13 Следствие. Равенство $\mathfrak{X}^*(n) = \mathfrak{X}(n)$ верно, если $\mathfrak{X}$ – любой из следующих классов: 1) всех групп; 2) всех конечных групп; 3) всех периодических групп; 4) всех локально конечных групп; 5) всех групп, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп; 6) всех групп, удовлетворяющих условию максимальности для подгрупп; 7) всех минимаксных групп; 8) всех групп конечного ранга; 9) всех черниковских групп; 10) всех полициклических групп; 11) всех конечных π-разрешимых групп; 12) всех (конечных) разрешимых групп.

Как видно из следствия 13, для многих классов групп $\mathfrak{X}$, их n-арные аналоги $\mathfrak{X}(n)$ и $\mathfrak{X}^*(n)$ при любом $n \geq 3$ совпадают. Поэтому, например, понятия периодичности и полупериодичности n-арных групп тождественны. Точно также, тождественны понятия разрешимости и полуразрешимости n-арных групп.

Для некоторых классов групп $\mathfrak{X}$ имеет место строгое включение $\mathfrak{X}^*(n) \subset \mathfrak{X}(n)$.

14. Пример. Если на симметрической группе S_3 определить тернарную операцию $[\alpha\beta\gamma] = \alpha\beta\gamma$, то множество B_3 всех нечётных подстановок из S_3 вместе с тернарной операцией [ ] превращается в тернарную группу, причём

$$(B_3)^* \simeq S_3\,,\ (B_3)_o \simeq A_3\,.$$

Так как S_3 – ненильпотентна, а A_3 – циклическая, то из

$$S_3 \notin N,\ A_3 \in \mathfrak{Z}$$

следуют строгие включения

$$\mathfrak{Z}^*(3) \subset \mathfrak{Z}(3),\ \mathfrak{A}^*(3) \subset \mathfrak{A}(3),\ N^*(3) \subset N(3).$$

Можно показать, что

$$\mathfrak{Z}^*(n) \subset \mathfrak{Z}(n),\ \mathfrak{A}^*(n) \subset \mathfrak{A}(n),\ N^*(n) \subset N(n)$$

для любого $n \geq 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Post E.L.*** Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48, N2. P.208-350.
2. ***Гальмак А.М.*** Многообразие $\mathfrak{X}(n)$ // Веснік ВДУ, 2000, № 2. С. 74-78.
3. ***Гальмак А.М.*** К определению класса $\mathfrak{X}(n)$ // Веснік ВДУ, 2000, № 1. С. 74-78.

SUMMARY

In this paper the klass of n-ary groups of the $\mathfrak{X}^*(n)$ form are defined and considered, where $\mathfrak{X}$ is klass of groups.

Поступила в редакцию 10.01.2001

УДК 512.542

С.Л. Максимов

Холлова характеризация конечных групп подгруппами Шмидта фиксированных рангов

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $E = G_0 \leq \ldots \leq G_s = G$ – главный ряд группы G. Тогда разрешимые главные факторы являются элементарными абелевыми примарными группами. Если G – неединичная разрешимая группа и $p_i^{n_i} = |G_{i+1}/G_i|$, то число $r(G) = \max n_i$ называется рангом группы G, [1]. Для единичной группы E полагают $r(E) = 0$. В силу теоремы Жордана–Гельдера [1, с. 63] любые два главных ряда группы G изоморфны, поэтому ранг разрешимой группы определяется однозначно.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Впервые эти группы рассматривались О.Ю. Шмидтом в 1924 г., который, в частности, доказал, что порядок таких групп делится в точности на два различных простых числа, причём одна из силовских подгрупп нормальна, а другая – циклическая [2]. Возможности больших приложений групп Шмидта впервые обсуждались в работе С.А. Чунихина [3], обратившего внимание на то, что каждая ненильпотентная группа обладает по крайней мере одной подгруппой Шмидта.

Максимальным рангом Шмидта группы назовем максимум рангов ее подгрупп Шмидта, а минимальным рангом Шмидта – минимум рангов ее подгрупп Шмидта. Если в группе нет подгрупп Шмидта, то группа нильпотентна, и ее максимальным и минимальным рангами Шмидта будем считать 0.

В настоящей работе получена характеризация групп подгруппами Шмидта фиксированных заданных рангов посредством перечисления её холловых бипримарных подгрупп.

