



С.П. Кунцевич

Параметрические колебания некруговой вязкоупругой цилиндрической оболочки

1. Введение.

Подавляющее большинство работ по параметрической неустойчивости тонких оболочек относится к тому случаю, когда геометрические и физические характеристики оболочки постоянны, возбуждающие силы не зависят от круговой координаты, а возбуждаемые колебания охватывают всю поверхность оболочки.

В работе [1] исследовались свободные и параметрические колебания цилиндрической оболочки, находящейся под действием статической и периодической составляющих осевой нагрузки, являющихся функциями круговой координаты, а также найдена область значений параметров (частоты и амплитуды нагрузки, геометрических характеристик и др.), в которой колебания неустойчивы.

Основной целью данной работы является исследование влияния вязкого трения на динамическую неустойчивость оболочки. Предполагается, что оболочка является некруговой, а нагрузка изменяется в окружном направлении. Вследствие этого предполагается, что колебания сосредоточены в окрестности некоторой "слабой" [2] образующей срединной поверхности.

2. Основные уравнения.

Рассмотрим некруговую цилиндрическую оболочку, достаточно тонкую для применения предположений классической теории оболочек и асимптотических методов, с ортогональной системой координат s, φ . Здесь $s = x R^{-1}$, $0 \leq s \leq l = L/R$, x — координата точки на образующей, R — характерный размер срединной поверхности (будет определен ниже), L — длина оболочки; φ — круговая координата поверхности оболочки ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$), такая, что первая квадратичная форма срединной поверхности имеет вид $R^2 (ds^2 + d\varphi^2)$. В этом случае радиус кривизны будет $R_2 = R k^{-1}(\varphi)$.

Пусть оболочка находится под действием комбинированной неоднородной осевой нагрузки:

$$T_1^* = \mu^2 E h F(\varphi, t), \quad F(\varphi, t) = f_0(\varphi) + \mu f_1(\varphi) \cos \Omega^* t^*, \quad (1)$$

где E — модуль Юнга, h — толщина оболочки, $\mu^4 = h^2 / [12 R^2 (1 - \nu^2)]$ — малый параметр, ν — коэффициент Пуассона, Ω^* — частота периодической составляющей нагрузки, t^* — время.

В качестве исходной используется система уравнений

$$\mu^4 \Delta^2 w - \mu^2 k(\varphi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \mu^2 F(\varphi, t) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \gamma \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$\mu^2 \Delta^2 \Phi + k(\varphi) \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0,$$

записанная в безразмерном виде. Здесь $\Delta = \partial^2 / \partial s^2 + \partial^2 / \partial \varphi^2$, безразмерные величины задаются следующим образом:

$$w = w^* / R, \quad \Phi = \Phi^* / (\mu^2 E h R^2), \quad (3)$$

$$t = t^* / t_c, \quad \Omega = \Omega^* t_c, \quad \gamma = t_c \delta / \rho, \quad t_c = R \sqrt{\rho / E},$$

где w^* — нормальный прогиб, Φ^* — функция напряжений, t_c — характерное время, δ — коэффициент вязкого трения, ρ — плотность материала. Предполагается, что функции $k(\varphi)$, $f_0(\varphi)$, $f_1(\varphi)$ — бесконечно дифференцируемые.

Рассмотрим на краях $s = 0$ / условия шарнирного опирания:

$$w = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = 0. \quad (4)$$

Для удовлетворения краевым условиям (4) решение уравнений (2) ищем в виде:

$$w = w_n(\varphi, t) \sin\left(\frac{q_n s}{\mu}\right), \quad \Phi = \Phi_n(\varphi, t) \sin\left(\frac{q_n s}{\mu}\right), \quad q_n = \frac{\mu n \pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mu^4 \frac{\partial^4 w_n}{\partial \varphi^4} - 2\mu^2 q_n^2 \frac{\partial^2 w_n}{\partial \varphi^2} + q_n^4 w_n + q_n^2 k(\varphi) \Phi_n - q_n^2 F(\varphi, t) w_n + \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} + \mu \gamma \frac{\partial w_n}{\partial t} = 0 \\ \mu^4 \frac{\partial^4 \Phi_n}{\partial \varphi^4} - 2\mu^2 q_n^2 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \varphi^2} + q_n^4 \Phi_n - q_n^2 k(\varphi) w_n = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

для w_n и Φ_n . Далее индекс n у q_n , w_n и Φ_n опускается.

