УДК 539.3: 534.1

Е.А. Корчевская

К вопросу об устойчивости слоистых цилиндрических оболочек, подверженных действию неоднородного сжатия

Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку. В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность оболочки, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам α_1= Rs, α_2= Rφ. Здесь R – радиус цилиндра исходной поверхности, φ и s – окружная и продольная координаты соответственно. Оболочка подвержена действию неравномерно распределенной по контуру осевой сжимающей силы. Под действием осевой сжимающей силы в оболочке возникают осевые усилия $T_1^0(\varphi)$.

Для описания локальной бифуркации безмоментного напряженного состояния, используем систему полубезмоментных уравнений слоистых оболочек [1]:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\left(1-\varepsilon^3\tau\Delta\right)\Delta^2\chi+\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}+\lambda t(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\chi-\varepsilon^3\kappa\Delta\chi\right)=0 \\ &\varepsilon^2\Delta^2 F-\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\chi-\varepsilon^3\kappa\Delta\chi\right)=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

записанную в безразмерном виде, где Δ-оператор Лапласа в криволинейной системе координат φ, s , F,χ – функции напряжений и перемещений, $\lambda>0$ – параметр нагружения, t(φ) – бесконечно дифференцируемая функция, ε – малый параметр, характеризующий тонкостенность оболочки. Здесь τ,κ – параметры, учитывающие поперечные сдвиги. Ранее в [2] был рассмотрен случай более сильной зависимости от параметров τ и κ. Осевые усилия $T_1^0(\varphi)$ связаны с функцией t(φ) следующим образом:

$$T_1^0(\varphi)=-\lambda Eh\varepsilon^2 t(\varphi). \qquad (2)$$

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания.

$$F=\Delta F=\chi=\Delta\chi=\Delta^2\chi=0, \text{ при s=0,l.} \qquad (3)$$

Задача состоит в определении наименьшего $\lambda>0$, для которого краевая задача (1), (3) имеет ненулевое решение.

Считаем, что потеря устойчивости происходит в окрестности некоторой образующей $\varphi=\varphi_0$, называемой «слабой образующей». Введем растяжение масштаба в окрестности этой образующей:

$$\varphi=\varphi_0+\varepsilon^{1/2}\xi. \qquad (4)$$

Согласно [3] решение задачи (1), (3) будем искать в виде:

$$\chi=\chi_m(\varphi)\sin\left(p_m s/\varepsilon\right),\ F=\Phi_m(\varphi)\sin\left(p_m s/\varepsilon\right),\ p_m=m\pi\varepsilon/l,\ m=1,2,\ldots, \qquad (5)$$

где

$$\chi_m=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\chi_{mj}(\xi)\exp\left\{i\left(\varepsilon^{-1/2}q\xi+\frac{1}{2}a\xi^2\right)\right\},$$

$$\Phi_m = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} f_{mj}(\xi) \exp\left\{ i\left(\varepsilon^{-1/2} q\xi + \frac{1}{2} a\xi^2 \right)\right\},$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots, \ \ \mathrm{Im}\, a > 0. \qquad (6)$$

Последнее неравенство гарантирует убывание амплитуды волн вдали от линии $\varphi = \varphi_0$.

Разложим функцию t(φ) в ряд в окрестности этой образующей:

$$t(\varphi) = t(\varphi_0) + \varepsilon^{1/2} t'(\varphi_0)\xi + \frac{1}{2}\varepsilon t''(\varphi_0)\xi^2 + \ldots. \qquad (7)$$

Подставляя (6), (7) в (1), (3), получим последовательность алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{j} A_k X_{j-k} = 0, \ j = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (8)$$

относительно вектор-функции $X_j = (\chi_{mj}, f_{mj})^T$, где элементы матрицы A_0 задаются соотношениями

$$A_0^{(11)} = (p_m^2 + q^2)^2 - \lambda_0 t(\varphi_0) p_m^2, \ A_0^{(12)} = -p_m^2,$$

$$A_0^{(21)} = p_m^2, \ A_0^{(22)} = (p_m^2 + q^2)^2, \qquad (9)$$

а элементы матрицы A_j при $j \geq 1$ выражаются через производные по q и φ_0 j - го порядка элементов матрицы A_0 [4].

Рассмотрим уравнения (8) последовательно. При $j = 0$ имеем однородную систему уравнений $A_0 X_0 = 0$. Из условия существования нетривиального решения этой системы находим:

$$\lambda_0(q, \varphi_0, p_m) = \frac{(p_m^2 + q^2)^2}{t(\varphi_0) p_m^2} + \frac{p_m^2}{t(\varphi_0)(p_m^2 + q^2)^2}. \qquad (10)$$

Фиксируя число m (а значит и параметр p_m), найдем

$$\lambda_0^0 = \min_{q, \varphi_0} \lambda_0(q, \varphi_0, p_m) = \lambda_0(q^0, \varphi_0^0, p_m). \qquad (11)$$

Возможны три случая: A) $p_m > 1$, B) $p_m < 1$, C) $p_m \approx 1$.

