. Какие точки шара называются диаметрально противоположными?
4. Какая плоскость называется диаметральной плоскостью шара?
5. Какая плоскость называется касательной к шару?
6. В каком случае многогранник называется вписанным в сферу?
7. Любой ли многогранник можно вписать в сферу?
8. В каком случае сфера называется вписанной в многогранник?
9. Чему равен радиус шара, вписанного в куб, ребро которого 3 дм; описанного около этого куба?
10. Можно ли утверждать, что через две точки шаровой поверхности проходит один большой круг?
11. Сколько общих точек может иметь шаровая поверхность и прямая?
12. Сколько общих точек могут иметь две шаровые поверхности?
13. Можно ли к любым двум шарам провести общую касательную прямую?

Объем прямоугольного параллелепипеда

1. Объём прямоугольного параллелепипеда будем называть число, равное произведению трёх его измерений, взятых в одних и тех же единицах.

Если измерения прямоугольного параллелепипеда равны $a, b, c,$ то $V = abc$.

2. Если $a = b = c$, то прямоугольный параллелепипед будет кубом, тогда его объём будет: $V_{\text{куб}} = a^3$.

3. Объёмы геометрических тел выражаются в кубических единицах.

4. Объём любого прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту: $V = S \cdot H$.

5. Два многогранника, имеющие равные объёмы, называются равновеликими.

Контрольные вопросы

1. Чему равен объём параллелепипеда?
2. Какие два тела называются равновеликими?
3. Что служит единицей измерения объёмов?
4. Во сколько раз увеличится объём куба, если его ребро увеличить в 2 раза?

Объем призмы

Объём призмы равен произведению площади ее основания на высоту: $V = SH$.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу объема прямой призмы и объясните смысл входящих в нее букв.
2. В призме проводятся сечения, параллельные ее основаниям. В каком отношении находятся объёмы данной призмы и вновь полученных призм?

Объем пирамиды

1. Объем любой пирамиды равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту: $V = \frac{1}{3}SH$.

2. Две пирамиды равновелики, если их равновелики их основания и равны их высоты.

3. Формула для вычисления объема усеченной пирамиды:

$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$

Где H − высота пирамиды, S_1 иS_2 − площади оснований.

4. Объемы подобных многогранников относятся как кубы сходственных ребер.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу объема пирамиды и объясните смысл входящих в формулу букв.

2. Напишите формулу объема усеченной пирамиды и объясните смысл входящих в формулу букв.

Объем цилиндра и конуса

1. Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту, т.е. $V = \pi R^2 H$.

2. Объем конуса равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту, т.е. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

3. Объем усеченного конуса равен:$V = \frac{1}{3}\pi H \cdot (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$,

где R_1 и R_2 – радиусы оснований, H – высота конуса.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу объема цилиндра и объясните смысл входящих в нее букв.

2. Как изменится объем цилиндра, если его высоту и диаметр его основания увеличить в 2 раза?

Объем шара и его частей

1. Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаема от него плоскостью (рис. 28, а, в).

2. Шаровым слоем называется часть шара, между двумя параллельными плоскостями, пересекающимишар (рис. 28, б).

3. Шаровым сектором шара называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса (рис. 29).

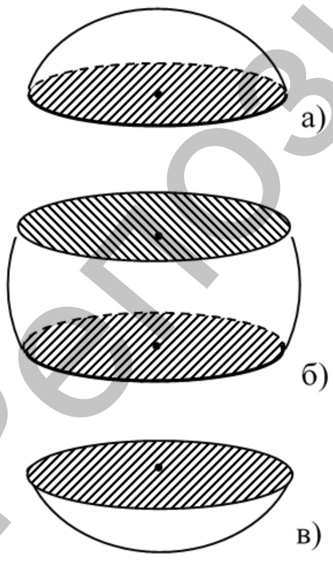

Рис. 28

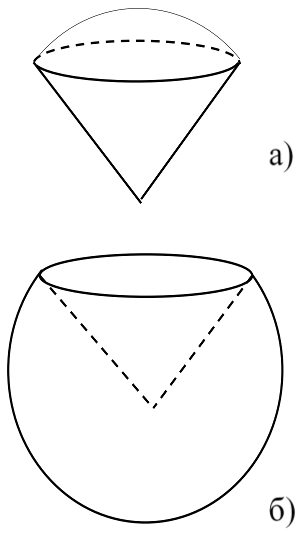

Рис. 29

4. Объем шара определяется формулой $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

