содержащая S, Тогда L будет $\mathfrak{F}$–инъектирующей подгруппой группы G, и по следствию леммы 7, пронормальна в G. Теперь подгруппы $R\cap M = V\cap(M\cap N)$ и $S\cap N = L\cap(M\cap N)$ будут $\mathfrak{F}$–инъекторами подгруппы $M\cap N$ и по индукции сопряжены в $M\cap N$. Итак, $V\cap(M\cap N) = (L\cap(M\cap N))^g = L^g \cap (M\cap N)$, где $g\in M\cap N$. Так как $G/ M\cap N\in\mathfrak{H}$, то по лемме 9 подгруппы V и L^g сопряжены. Пусть $V = L^{gx}$, где $x\in G$. Тогда $V\cap M = L^{gx}\cap M = (L\cap M)^{gx} = S^{gx}$, и S^{gx} – $\mathfrak{F}$–инъектор подгруппы M. Существование $\mathfrak{F}$–инъекторов доказано. Сопряженность $\mathfrak{F}$–инъекторов следует непосредственно из леммы 9.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ во всякой π–разрешимой группе множество всех $\mathfrak{F}$-инъектирующих подгрупп группы G образует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$–инъекторов;*
2) *класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*).*

Следствие 2. *Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*), V – $\mathfrak{F}$-инъектор π-разрешимой группы G и $V \subseteq A \subseteq G$, то V будет $\mathfrak{F}$–инъектором подгруппы A.*

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite soluble groups. Berlin –New-York, 1992.
2. ***Кравчук М.И.*** О разрешимых и π-разрешимых конечных группах. ДАН БССР, II, 2, 1967. С. 97–100.
3. ***Сементовский В.Г.*** О пронормальных подгруппах конечных π–разрешимых групп // Веснік ВДУ, 2000, №3(17). С. 55–59.

SUMMARY

It is proved, that for a Fitting class $\mathfrak{F}$ for any π–soluble group exist a unique class of conjugated $\mathfrak{F}$–injectors if for any π–soluble group G of the form $G=WG_{\pi'}$, where W is a normal $\mathfrak{F}$–subgroup of G, any two $\mathfrak{F}$–maximal subgroup of G, constaining W, is conjugate.

Поступила в редакцию 16.05.2001

УДК 512.548

Г.Н. Воробьёв

К определению сопряженных подмножеств в n-арной группе

Переход от групп к n-арным группам приводит, как правило, к появлению нескольких n-арных аналогов одного и того же группового понятия. Так в теории полиадических групп важную роль играют инвариантные и полуинвариантные n-арные подгруппы [1, 2]. Рассматривая вместо n-арных подгрупп произвольные подмножества n-арной группы, А.М. Гальмак [3] определил и исследовал слабо инвариантные подмножества в n-арной группе. Учитывая тесную связь между инвариантностью и сопряженностью, возникает аналогичная задача определения и исследования слабо сопряженных подмножеств в n-арной группе, решению которой посвящена настоящая работа. Результаты этой работы анонсированы в [4].

Напомним некоторые понятия теории n-арных групп, используемые в работе.

Согласно Дёрнте, универсальная алгебра $< A, [\,] >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $[\,] : A^n \to A$ называется *n-арной группой*, если выполняются следующие условия:

1) n-арная операция $[\,]$ на множестве A ассоциативна, т.е.

$$[[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] = [a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+n}]a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}]$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и всех $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1} \in A$;

2) каждое из уравнений

$$[a_1 \ldots a_{i-1} x_i a_{i+1} \ldots a_n] = b,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

однозначно разрешимо в A относительно x_i для всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$.

N-арная подгруппа $< B, [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ называется *инвариантной* в ней, если

$$[x\underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{i-1}x\underbrace{B \ldots B}_{n-i}]$$

для любого $x \in A$ и всех $i = 2, 3, \ldots, n$. Если же последнее равенство выполняется только для $i = n$, то $< B, [\,] >$ называется *полуинвариантной* в $< A, [\,] >$.