Используются стандартные обозначения и определения [1, 4]. Для компактности изложения материала будем называть $S_{<p,q>}$-группой – группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой. Для $S_{<p,q>}$-группы S будем использовать запись $S = [P]Q$, где P – нормальная силовская p-подгруппа, а Q – циклическая ненормальная силовская q-подгруппа. Используемые свойства групп Шмидта можно найти в [1-6].

Лемма 1. *Пусть* p *и* q *– различные простые числа и* m *– показатель* p *по модулю* q, *т.е.* m *– наименьшее натуральное число, для которого* q *делит* $(p^m - 1)$. *Тогда любая* $S_{<p,q>}$*-группа имеет ранг* m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ещё О.Ю. Шмидт [1] доказал, что главные факторы любой $S_{<p,q>}$-группы имеют порядки p^m, q а для некоторых групп добавляется еще и p. Поэтому любая $S_{<p,q>}$-группа имеет ранг m.

Лемма 2. *Если* {p,q}*-группа не* q*-замкнута, то в ней существует* $S_{<p,q>}$*-подгруппа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – не q-замкнутая {p,q}-группа. По индукции все собственные подгруппы q-замкнуты. Согласно теореме IV.5.4 [1], если в группе G каждая собственная подгруппа p-нильпотентна, то либо группа G p-нильпотентна, либо G – $S_{<p,q>}$-группа. Поэтому G – $S_{<p,q>}$-группа.

Лемма 3. *Пусть* m *– натуральное число и* G *– группа максимального ранга Шмидта т. Тогда:*

(1) если H *– подгруппа группы* G, *то максимальный ранг Шмидта подгруппы* H *не превышает т;*

(2) если N *– нормальная подгруппа группы* G, *то максимальный ранг Шмидта группы* G/N *не превышает* m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Очевидно.

(2) Пусть m_1 – максимальный ранг Шмидта группы G/N. Тогда существует подгруппа Шмидта K/N в группе G/N, ранг которой равен m_1. Пусть для определенности K/N –$S_{<p,q>}$-подгруппа. Тогда m_1 – показатель p по модулю q по лемме 1. По лемме 1.8 [6] в группе K существует $S_{<p,q>}$-подгруппа, поэтому $m_1 \leq m$.

Лемма 4. *Пусть* m *– натуральное число и* G *– группа минимального ранга Шмидта* m. *Тогда:*

(1) если H *– ненильпотентная подгруппа группы* G*, то минимальный ранг Шмидта подгруппы* H *не меньше* m*;*

(2) если N *– нормальная подгруппа группы* G *и группа* G/N *ненильпотентна, то минимальный ранг Шмидта группы* G/N *не меньше* m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Очевидно.

(2) Пусть группа G/N ненильпотентна и m_1 – минимальный ранг Шмидта группы G/N. Тогда существует подгруппа Шмидта K/N в группе G/N, ранг которой равен m_1. Пусть для определенности K/N – $S_{<p,q>}$-подгруппа. Тогда m_1 – показатель p по модулю q по лемме 1. По лемме 1.8 [6] в группе K существует $S_{<p,q>}$-подгруппа, поэтому её ранг m_1 не может быть меньше минимального ранга Шмидта группы G, т.е. $m_1 \leq m$.

Дисперсивной {p,q}-группой называется {p,q}-группа с нормальной неединичной силовской подгруппой.

Лемма 5. *Пусть* G *– ненильпотентная* {2,3}*-группа. Тогда:*

(1) если группа G *2-замкнута, то её максимальный и минимальный ранги Шмидта равны 2;*

(2) если группа G *3-замкнута, то её максимальный и минимальный ранги Шмидта равны 1;*

(3) если группа G *недисперсивна, то её максимальный ранг Шмидта равен 2, а минимальный ранг Шмидта равен 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Пусть G – ненильпотентная 2-замкнутая {2,3}-группа. Тогда в группе G все подгруппы 2-замкнуты, поэтому в G нет $S_{<3,2>}$-подгрупп. Значит, каждая подгруппа Шмидта группы G является $S_{<2,3>}$-подгруппой. По лемме 1 ранги всех подгрупп Шмидта в группе равны 2, поэтому, максимальный и минимальный ранги Шмидта группы G равны 2.

(2) Пусть G – ненильпотентная 3-замкнутая {2,3}-группа. Тогда в группе G нет $S_{<2,3>}$-подгрупп, поэтому каждая подгруппа Шмидта группы G является $S_{<3,2>}$-подгруппой. По лемме 1 ранги всех подгрупп Шмидта в группе равны 1, поэтому максимальный и минимальный ранги Шмидта группы G равны 1.