5. Объем шарового сегмента определяется формулой $V = \pi H^2 (R - \frac{H}{3})$,

где $H -$ высота шарового сегмента.

6. Объем шарового сектора определяется формулой $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$,

где $H -$ высота соответствующего шарового сегмента.

7. Объемы шаров относятся как кубы радиусов.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу объема шара.
2. Как относятся объемы шаров.
3. Как изменится объем шара, если радиус увеличить в 2 раза?
4. Напишите формулу объема шарового сегмента.
5. Как найти объем шарового слоя?
6. Напишите формулу объема шарового сектора.

Поверхность цилиндра

1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна длине окружности основания, умножения на высоту, т.е.

$S = 2\pi RH,$

где $R -$ радиус цилиндра, $H -$ высота.

2. Чтобы найти площадь полной поверхности цилиндра, достаточно прибавить к площади боковой поверхности сумму площадей двух оснований, поэтому площадь полной поверхности цилиндра будет равна:

$S_{\text{п}} = 2\pi R(R + H).$

3. Цилиндр называют вписанным в шар, если окружности оснований лежат на поверхности шара (рис. 30). Если цилиндр вписан в шар, то центр шара лежит на оси цилиндра.

4. Шар называют вписанным в цилиндр, если его поверхность касается боковой поверхности и оснований цилиндра (рис. 31). Центр шара, вписанного в цилиндр, лежит на оси цилиндра.

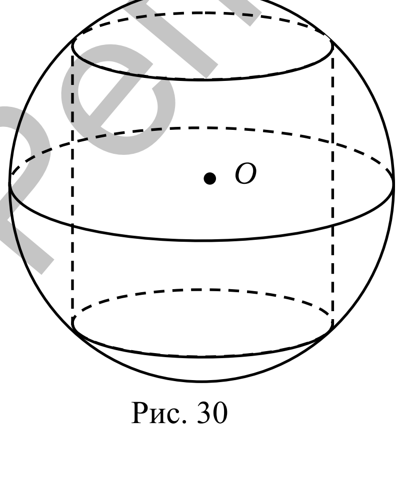

Рис. 30

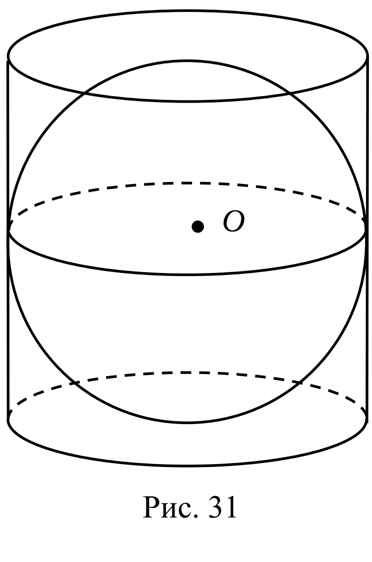

Рис. 31

Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет разверстка боковой поверхности цилиндра?
2. Центр шара лежит на оси цилиндра. Какую фигуру образуют общие точки шаровой и цилиндрической поверхностей?
3. Можно ли описать шар вокруг цилиндра?
4. Во всякий ли цилиндр можно вписать шар? Какими свойствами должен обладать цилиндр, в который можно вписать шар?

Поверхность шара (сферы) и его частей

1. Площадь поверхности шара (сферы) находится по формуле

$S = 4\pi R^2$,

где R – радиус шара.