Последовательность $e_1, \ldots, e_{k(n-1)}$ ($k \geq 1$) элементов n-арной группы $< A, [\,] >$ называется *нейтральной*, если

$$[e_1 \ldots e_{k(n-1)}a] = [ae_1 \ldots e_{k(n-1)}] = a$$

для любого $a \in A$.

Последовательность β элементов n-арной группы $< A, [\,] >$ называется *обратной* к последовательности α, составленной из элементов этой же n-арной группы, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными.

Нормализатором подмножества H в n-арной группе $< A, [\,] >$ называется множество всех элементов $x \in A$ таких, что $[xHx^{-1}] = H$, где x^{-1} – обратная последовательность для элемента x.

N-арные подгруппы $< H, [\,] >$ и $< K, [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ (подмножества H и K множества A), называются *сопряженными* в ней, если

$$H = [x_1^i K y_1^j], \tag{1}$$

где y_1^j – некоторая обратная последовательность для последовательности x_1^i ($x_i \in A$, $1 \leq i \leq n-1$). В работе [5] нами получено следующее эквивалентное определение сопряженности n-арных подгрупп в n-арной группе: n-арные подгруппы $< H, [\,] >$ и $< K, [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ называются *сопряженными* в ней, если

$$[x\overset{n-1}{K}] = [\overset{i-1}{H}x\overset{n-i}{K}],\ i = 2, \ldots, n \tag{2}$$

для некоторого $x \in A$.

Следующий пример показывает, что в случае произвольных подмножеств H и K в общем случае из (2) не следует (1).

Пример 1. На множестве T_n всех нечетных подстановок на n символах определим тернарную операцию $[xyz] = xyz$, производную от операции в симметрической группе S_n. Легко проверяется [6], что $< T_n, [\,] >$ – тернарная группа. Из определения операции $[\,]$ следует, что для любого $x \in T_n$ обратный элемент в тернарной группе $< T_n, [\,] >$ совпадает с обратным элементом в симметрической группе S_n.

Пусть теперь $n = 4$, и выпишем все элементы $b_i \in T_4$:

$b_1 = (1\ 2)$, $b_2 = (1\ 2\ 3\ 4)$, $b_3 = (1\ 3)$, $b_4 = (2\ 3)$, $b_5 = (1\ 3\ 4\ 2)$, $b_6 = (1\ 3\ 2\ 4)$, $b_7 = (1\ 4\ 2\ 3)$, $b_8 = (2\ 4)$, $b_9 = (1\ 4\ 3\ 2)$, $b_{10} = (1\ 4)$, $b_{11} = (1\ 2\ 4\ 3)$, $b_{12} = (3\ 4)$.

Пусть

$$K = \{b_1, b_7, b_{12}\},\ H = \{b_6, b_7, b_{12}\}$$

– подмножества множества T_4. Так как

$[b_7b_7b_7] = (1\ 4\ 2\ 3)\ (1\ 4\ 2\ 3)\ (1\ 4\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2\ 4) = b_6 \notin K$,

$[b_6b_{12}b_7] = (1\ 3\ 2\ 4)\ (3\ 4)\ (1\ 4\ 2\ 3) = (1\ 2) = b_1 \notin H$,

то подмножества H и K не замкнуты относительно тернарной операции [ ] и, следовательно, не являются тернарными подгруппами в < T_4, [ ] >.