(3) Пусть G – недисперсивная {2,3}-группа. Тогда по лемме 2 в группе G существуют $S_{<3,2>}$-подгруппы и $S_{<2,3>}$-подгруппы. Поэтому максимальный ранг Шмидта группы G равен 2, а минимальный ранг Шмидта равен 1.

Лемма 6. *Пусть* $p > 3$ *– простое число,* m *– показатель 2 по модулю* p *и* G *– ненильпотентная* {2,p}*-группа. Тогда:*

(1) если группа G *2-замкнута, то её максимальный и минимальный ранги Шмидта равны* m *и* $m > 2$*;*

(2) если группа G p*-замкнута, то её максимальный и минимальный ранги Шмидта равны 1;*

(3) если группа G *недисперсивна, то её максимальный ранг Шмидта равен* m *и* $m>2$*, а минимальный ранг Шмидта равен 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Пусть G – ненильпотентная 2-замкнутая {2,p}-группа. Тогда в группе G нет $S_{<p,2>}$-подгрупп, поэтому каждая подгруппа Шмидта группы G является $S_{<2,p>}$-подгруппой и максимальный и минимальный ранги Шмидта группы G равны m по лемме 1. Ясно, что $m > 2$.

(2) Пусть G – ненильпотентная p-замкнутая {2,p}-группа. Тогда в группе G нет $S_{<2,p>}$-подгрупп, поэтому каждая подгруппа Шмидта группы G является $S_{<p,2>}$-подгруппой и максимальный и минимальный ранги Шмидта группы G равны 1.

(3) Пусть G – недисперсивная группа. Тогда по лемме 2 в группе G существуют $S_{<p,2>}$-подгруппы и $S_{<2,p>}$-подгруппы. Поэтому максимальный ранг Шмидта группы G равен m, а минимальный ранг Шмидта равен 1.

Лемма 7. *Пусть* p, q *– различные простые нечетные числа,* m *– показатель* p *по модулю* q, *а* n *– показатель* q *по модулю* p, *и пусть* G *– ненильпотентная* {p,q}*-группа. Тогда:*

(1) если группа G p*-замкнута, то её максимальный и минимальный ранги Шмидта равны* m;

(2) если группа G q*-замкнута, то её максимальный и минимальный ранги Шмидта равны* n;

(3) если группа G *недисперсивна, то её максимальный ранг Шмидта равен* max{m, n}, *а минимальный ранг Шмидта равен* min{m, n}.

Доказательство. (1) Пусть G – ненильпотентная p-замкнутая {p,q}-группа. Тогда в группе G нет $S_{<q,p>}$-подгрупп, поэтому каждая подгруппа Шмидта группы G является $S_{<p,q>}$-подгруппой и максимальный и минимальный ранги Шмидта группы G равны m по лемме 1.

(2) Аналогично (1).

(3) Пусть G – недисперсивная группа. Тогда по лемме 2 в группе G существуют $S_{<p,q>}$-подгруппы и $S_{<q,p>}$-подгруппы. Используя лемму 1 получаем, что максимальный ранг Шмидта группы G равен max{m, n}, а минимальный – min{m, n}.

Относительно произвольного натурального числа m введем следующие определения. Пара различных простых чисел p и q называется a(m)-парой, если показатель числа p по модулю q и показатель числа q по модулю p не превышают числа m. Упорядоченная пара (p, q) различных простых чисел p и q называется b(m)-парой, если показатель числа p по модулю q не больше m, а показатель числа q по модулю p строго больше m. Пара различных простых чисел p и q называется c(m)-парой, если показатель числа p по модулю q и показатель числа q по модулю p строго больше m. Ясно, что для каждого натурального числа m любая пара различных простых чисел p и q является либо a(m)-парой, либо c(m)-парой, либо одна из упорядоченных пар (p,q) или (q,p) будет b(m)-парой. Поэтому для каждого натурального числа m множество всех неупорядоченных пар различных простых чисел распадается на три непересекающихся подмножеств, состоящих из a(m)-пар, b(m)-пар и c(m)-пар.