3. Асимптотическое решение.

Принимая во внимание неоднородность осевой нагрузки и изменяемость кривизны, предположим, что колебания сосредоточены около некоторой образующей $\varphi = \varphi_0$, которая будет определена ниже. Асимптотическое решение уравнений (6) может быть построено в форме ВКБ-функций с медленно растущими (в случае резонанса) во времени амплитудами:

$$w(\varphi, t, \mu) \cong \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k/2} w_k(\xi, t_0, t_1) \exp\{i[\mu^{-1/2} p \xi + 0,5 b \xi^2]\} \quad (7)$$

$$\Phi(\varphi, t, \mu) \cong \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k/2} \Phi_k(\xi, t_0, t_1) \exp\{i[\mu^{-1/2} p \xi + 0,5 b \xi^2]\}.$$

Здесь $\xi = \mu^{-1/2}(\varphi - \varphi_0)$, $t_0 = t$, $t_1 = \mu t$ — "медленное время", $\text{Im } b > 0$; w_k , Φ_k — полиномы по ξ .

Функции $k(\varphi)$, $f_0(\varphi)$, $f_1(\varphi)$ раскладываются в ряды в окрестности образующей $\varphi = \varphi_0$. Например,

$$k(\varphi) = k(\varphi_0) + \mu^{1/2} k'(\varphi_0) \xi + 0,5 \mu k''(\varphi_0) \xi^2 + \dots \quad (8)$$

Подставляя разложения (7), (8) в уравнения (6) и исключая функции Φ_k , получаем последовательность уравнений:

$$\sum_{j=0}^k D_j w_{k-j} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Здесь:

$$D_0 = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + H(p, q, \varphi_0), \quad (10)$$

$$H(p, q, \varphi_0) = (p^2 + q^2)^2 + \frac{k^2(\varphi_0) p^4}{(p^2 + q^2)^2} - f_0(\varphi) p^2, \quad (11)$$

$$D_1 = \frac{\partial H}{\partial \varphi_0} \xi + \frac{\partial H}{\partial q} \left(b \xi - i \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \quad (12)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0^2} \xi^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0 \partial q} \left(b \xi^2 - i \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{i}{2} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \left(\frac{1}{2} b^2 \xi^2 - i b \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{i}{2} b - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) + N, \dots \quad (13)$$

$$N = 2 \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} + \gamma \frac{\partial}{\partial t_0} - q^2 f_1(\varphi_0) \cos \Omega t. \quad (14)$$

В нулевом приближении ($k=0$) имеем однородное дифференциальное уравнение $D_0 w_0 = 0$. Его решение может быть записано в виде:

$$w_0(\xi, t_0, t_1) = w_{0,c}(\xi, t_1) \cos \omega_0 t_0 + w_{0,s}(\xi, t_1) \sin \omega_0 t_0. \quad (15)$$

Здесь $w_{0,c}$, $w_{0,s}$ — неизвестные многочлены по ξ с коэффициентами, зависящими от "медленного времени" t_1 , а частота ω_0 и волновое число p удовлетворяют уравнению

$$\omega_0^2 = H(p, q, \varphi_0). \quad (16)$$

При $k=1$ из уравнения (9) получаем неоднородное уравнение

$$D_0 w_1 = -D_1 w_0. \quad (17)$$

Правая часть этого уравнения порождает секулярные члены относительно t_0 . Условием отсутствия этих членов являются соотношения

$$2k'(\varphi_0) - f_0'(\varphi_0) = 0, \quad p^2 = k^{1/2}(\varphi_0) q - q^2 \quad (18)$$

или

$$2k(\varphi_0) k'(\varphi_0) - q^2 f_0'(\varphi_0) = 0, \quad p = 0. \quad (19)$$

Тогда

$$\omega_0^2 = 2q^2 k(\varphi_0) - q^2 f_0(\varphi_0) \quad (20)$$

или

$$\omega_0^2 = q^4 + k^2(\varphi_0) - q^2 f_0(\varphi_0) \quad (21)$$

для случаев (18) или (19) соответственно.