Покажем, что для подмножеств H и K и некоторого $x \in T_4$ имеют место равенства (2), т. е.

$$[x\overset{2}{K}] = [HxK] = [\overset{2}{H}x].$$

Действительно, полагая $x = b_1$ и проведя соответствующие вычисления, получаем:

$[x\overset{2}{K}] = \{[b_1b_1b_1] = \{[b_1b_{12}b_{12}] = b_1, [b_1b_1b_7] = [b_1b_7b_{12}] = b_7, [b_1b_7b_1] = b_1b_{12}b_7] = b_6,$
$[b_1b_7b_7] = [b_1b_{12}b_1] = [b_1b_1b_{12}] = b_{12}\} = \{b_1, b_6, b_7, b_{12}\};$

$[\overset{2}{H}x] = \{[b_6b_7b_1] = [b_{12}b_{12}b_1] = [b_7b_6b_1] = b_1, [b_7b_{12}b_1] = [b_{12}b_6b_1] = b_6,$
$[b_{12}b_7b_1] = [b_6b_{12}b_1] = b_7, [b_7b_7b_1] = [b_6b_6b_1] = b_{12}\} = \{b_1, b_6, b_7, b_{12}\};$

$[HxK] = \{[b_7b_1b_7] = [b_{12}b_1b_{12}] = b_1, [b_7b_1b_{12}] = [b_6b_1b_1] = [b_{12}b_1b_7] = b_6,$
$[b_6b_1b_{12}] = [b_7b_1b_1] = b_7, [b_{12}b_1b_1] = [b_6b_1b_7] = b_{12}\} = \{b_1, b_6, b_7, b_{12}\}.$

Таким образом, мы показали, что для подмножеств H и K и элемента $x = b_1$ имеют место равенства (2).

Определим теперь подмножества тернарной группы < T_4, [ ] >, сопряженные в ней с подмножеством K. Так как $N_{T_4}(K) = \{b_6, b_7\} \neq \varnothing$, то по предложению 4.3 [2] все эти подмножества можно получить, если в качестве последовательности x_1^i в формуле (1) выбрать элементы $b_i \in T_4$ ($i = 1, 2, \ldots, 12$). Тогда будем иметь:

$[b_1Kb_1^{-1}] = \{[b_1b_1b_1], [b_1b_7b_1], [b_1b_{12}b_1]\} = \{b_1, b_6, b_{12}\};$

$[b_2Kb_2^{-1}] = \{[b_2b_1b_9], [b_2b_7b_9], [b_2b_{12}b_9]\} = \{b_4, b_{10}, b_{11}\};$

$[b_3Kb_3^{-1}] = \{[b_3b_1b_3], [b_3b_7b_3], [b_3b_{12}b_3]\} = \{b_4, b_5, b_{10}\};$

$[b_4Kb_4^{-1}] = \{[b_4b_1b_4], [b_4b_7b_4], [b_4b_{12}b_4]\} = \{b_3, b_8, b_9\};$

$[b_5Kb_5^{-1}] = \{[b_5b_1b_{11}], [b_5b_7b_{11}], [b_5b_{12}b_{11}]\} = \{b_2, b_3, b_8\};$

$[b_6Kb_6^{-1}] = \{[b_6b_1b_7], [b_6b_7b_7], [b_6b_{12}b_7]\} = \{b_1, b_7, b_{12}\};$

$[b_7Kb_7^{-1}] = \{[b_7b_1b_6], [b_7b_7b_6], [b_7b_{12}b_6]\} = \{b_1, b_7, b_{12}\};$

$[b_8Kb_8^{-1}] = \{[b_8b_1b_8], [b_8b_7b_8], [b_8b_{12}b_8]\} = \{b_4, b_{10}, b_{11}\};$

$[b_9Kb_9^{-1}] = \{[b_9b_1b_2], [b_9b_7b_2], [b_9b_{12}b_2]\} = \{b_4, b_5, b_{10}\};$

$[b_{10}Kb_{10}^{-1}] = \{[b_{10}b_1b_{10}], [b_{10}b_7b_{10}], [b_{10}b_{12}b_{10}]\} = \{b_2, b_3, b_8\};$

$[b_{11}Kb_{11}^{-1}] = \{[b_{11}b_1b_5], [b_{11}b_7b_5], [b_{11}b_{12}b_5]\} = \{b_3, b_8\ b_9\};$

$[b_{12}Kb_{12}^{-1}] = \{[b_{12}b_1b_{12}], [b_{12}b_7b_{12}], [b_{12}b_{12}b_{12}]\} = \{b_1, b_6, b_{12}\}.$

Среди полученных шести подмножеств, сопряженных с K в T_4, нет подмножества $H = \{b_6, b_7, b_{12}\}$. Следовательно, подмножества H и K не сопряжены в смысле (1).