Лемма 8. *Пусть* m *– натуральное число и пара различных простых чисел* p *и* q *является* a(m)*-парой. Тогда:*

(1) любая {p,q}*-группа имеет максимальный ранг Шмидта* $\leq$ m;

(2) в группе минимального ранга Шмидта > m *каждая* {p,q}*-группа нильпотентна*

Доказательство. (1) Нильпотентные группы имеют максимальный ранг Шмидта, равный 0. Пусть G – произвольная ненильпотентная {p,q}-группа и S – её $S_{<p,q>}$-подгруппа. Так как числа p и q составляют a(m)-пару, то показатель p по модулю q не превышает m и по лемме 1 ранг группы S не превышает m. Аналогично, ранг $S_{<q,p>}$-подгруппы тоже ≤ m. Поэтому максимальный ранг Шмидта группы G не превышает m.

(2) Пусть группа G имеет минимальный ранг Шмидта > m. Предположим, что в группе G существует $S_{<p,q>}$-подгруппа S. Так как по лемме 1 ранг подгруппы S равен показателю p по модулю q и пара простых чисел p и q является a(m)-парой, то имеем противоречие. Поэтому в группе G нет $S_{<p,q>}$-подгрупп и по лемме 2 любая {p,q}-подгруппа в группе G является p-нильпотетной. Аналогично, в группе нет $S_{<q,p>}$-подгрупп, поэтому по лемме 2 любая {p,q}-подгруппа в группе G является q-нильпотетной. Таким образом, любая {p,q}-подгруппа в группе G нильпотентна.

Лемма 9. *Пусть* m *– натуральное число и упорядоченная пара* (p,q) *различных простых чисел является* b(m)*-парой. Тогда:*

(1) в группе максимального Шмидта $\leq$ m каждая {p,q}-группа является p-замкнутой;

(2) в группе минимального ранга Шмидта > m каждая {p,q}-группа является q-замкнутой.

Доказательство. (1) Пусть G – произвольная группа максимального ранга Шмидта $\leq$ m и S – её $S_{<q,p>}$-подгруппа. Так как упорядоченная пара (p,q) является b(m)-парой, то показатель q по модулю p строго больше m и по лемме 1 максимальный ранг Шмидта группы G строго больше m, противоречие. Поэтому в группе G нет $S_{<q,p>}$-подгрупп и по лемме 2 каждая {p,q}-подгруппа в группе G p-замкнута.

(2) Пусть группа G имеет минимальный ранг Шмидта > m. Предположим, что в группе G существует $S_{<p,q>}$-подгруппа S. Так как по лемме 1 ранг подгруппы S равен показателю p по модулю q и упорядоченная пара (p,q) является b(m)-парой, то ранг подгруппы S не больше m, противоречие. Поэтому в группе G нет $S_{<p,q>}$-подгрупп и по лемме 2 любая {p,q}-подгруппа в группе G является p-нильпотетной, т.е. q-замкнутой.

Лемма 10. *Пусть m – натуральное число и пара различных простых чисел p и q является c(m)-парой. Тогда:*

(1) любая ненильпотентная {p,q}-группа имеет минимальный ранг Шмидта >m;

(2) в группе максимального ранга Шмидта $\leq$ m каждая {p,q}-группа нильпотентна.

Доказательство. (1) Пусть G – произвольная ненильпотентная {p,q}-группа. Тогда в группе G существуют подгруппы Шмидта. Пусть S – произвольная подгруппа Шмидта группы G. По лемме 1 ранг подгруппы S больше m, поэтому минимальный ранг Шмидта {p,q}-группы G больше m.

(2) Пусть группа G имеет максимальный ранг Шмидта $\leq$ m. Предположим, что в группе G существует $S_{<p,q>}$-подгруппа S. Так как по лемме 1 ранг подгруппы S равен показателю p по модулю q и пара простых чисел p и q является c(m)-парой, то ранг S больше m, противоречие. Поэтому в группе G нет $S_{<p,q>}$-подгрупп и по лемме 2 любая {p,q}-подгруппа в группе G является p-нильпотетной. Аналогично, в группе нет $S_{<q,p>}$-подгрупп, поэтому по лемме 2 любая {p,q}-подгруппа в группе G является q-нильпотетной. Таким образом, любая {p,q}-подгруппа в группе G нильпотентна. Лемма доказана.

Пусть m – натуральное число и $i \in \{a,b,c\}$. Подгруппу H группы G будем называть i(m)-подгруппой, если H является {p,q}-подгруппой для некоторой упорядоченной i(m)-пары различных простых чисел p и q. Бипримарную холлову i(m)-подгруппу будем называть i(m)-холловой подгруппой.

Пусть H – i(m)-подгруппа. Тогда H является {p,q}-подгруппой для некоторой упорядоченной i(m)-пары простых чисел p и q. Если H p-замкнута, то подгруппу H будем называть 1-замкнутой i(m)-подгруппой. Если H q-замкнута, т.е. p-нильпотентна, то подгруппу H будем называть 1-нильпотентной i(m)-подгруппой.