Пусть $\varphi_0 = \varphi_0^0$, $p = p^0$, $\omega_0 = \omega_0^0$ удовлетворяют уравнениям (18), (20) или (19), (21). Тогда уравнение (17) записывается в виде:

$$D_0 w_1 \equiv 0, \quad (22)$$

и его решение может быть найдено в виде (15):

$$w_1(\xi, t_0, t_1) = w_{1,c}(\xi, t_1) \cos \omega_0 t_0 + w_{1,s}(\xi, t_1) \sin \omega_0 t_0. \quad (23)$$

Из формул (20) и (21) видно, что $f_0 < f_b$, где $f_b = 2k(\varphi_0^\circ)$ в случае (20) или $f_b = q^2 + q^{-2}k^2(\varphi_0^\circ)$ в случае (21). Образующая $\varphi = \varphi_0^\circ$ является наиболее слабой [2], так как в ее окрестности при $f_0 = f_b$ оболочка теряет устойчивость. Пусть $k(\varphi_0^\circ) = 1$, тогда характерный размер оболочки равен $R = R_2(\varphi_0^\circ)$. В дальнейшем верхний индекс у $\varphi_0^\circ, \rho^\circ, \omega_0^\circ$ опускается.

При $k = 2$ уравнение (9) записывается в виде:

$$D_0 w_2 = -D_2 w_0 - D_1 w_1. \quad (24)$$

Легко заметить, что из условий (18)—(21) следует тождество $D_1 w_1 \equiv 0$, поэтому уравнение (24) преобразуется в следующее неоднородное уравнение:

$$D_0 w_2 = -D_2 w_0. \quad (25)$$

Правая часть этого уравнения порождает секулярные члены относительно t_0 .

Рассмотрим случай, когда $\Omega \approx 2\omega_0$. Предположим, что

$$\Omega = 2\omega_0 + \mu\sigma, \quad \sigma \sim 1 \text{ при } \mu \rightarrow 0, \quad (26)$$

где σ — параметр расстройки частоты Ω периодической составляющей осевой нагрузки. Тогда уравнение (25) можно переписать в виде:

$$D_0 w_2 = -(N_c \cos \omega_0 t_0 + N_s \sin \omega_0 t_0) + \frac{1}{2} q^2 f_1(\varphi_0) [w_{0,c} \cos(3\omega_0 t_0 + \sigma t_1) + w_{0,s} \sin(3\omega_0 t_0 + \sigma t_1)], \quad (27)$$

где

$$N_c = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 w_{0,c}}{\partial \xi^2} + a \xi \frac{\partial w_{0,c}}{\partial \xi} + \left(c \xi^2 + \frac{1}{2} a \right) w_{0,c} + \left(2 \frac{\partial}{\partial t_1} + \gamma \right) \omega_0 w_{0,s} + \frac{1}{2} \rho^2 f_1(\varphi_0) (w_{0,s} \sin \sigma t_1 - w_{0,c} \cos \sigma t_1),$$

$$N_s = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 w_{0,s}}{\partial \xi^2} + a \xi \frac{\partial w_{0,s}}{\partial \xi} + \left(c \xi^2 + \frac{1}{2} a \right) w_{0,s} - \left(2 \frac{\partial}{\partial t_1} + \gamma \right) \omega_0 w_{0,c} + \frac{1}{2} \rho^2 f_1(\varphi_0) (w_{0,s} \cos \sigma t_1 + w_{0,c} \sin \sigma t_1), \quad (28)$$

$$a = -i \left(b \frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0 \partial \rho} \right), \quad c = \frac{1}{2} \left(b^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} + 2b \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0 \partial \rho} + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0^2} \right).$$