По аналогии с определением слабой инвариантности произвольных подмножеств в n-арной группе [3] введем следующее

Определение 1. *Подмножество* K *n-арной группы* < A, [ ] > *назовем слабо* *сопряженным в ней посредством элемента* $x \in A$ *с подмножеством* H, *если верны равенства (2). В этом случае будем говорить, что подмножества* H *и* K *слабо сопряжены в* $< A, [\,] >$.

Аналогично, если в определении 2 [5, 7] полусопряженных n-арных подгрупп заменить n-арные подгруппы на произвольные подмножества, то получим следующее определение полусопряженных подмножеств.

Определение 2. *Подмножество* K *n-арной группы* $< A, [\,] >$ *назовем полусопряженным в ней посредством элемента* $x \in A$ *с подмножеством* H, *если*

$$[x \overset{n-1}{K}] = [\overset{n-1}{H} x].$$

Пусть:

$\mathcal{K}(K)$ – множество всех подмножеств n-арной группы $< A, [\,] >$, сопряженных в ней с подмножеством K;

$\mathcal{DK}(K)$ – множество всех подмножеств n-арной группы $< A, [\,] >$, слабо сопряженных в ней с подмножеством K;

$\mathcal{HK}(K)$ – множество всех подмножеств n-арной группы $< A, [\,] >$, полусопряженных в ней с подмножеством K.

Теорема. *Пусть* H *и* K *– подмножества n-арной группы* $< A, [\,] >$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если подмножества* H *и* K *сопряжены в* $< A, [\,] >$ *некоторым элементом* $x \in A$, *то они и слабо сопряжены в* $< A, [\,] >$ *этим же элементом;*

2) *если подмножества* H *и* K *слабо сопряжены в* $< A, [\,] >$ *некоторым элементом* $x \in A$, *то они и полусопряжены в* $< A, [\,] >$ *этим же элементом;*

3) $\mathcal{DK}(K) \subseteq \mathcal{HK}(K)$;

4) *Если* $N_A(K) \neq \varnothing$, *то* $\mathcal{K}(K) \subseteq \mathcal{DK}(K)$.

Доказательство. 1). Пусть имеет место равенство

$$H = [xKx^{-1}] \tag{3}$$

для некоторого $x \in A$, где x^{-1} – некоторая обратная последовательность для элемента x. Учитывая нейтральность последовательностей xx^{-1} и $x^{-1}x$, из (3) получаем

$$[x^{-1}Hx] = [x^{-1}[xKx^{-1}]x], \qquad [x^{-1}Hx] = [x^{-1}xKx^{-1}x], \qquad [x^{-1}Hx] = K.$$

Используя последнее равенство, будем иметь

$$[x \overset{n-1}{K}] = [x \underbrace{K\ldots K}_{i-1} \overset{n-i}{K}] = [x \underbrace{[x^{-1}Hx]\ldots[x^{-1}Hx]}_{i-1} \overset{n-i}{K}] = [\underbrace{[xx^{-1}H]\ldots[xx^{-1}H]}_{i-1} x \overset{n-i}{K}] =$$

$$= [\underbrace{H\ldots H}_{i-1} x \overset{n-i}{K}] = [\overset{i-1}{H} x \overset{n-i}{K}]$$

для любого $i = 2, \ldots, n$. Откуда и следуют равенства (2).

2). Очевидно.

3). Вытекает из 2).

4). Если $N_A(K) \neq \varnothing$, то по предложению 4.3 [2]

$$\mathcal{K}(K) = \{xKx^{-1} \mid x \in A\},$$

где x^{-1} – некоторая обратная последовательность для элемента x. Теперь из 1) вытекает $\mathcal{K}(K) \subseteq \mathcal{DK}(K)$. Теорема доказана.