2. Конус называется вписанным в шар, если окружности его оснований лежат на поверхности шара (рис. 32).
3. Конус называется вписанным в шар, если его вершина и окружность основания лежат на поверхности шара (рис. 33).
4. Если конус или усеченный конус вписан в шар, то центр шара лежит на оси конуса или усеченного конуса.
5. Шар называется вписанным в конус (или усеченный конус), если его поверхность касается боковой поверхности и оснований названных тел (рис. 34, 35).
6. Центр шара, вписанного в конус или усеченный конус, лежит на оси этого тела.
7. Площадь поверхности сферического сегмента равна: $S = 2\pi RH$,

где R – радиус сферы, H – высота сегмента.

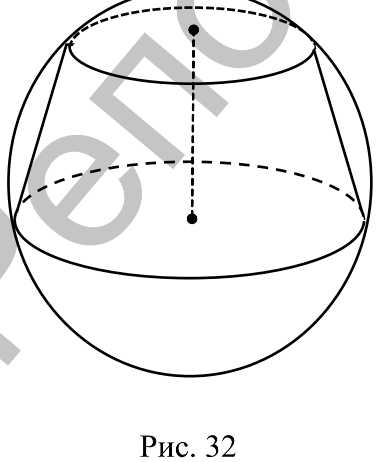

Рис. 32

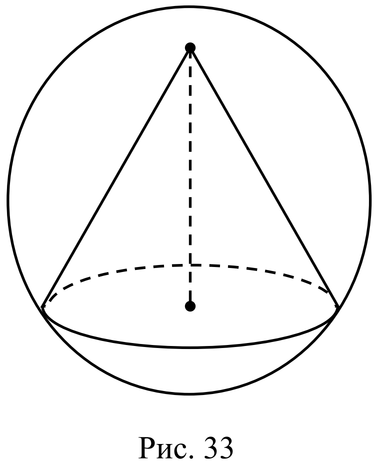

Рис. 33

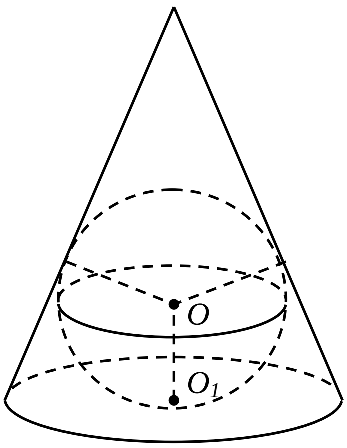

Рис. 34

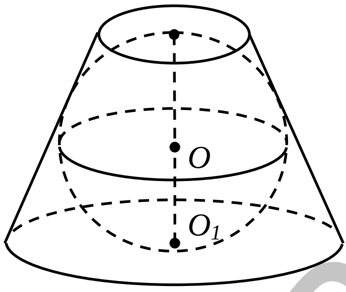

Рис. 35

8. Площадь сфер относятся как квадраты их радиусов.

9. Площадь сферического пояса равна произведению длины окружности большего круга на высоту пояса:

$S = 2\pi RH,$

где R − радиус шара, а H − высота пояса.

10. Если шар описан около параллелепипеда, то все его грани должны быть прямоугольными, т.е. параллелепипед должен быть прямоугольным, а центр этого шара должен лежать в точке пересечения его диагоналей.

11. Если шар описан около призмы, то эта призма прямая, а ее основаниями служат такие многоугольники, около которых можно описать окружность.

12. Если шар описан около правильной пирамиды, то его центр лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр окружности, описанной около основания.

13. Шар называется вписанным в многогранник, если его поверхность касается всех граней многогранника.

14. Радиусы шара, проведенные в точки касания, перпендикулярны соответствующим граням многогранника.

15. Центр шара, вписанного в многогранник, равноудален от всех его граней.

16. Если шар вписан в правильную четырехугольную призму, то эта призма есть куб.

17. Центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на высоте в точке пересечения высоты с биссектрисой угла, образованного апофемой пирамиды и ее проекцией на плоскость основания.