Первое выражение в правой части уравнения (27) порождает секулярные члены. Условием отсутствия этих членов является равенство

$$N_c = N_s = 0, \quad (29)$$

приводящее к дифференциальному уравнению относительно вектора $\mathbf{X} = (w_{0,s}, w_{0,c})^T$:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \xi^2} + a \xi \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} + \left(c \xi^2 + \frac{1}{2} a \right) \mathbf{X} + \left(2 \frac{\partial}{\partial t_1} + \gamma \right) \omega_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \frac{1}{2} q^2 f_1(\varphi_0) \begin{pmatrix} \cos \sigma t_1 & \sin \sigma t_1 \\ \sin \sigma t_1 & -\cos \sigma t_1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = 0. \quad (30)$$

Для того, чтобы система уравнений (30) имела решение в виде полиномов по ξ , необходимо, чтобы $c = 0$. Отсюда:

$$b = \frac{1}{8} q (q - q^2)^{-1/2} \{f_0'(\varphi_0) + i [4k''(\varphi_0) - 2f_0''(\varphi_0)]^{1/2}\} \quad (31)$$

или

$$b = \frac{1}{2} i q (q^4 - 1)^{-1/2} [2k''(\varphi_0) + 2k'^2(\varphi_0) - q^2 f_0''(\varphi_0)]^{1/2} \quad (32)$$

для случаев (18) или (19) соответственно. Видно, что $\text{Im } b > 0$, если

$$q < 1, \quad 2k''(\varphi_0) > f_0''(\varphi_0) \quad (33)$$

или

$$q > 1, \quad 2k''(\varphi_0) + 2k'^2(\varphi_0) - q^2 f_0''(\varphi_0) > 0. \quad (34)$$

Отсюда, в случае $q < 1$ образующая $\varphi = \varphi_0$ находится из условий (18), (33), а при $q > 1$ — из условий (19), (34). Случай $q \sim 1$ требует перестройки асимптотического решения и в данной работе не рассматривается.

С учетом (31) или (32) система (30) допускает решение в виде:

$$X = H_m(r \xi) Y_m. \quad (35)$$

где $H_m(r \xi)$ — полином Эрмита степени m (r будет определено ниже), $Y_m = (S_m(t_1), C_m(t_1))^T$.

Подставляя (35) в уравнение (30), получаем выражение для r :

$$r^2 = a \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} \right)^{-1}. \quad (36)$$

Отсюда:

$$r = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0^2} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0 \partial \rho} \right)^2 \right)^{1/4} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} \right)^{-1/2}. \quad (37)$$

Подставляя (36) в (35) и далее в (30), получаем однородную систему дифференциальных уравнений для определения Y :

$$\dot{Y}_m - A_m(t_1) Y_m = 0, \quad (38)$$

где

$$A_m(t_1) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} - a_1 \sin \sigma t_1 & -a_{2,m} - a_1 \cos \sigma t_1 \\ a_{2,m} + a_1 \cos \sigma t_1 & -\frac{\gamma}{2} + a_1 \sin \sigma t_1 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$a_1 = \frac{q^2 f_1(\varphi_0)}{4 \omega_0}, \quad a_{2,m} = a \frac{2m+1}{4 \omega_0}.$$

Процедура нахождения функций w_j в разложении (7) может быть продолжена. Однако при $j \geq 1$ неизвестные w_j следует рассматривать как функции аргументов $t, \mu t, \dots, \mu^{j+1} t$.

4. Параметрическая неустойчивость.