В утверждении 4) теоремы условие $N_A(K) \neq \varnothing$ отбросить в общем случае нельзя, о чем свидетельствует

Пример 2. Пусть $K = \{b_1, b_2\}$ – подмножество тернарной группы отражений правильного шестиугольника $< B_6, [\,] >$. Используя таблицу сопряженности элементов в $< B_6, [\,] >$ [8], определяем, что $N_{B_6}(K) = \varnothing$ и класс сопряженных подмножеств тернарной группы $< B_6, [\,] >$ для подмножества K есть множество

$\mathcal{K}(K) = \{\{b_1, b_2\}, \{b_1, b_6\}, \{b_2, b_3\}, \{b_3, b_4\}, \{b_4, b_5\}, \{b_5, b_6\}\}$.

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться, что

$\mathcal{DK}(K) = \{\{ b_1, b_6\}, \{ b_2, b_3\}, \{ b_4, b_5\}\}$.

Следовательно, включение из 4) доказанной теоремы не выполняется.

Пример 1 показывает, что слабая сопряженность подмножеств в n-арной группе шире сопряженности. Из определения 1 следует, что на n-арных подгруппах понятия сопряженности и слабой сопряженности совпадают. Так как нормализатор любой n-арной подгруппы не пуст, то для любой n-арной подгруппы < K, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > верно $\mathcal{K}(K) = \mathcal{DK}(K) \subseteq \mathcal{HK}(K)$.

Так как при n > 2 существуют полусопряженные n-арные подгруппы, не являющиеся сопряженными, то понятие полусопряженности подмножеств шире слабой сопряженности подмножеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Dörnte W.*** Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // Math. Z., 1928. Bd. 29. S. 1-19.
2. ***Русаков С.А.*** Алгебраические n-арные системы. Мн., 1992. –264 с.
3. ***Гальмак А.М.*** К определению инвариантных подмножеств в n-арной группе // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова, 1999, №2-3(3). С. 88-90.
4. ***Воробьев Г.Н.*** Слабо сопряженные подмножества n-арной группы // VIII Белорусская матем. конф. Тез. докл. Ч. 2. Мн., 2000. С. 24.
5. ***Воробьев Г.Н.*** К вопросу о сопряженности n-арных подгрупп в n-арной группе // Материалы республиканской научно-методической конф. Ч. II. Мн., 1995. С. 121.
6. ***Гальмак А.М.*** Теоремы Поста и Глускина-Хоссу. Гомель, 1997. – 85 с.
7. ***Воробьев Г.Н.*** О полусопряженности n-арных подгрупп // Вопросы алгебры. Гомель, 1997. Вып. 10. С.157-163.
8. ***Гальмак А.М. Воробьёв Г.Н.*** Тернарные группы отражений. Мн., 1998. С. 105.

SUMMARY

Weakly conjugate subsets in n-ary groups are defined and studied in this paper.

Поступила в редакцию 6.06.2001

УДК 521.542

Е.Е. Грибовская

О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп с индексами максимальных подгрупп p, p^2 или 8

Следуя монографии [1] для произвольной конечной группы G через $\Phi_k(G)$ будем обозначать пересечение максимальных подгрупп группы G, индексы которых не равны p^i для каждых простого p и каждого натурального $i \le k$. М.В. Селькин ([1], теорема 3.4.2) показал, что в любой конечной группе G подгруппа $\Phi_1(G)$ сверхразрешима, а $\Phi_2(G)$ разрешима. При $k \ge 3$ существуют конечные группы X с неразрешимой подгруппой $\Phi_k(X)$.

В настоящей работе исследуется строение подгруппы $\Phi_2(G)$. В частности, доказывается, что 2-длина $l_2(\Phi_2(G)) \le 2$, p-длина $l_p(\Phi_2(G)) \le 1$ для любого не-