Теорема 1. *Пусть m – натуральное число. Тогда и только тогда группа имеет максимальный ранг Шмидта $\leq$ m, когда все её b(m)-подгруппы 1-замкнуты, а c(m)-подгруппы нильпотентны.*

Доказательство. Пусть G – группа максимального ранга Шмидта $\leq$ m. Если H – b(m)-подгруппа, то H является {p,q}-подгруппой для некоторой упорядоченной b(m)-пары различных простых чисел p и q. По лемме 3 максимальный ранг Шмидта группы H $\leq$ m, а по лемме 9 подгруппа H p-замкнута. Поэтому H – 1-замкнутая b(m)-подгруппа.

Пусть K – c(m)-подгруппа группы G. Тогда K является {s,t}-подгруппой для некоторой упорядоченной c(m)-пары различных простых чисел s и t. По лемме

3 максимальный ранг Шмидта подгруппы K ≤ m, а по лемме 10 подгруппа нильпотентна K. Необходимость доказана.

Обратно, пусть в группе G все b(m)-подгруппы 1-замкнуты, а c(m)-подгруппы нильпотентны. Если G нильпотентна, то её максимальный ранг Шмидта равен 0 ≤ m. Пусть группа G ненильпотентна. Тогда в группе G существует подгруппа Шмидта. Пусть S – произвольная подгруппа Шмидта группы G. Тогда S является {p,q}-подгруппой для некоторой пары различных простых чисел p и q. Если числа p и q образуют a(m)-пару, то по лемме 8 ранг группы S ≤ m. Если числа p и q образуют b(m)-пару, то по условию подгруппа S должна быть 1-замкнутой. В нашем случае подгруппа S p-замкнута и не q-замкнута. Поэтому из определения b(m)-пары следует, что показатель p по модулю q не больше m. По лемме 1 ранг подгруппы S ≤ m. Если числа p и q образуют c(m)-пару, то по условию подгруппа S должна быть нильпотентной, что невозможно. Таким образом, ранг любой подгруппы Шмидта в группе G ≤ m, поэтому максимальный ранг Шмидта группы G ≤ m. Теорема доказана.

Следствие 1.1. Пусть m – натуральное число. Тогда и только тогда разрешимая группа имеет максимальный ранг Шмидта ≤ m, когда все её b(m)-холловы подгруппы 1-замкнуты, а c(m)-холловы подгруппы нильпотентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно вспомнить теорему Ф. Холла ([1], теорема VI.1.7) о вложении в разрешимых группах {p,q}-подгрупп в {p,q}-холловы подгруппы, а затем применить теорему 1.

Для m=1 получаем

Следствие 1.2. ([7], теорема 1) Тогда и только тогда в группе G все подгруппы Шмидта сверхразрешимы, когда группа G дисперсивна по Оре и для каждой пары простых чисел p > q, q не делит (p – 1), бипримарные {p,q}-холловы подгруппы группы G нильпотентны.

Теорема 2. *Пусть* m *– натуральное число. Тогда и только тогда группа имеет минимальный ранг Шмидта* > m, *когда она является ненильпотентной 2-замкнутой группой и все её* a(m)*-холловы подгруппы нильпотентны, а* b(m)*-холловы подгруппы 1-нильпотентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – группа минимального ранга Шмидта m. Тогда группа 2-замкнута по теореме 2 [7], в частности, группа G разрешима. По теореме VI.1.7 [1] в группе существуют бипримарные холловы подгруппы. Пусть H – a(m)-холлова подгруппа группы G. Тогда H является {p,q}-холловой подгруппой для некоторой упорядоченной a(m)-пары различных простых чисел p и q. Предположим, что подгруппа H ненильпотентна. Тогда по лемме 4 она имеет минимальный ранг Шмидта > m. По лемме 8 подгруппа H должна быть нильпотентной, противоречие. Итак все a(m)-холловы подгруппы в группе G нильпотентны.

Пусть K – b(m)-холлова подгруппа группы G. Тогда K является {s,t}-холловой подгруппой для некоторой упорядоченной b(m)-пары различных простых чисел s и t. Если подгруппа K нильпотентна, то она 1-нильпотентна. Если подгруппа K ненильпотентна, по лемме 4 её минимальный ранг Шмидта > m, а по лемме 9 подгруппа K t-замкнута, т.е. 1-нильпотентна. Итак все b(m)-холловы подгруппы в группе G 1-нильпотентны.