Нормальный прогиб оболочки определяется формулой

$$w^* = \left\{ H_m(\mu^{-1/2} (\varphi - \varphi_0) r) [S_m(\mu t) \sin \omega_0 t_0 + C_m(\mu t) \cos \omega_0 t_0] + O(\mu^{1/2}) \right\} \times \\ \times R \sin \left(\frac{\pi n s}{l} \right) \exp \left\{ i \mu^{-1} \left[\rho (\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} b (\varphi - \varphi_0)^2 \right] \right\}. \quad (40)$$

Ранее было замечено, что $\text{Im } b > 0$. Поэтому возбуждающиеся колебания на начальном отрезке времени сосредоточены в окрестности образующей $\varphi = \varphi_0$.

Формула (40), в зависимости от соотношения между параметрами a_1 , $a_{2,m}$, σ , γ , определяет неустойчивые или устойчивые колебания. В случае отсутствия вязкого трения ($\gamma = 0$) область неустойчивости для системы (38) была исследована в работе [3]. На рисунке 1 границы этой области показаны пунктирными линиями. Нами найдена область неустойчивости системы (38) при наличии вязкого трения (на рисунке 1 эта область заштрихована). Для точек (σ, a_1) , лежащих в заштрихованной области, амплитуды параметрических колебаний $S_m(\mu t)$, $C_m(\mu t)$ являются неограниченно растущими во времени функциями. За пределами заштрихованной области, если a_1 , $a_{2,m}$, $\sigma \sim 1$, амплитуды ограничены.

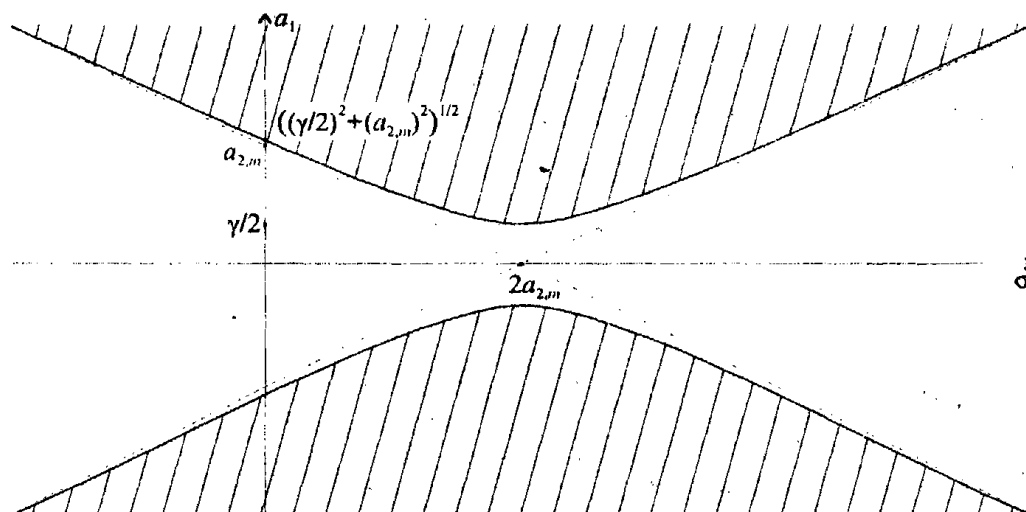


Рис. 1. Области неустойчивости системы уравнений (38).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mikhasev G.I.* Free and Parametric Vibrations of Cylindrical Shells under Static and Periodic Axial Loads // *Technische Mechanik*, 1997, Band 17, Heft 3. S.209-216.
2. *Товстук П.Е.* Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Наука. Физматлит, 1995. - 320 с.
3. *Mikhasev G.I., Kuntsevich S.P.* Thermoparametric Vibrations of Noncircular Cylindrical Shell in Non-stationary Temperature Field // *Technische Mechanik*, 1997, Band 17, Heft 2. S.113-120.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (грант №Т97—142).

S U M M A R Y

Influence of viscous damping to dynamic instability of a thin noncircular cylindrical shell under static and addition periodic axial loads is investigated.

The solutions of governing equations are found in the form of functions localized near the "weakest" generatrix on the shell surface.

The region of instability of a cylinder is determined.