Контрольные вопросы

1. Как относятся между собой поверхности двух шаров?
2. Напишите формулы площади сферы (поверхности шара), площади сферического сегмента, площади сферического пояса.

3. Во всякий ли конус можно вписать шар? Как определить положение центра шара, вписанного в конус?

4. Какими свойствами должен обладать усеченный конус, чтобы в него можно было вписать шар?

Поверхность конуса

1. Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности основания конуса на его образующую, т.е.

$S = \pi R l,$

где R − радиус основания конуса, l − образующая конуса.

2. Чтобы найти площадь полной поверхности конуса, достаточно к площади его боковой поверхности прибавить площадь основания, т.е.

$S = \pi R l + \pi R^2 = \pi R(R + l).$

3. Площадь боковой поверхности усеченного равна:

$S = \pi l(R_1 + R_2),$

где l − образующая, R_1 и R_2 − радиусы оснований.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу площади боковой поверхности конуса. Объясните смысл входящих в формулу букв.

2. Напишите формулу площади боковой поверхности усеченного конуса. Объясните смысл входящих в формулу букв.

3. Какой вид имеет развертка боковой поверхности конуса?

Задачи для самостоятельного решения (стереометрия)

1. Определить диагонали прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 12; 16; 21.

2. Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 5 м, стороны основания равны 6 м и 8 м и одна из диагоналей основания равна 12 м. Определить большую диагональ параллелепипеда.

3. Определить ребро куба, если его поверхность равна 5046 см^2.

4. Определить поверхность куба по его диагонали l.

5. Определить поверхность прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: $a = 10$ см, $b = 22$ см, $c = 16$ см.

6. Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся как 3:7:8, а поверхность содержит 808 см^2. Определить ребра.

7. Ребро куба равно a. Определить расстояние от вершины куба до его диагонали.

8. Объем куба равен $2\sqrt{2}$. Чему равен радиус круга, описанного вокруг куба?

9. Диагональ куба равна 3. Найти его полную поверхность.

10. Площадь полной поверхности куба равна 3. Найти длину диагонали грани куба.

11. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 дм и 24 дм, а высота параллелепипеда равна 8 дм. Определить площадь диагонального сечения.

12. Определить объем куба по его диагонали l.

13. Определить объем куба по его поверхности S.

14. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определить ребро.

15. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м и 36 м. Найти ребро равновеликого ему куба.

16. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 35 см, а ребра относятся как 2:3:6. Определить объем.

17. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда 2 м^2, 3 м^2 и 6 м^2. Найти его объем.

18. В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол в 30°, боковая поверхность равна S. Определить его объем.

19. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с одной гранью угол в 30°, а с другой – в 45°. Определить объем.

20. Кирпич размером 25 см × 12 см × 6,5 см весит 3, 51 кг. Найти его удельный вес.

21. В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 144 см^2, а высота равна 14 см. Определить диагональ этой призмы.

22. Определить диагональ правильной четырехугольной призмы, если диагональ основания равна 8 см, а диагональ боковой грани равна 7 см.

23. По стороне основания a и боковому ребру b определить полную поверхность правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

24. Определить полную поверхность правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ равна 14 см, а диагональ боковой грани равна 10 см.

25. По стороне основания a и боковому ребру b определить объем правильной треугольной призмы.

26. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 м, а диагональ боковой грани – 2,5 м. Определить объем.

27. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 6 см, а боковая поверхность – 32 см^2. Определить объем.

28. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы – 12 см. Определить площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

29. Определить полную поверхность прямой треугольной призмы, если ее высота равна 50 см, а стороны основания – 40 см, 13 см, 37 см.

30. Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна 1 м^2. Найти боковую поверхность.

31. В прямой треугольной призме стороны основания равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Определить объем призмы.

32. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15, а расстояния между ними – 26 м, 25 м и 17 м. Определить ее объем.

33. Все ребра прямой треугольной призмы имеют длину $2\sqrt{3}$. Найти объем призмы.