Обратно, пусть в разрешимой ненильпотентной группе G все a(m)-холловы подгруппы нильпотентны, а b(m)-холловы подгруппы 1-нильпотентны. Пусть S – произвольная подгруппа Шмидта группы G, она существует, поскольку группа G ненильпотентна. Тогда S является $S_{<p,q>}$-подгруппой для некоторой упорядоченной пары различных простых чисел p и q. По теореме Ф. Холла подгруппа S содержится в некоторой {p,q}-холловой подгруппе H. Так как H – не q-замкнутая подгруппа, то пара чисел p и q не является a(m)-парой. Предположим, что эта пара является b(m)-парой. Тогда подгруппа H должна быть q-замкнутой, противоречие. Поэтому либо (q,p) – a(m)-пара, либо (p,q) – a(m)-пара. В любом случае показатель p по модулю q больше m. Поэтому ранг подгруппы S больше m. Так как S – произвольная подгруппа Шмидта группы G, то минимальный ранг Шмидта группы G больше m. Теорема доказана.

Для m = 1 получаем

Следствие 2.1. ([7], теорема 2) Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда и только тогда в группе G все подгруппы Шмидта несверхразрешимы, когда группа G 2-замкнута, и для каждой пары простых чисел p > q, q делит (p – 1), {p,q}-холловы подгруппы группы G q-замкнуты.

Теорема 3. *Пусть* m *– натуральное число,* m > *1. Тогда и только тогда в ненильпотентной группе* G *все подгруппы Шмидта имеют ранг* m, *когда группа* G *2-замкнута, и выполняются следующие требования:*

(1) a(m – 1)*-холловы подгруппы нильпотентны;*

(2) b(m – 1)*-холловы подгруппы 1-нильпотентны;*

(3) b(m)*-холловы подгруппы 1-замкнуты;*

(4) c(m)*-холловы подгруппы нильпотентны.*

Доказательство. Пусть в ненильпотентной группе G все подгруппы Шмидта имеют ранг m $\geq$ 2. По теореме 2 [7] группа G 2-замкнута. По теореме 1 все её b(m)-холловы подгруппы 1-замкнуты, а c(m)-холловы подгруппы нильпотентны. Группа G имеет минимальный ранг Шмидта m > m – 1. По теореме 2 все её a(m – 1)-холловы подгруппы нильпотентны, а b(m – 1)-холловы подгруппы 1-нильпотентны. Необходимость доказана.

Обратно, пусть ненильпотентная 2-замкнутая группа G удовлетворяет требованиям (1) – (4). Пусть S – произвольная подгруппа Шмидта группы G. Тогда S является $S_{<p,q>}$-группой для некоторой упорядоченной пары различных простых чисел p и q. Пусть H – {p,q} –холлова подгруппа группы G, содержащая S. Тогда подгруппа H не q-замкнута. Из условий (1) – (4) следует, что пара (p,q) не является a(m – 1)-парой, b(m – 1)-парой и c(m)-парой. Так как (p,q) не является a(m – 1)-парой, то показатель p по модулю q больше (m – 1). Так как (p, q) не является c(m)-парой, то показатель p по модулю q не больше m. Таким образом показатель p по модулю q равен m и ранг подгруппы S равен m. Поскольку S – произвольная подгруппа Шмидта в группе G, то максимальные и минимальные ранги Шмидта группы G равны m. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Huppert B.*** Endliche Gruppen, I // Berlin-Heidelberg-New York: Springer. 1967.
2. ***Шмидт О.Ю.*** Группы, все подгруппы которых специальные // Матем. сб., 1924. Т.31. С. 366-372.
3. ***Чунихин С.А.*** О специальных группах // Матем. сб. 1929. Т.4, №3. С.512-530.
4. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп // М., 1978.
5. ***Шеметков Л.А.*** О.Ю. Шмидт и конечные группы // Укр. матем. ж., 1971. Т.23, N 5. С. 585-590.
6. ***Монахов В.С.*** О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры, 1998. Выпуск 13. С.153-171.
7. ***Монахов В.С.*** О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Матем. заметки, 1995. Т.58, № 5. С.717-722.

S U M M A R Y

All groups considered in this paper are finite. The main aim in this note is receipt the Hall subgroups structure of finite soluble group G with Schmidt subgroups have rung m for all natural m.

Поступила в редакцию 10.01.2001