34. В основании призмы лежит равносторонний треугольник, площадь которого равна $9\sqrt{3}$. Найти объем призмы, если ее высота в $\sqrt{3}$ раз больше стороны основания.

35. Объем прямой призмы, основание которой – правильный треугольник, равен $18\sqrt{3}$, ее высота равна 8. Найти сторону основания.

36. По данной стороне основания a и боковому ребру b определить высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

37. По данной стороне основания a и высоте h определить апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

38. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания равна 8 см. Определить боковое ребро.

39. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см; каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислить высоту пирамиды.

40. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 14 см, а длина бокового ребра – 10 см. Определить площадь диагонального сечения.

41. В правильной треугольной пирамиде по стороне основания a и боковому ребру b определить площадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту пирамиды.

42. Высота пирамида равна 16 м; площадь основания – 512 м^2. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное основанию, содержащее 50 м^2?

43. Определить боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если ее высота равна 4 см, а апофема равна 8 см.

44. В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна 14,76 м^2, а полная поверхность – 18 м^2. Определить сторону основания и высоту пирамиды.

45. В правильной четырехугольной пирамиде определить сторону основания, если боковое ребро равно 5 см, а полная поверхность – 16 см^2.

46. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны основания – 10 см и 2 см. Определить боковое ребро пирамиды.

47. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а сторона основания равна 18. Найти $S_{\text{бок}}$.

48. По стороне основания a и боковому ребру b определить объем правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

49. В правильной четырехугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро – 5 м. Найти объем.

50. Объем правильной шестиугольной пирамиды равен 6 см^3. Сторона основания – 1 см. Найти боковое ребро.

51. По ребру a правильного тетраэдра определить его поверхность и объем.

52. По ребру a правильного октаэдра определить его поверхность и объем.

53. Сторона основания правильной треугольной пирамиды a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол в 45°. Определить объем пирамиды.

54. Радиус основания цилиндра 2 м, высота – 3м. Найти диагональ осевого сечения.

55. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найти длину ребра куба.

56. В прямом параллелепипеде стороны основания длиной 3 см и 4 см составляют угол в 60°, а боковое ребро есть средняя пропорциональная между сторонами основания. Определить диагонали этого параллелепипеда.

57. В прямом параллелепипеде боковое ребро равно 1 м, стороны основания равны 23 дм и 11 дм, а диагонали основания относятся как 2:3. Определить площади диагональных сечений.

58. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно 3 м. Через сторону основания и середину оси проведена плоскость. Найти площадь сечения.

59. Основанием прямой призмы служит ромб; диагонали призмы равны 8 см и 5 см; высота – 2 см. Найти строну основания.

60. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами 37 см, 13 см и 47 см. Найти расстояние между большей боковой гранью и противолежащим боковым ребром.

61. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 10 см и 17 см; одна из диагоналей основания равна 29 см. Определить полную поверхность параллелепипеда.

62. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с диагоналями в 6 см и 9 см; диагональ боковой грани равна 13 см. Определить полную поверхность этого параллелепипеда.

63. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 9 см, а полная поверхность равна 144 см^2. Определить сторону основания и боковое ребро.

64. В прямой треугольно призме стороны основания относятся как 17:10:9, а боковое ребро равно 16 см; полная поверхность этой призмы содержит 1440 см^2. Определить стороны основания.

65. В наклонной четырехугольной призме боковое ребро равно 8 см, а расстояние между последовательными боковыми ребрами 3 см, 6 см, 2 см и 7 см. Определить ее боковую поверхность.

66. В пирамиде сечение, параллельное основанию, дели высоту в отношении 3:4 (от вершины к основанию, а площадь сечения меньше площади основания на 200 см^2. Определить площадь основания.

67. В пирамиде площадь основания равна 150 см^2, площадь параллельного сечения 54 см^2, расстояние между ними равно 14 см. Определить высоту пирамиды.

68. Определить высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковая поверхность вдвое больше площади основания.

69. Определить сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро и боковая поверхность соответственно равны 10 см и 144 см^2.

70. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Боковое ребро, противолежащее средней по величине стороне основания, перпендикулярно к плоскости основания и равно 16 см. Определить полную длину поверхности этой пирамиды.

71. Основанием пирамиды $SABC$служит прямоугольный треугольник ABC, в котором гипотенуза $AB = 26$ см и катет $AC = 24$ см; ребро SA перпендикулярно к плоскости основания ABC и равно 18 см. Определить $S_{\text{бок}}$.

72. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды a, двугранный угол при основании равен 45°. Определить объем пирамиды.

73. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны содержат по 6 см, а третья сторона 8 см. Боковые ребра равны между собой и каждое содержит 9 см. Определить объем этой пирамиды.

74. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 39 см, 17 см и 28 см; боковые ребра равны и каждое 22,9 см. Определить объем этой пирамиды.

75. В данной треугольной пирамиде двугранные углы при основании равны между собой; стороны основания: 7 см, 8 см и 9 см; объем пирамиды – 40 см^3. Определить ее боковую поверхность.

76. Ромб со стороной в 15 см служит основанием пирамиды, каждая грань которой наклонена к основанию под углом в 45°.$S_{\text{бок}}$= 3 дм^2. Найти объем пирамиды.

77. Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, площади их равны 6 $м^2$, 4 $м^2$ и 3 $м^2$. Найти объем пирамиды.

78. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой параллельные стороны 3 см и 5 см, а боковая сторона – 7 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, и большее боковое ребро равно 10 см. Определить объем этой пирамиды.

79. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120°. Длина оси h = 10 см; ее расстояние от секущей плоскости a = 2 см. Определить площадь сечения.

80. В цилиндре радиус основания r = 2см, а высота h = 7 см. Определить радиус круга, равновеликого полной поверхности этого цилиндра.

81. Боковая поверхность цилиндра равна S, а длина окружности основания C. Найти объем.

82. Определить объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно $\boldsymbol{a}$.

83. Найти высоту цилиндра, если площадь его основания равна 1, а площадь боковой поверхности равна $\sqrt{\boldsymbol{\pi}}$.

84. Высота цилиндра равна длине окружности основания. Найти диаметр основания, если объем цилиндра равен $432\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{2}}$.

85. Высота конуса $\boldsymbol{H}$. Угол между высотой и образующей равен $\mathbf{60}^{\circ}$. Найти площадь сечения, проведенного через две взаимно перпендикулярные образующие.

86. В конусе даны радиус основания $\boldsymbol{R}$ и высота $\boldsymbol{H}$.Определить ребро вписанного в него куба.

87. Равнобедренный треугольник вращается вокруг своей высоты. Определить стороны этого треугольника, если его периметр равен 30 см, а полная поверхность тела вращения равна $60\pi^2$.

88. Радиус сектора равен 3 м; его угол 120°. Сектор свернут в коническую поверхность. Найти радиус основания конуса.

89. В равносторонний конус вписана правильная четырехугольная пирамида. Как относятся боковые поверхности конуса и пирамиды?

90. Радиусы оснований усеченного конуса и его образующая относятся как 1:4:5; высота равна 8 см. Найти $S_{\text{бок}}$.

91. Осевым сечением конуса служит равнобедренный треугольник; площадь его 9 $м^2$. Найти объем конуса.

92. Площадь основания конуса $9\pi$$см^2$; полная поверхность его 24π $см^2$. Найти объем конуса.

93. Высота конуса равна 15 м, а объем равен 320π $м^3$. Определить полную поверхность.

94. Треугольник со сторонами в 10 см, 17 см и 21 см вращается вокруг большей стороны. Определить объем и поверхность полученного тела.

Содержание

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Геометрические фигуры

на плоскости и в пространстве

Методические рекомендации

Составители:

УСТИМЕНКО Владимир Викторович

ТИТОВА Татьяна Васильевна

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *Т.Е. Сафранкова*

Подписано в печать .2017. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,90. Уч.-изд. л. 2,41. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.