Рассмотрим сначала первые два.

При $p_m > 1$ имеем

$$\lambda_0^0 = \frac{p_m^4 + 1}{2p_m^2}, \ q^0 = 0, \qquad (12)$$

При $p_m < 1$

$$\lambda_0^0 = 1, \ q^0 = \sqrt{p_m(1 - p_m)}. \qquad (13)$$

Образующая $\varphi = \varphi_0$ находится из условия

$$t'(\varphi_0) = 0. \qquad (14)$$

Здесь принято $t(\varphi_0^0) = 2$ и $t''(\varphi_0) < 0$.

Решение системы (8) при $j = 0$ запишем в виде

$$X_0(\xi)=P_0(\xi)\mathrm{Y}^0, \tag{15}$$

где $P_0(\xi)$ неизвестный полином, а $\mathrm{Y}^0=\left(1,\ -A_0^{(11)}/A_0^{(12)}\right)$- двумерный вектор.

При $j=1$ система уравнений (8) является неоднородной. Но при условиях (12), (14) или (13), (14) она обращается в систему тождеств.

При $j=2$ система (8) является неоднородной. Условие ее совместности [3] приводит к соотношению для вычисления параметра a:

$$a=i\left(\lambda_{\varphi\varphi}^0/\lambda_{qq}^0\right)^{1/2}, \tag{16}$$

а также к уравнению относительно $P_0(\xi)$:

$$\frac{d^2P_0}{d\xi^2}+ia\left[2\xi\frac{dP_0}{d\xi}+P_0\right]+\frac{2\lambda_1}{\lambda_{qq}^0}P_0+D=0, \tag{17}$$

где

$$D=\frac{p_m^8}{2\left(p_m^4-1\right)}(\kappa-\tau)P_0 \text{ при } p_m>1, \tag{18}$$

$$D=\frac{p_m^2}{16(1-p_m)}(\kappa-\tau)P_0 \text{ при } p_m<1. \tag{19}$$

При

$$\lambda_1=\lambda_1^{(n)}=\left(\frac{1}{2}+n\right)\sqrt{\lambda_{qq}^0\lambda_{\varphi\varphi}^0}+\eta, \tag{20}$$

где $\eta=-\dfrac{p_m^4}{2}(\kappa-\tau)$ (случай А), и $\eta=-8p_m(\kappa-\tau)$ (в случае В), уравнение (17) имеет решение в виде полинома Эрмита степени n:

$$P_0(\xi)=H_n(\theta),\ \theta=\sqrt{c}\,\xi,\ c=-ia. \tag{21}$$

Тогда

$$a=i\left\{\frac{p_m^2\left(1+p_m^4\right)\left[-t''(\varphi_0)\right]}{8\left(p_m^4-1\right)}\right\}^{1/2} \text{ для } p_m>1 \tag{22}$$

и

$$a=i\left\{\frac{p_m\left[-t''(\varphi_0)\right]}{32\left(1-p_m\right)}\right\}^{1/2} \text{ при } p_m<1. \tag{23}$$

Найденная здесь поправка λ_1 учитывает наличие поперечных сдвигов (зависимость от параметров τ и κ) и обобщает аналогичную формулу, полученную в [3] для изотропной оболочки.

Рассмотрим теперь систему (1) в случае, когда $p_m\approx 1$. Заметим, что данный случай не был рассмотрен в [2].

Решение уравнений (1) ищем в том же виде (5). Положим

$$p_m=1+\mu p',\ \lambda=1+\mu^2\lambda',\ \varepsilon=\mu^{3/2},\ \varphi-\varphi_0=\mu\eta,\ \tau'=\tau\varepsilon^{-1/2},\ \kappa'=\kappa\varepsilon^{-1/2}. \tag{24}$$

Представим неизвестные χ_m и Φ_m в виде рядов:

$$\chi_m=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\chi_m^{(k)}(\eta),\ \Phi_m=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\Phi_m^{(k)}(\eta). \tag{25}$$

После подстановки (7), (25) в систему (1) приходим к дифференциальному уравнению относительно $\chi_m^{(0)}$

$$4\frac{d^4\chi_m^{(0)}}{d\eta^4}-8p'\frac{d^2\chi_m^{(0)}}{d\eta^2}+\chi_m^{(0)}\left\{(\tau'-\kappa')+4p'^2-\frac{1}{2}t''(\varphi_0)\eta^2-2\lambda'\right\}=0. \tag{26}$$

Решение уравнения (26), удовлетворяющее условию затухания $\chi_m^{(0)}\to 0$ при $\eta\to\pm\infty$, ищем с использованием преобразования Фурье:

$$\chi_m^{(0)}(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}W^F(\omega)\exp(i\omega\eta)d\omega. \tag{27}$$

Применив преобразование (27), получим уравнение

$$\frac{d^2W^F}{dx^2}+\left[\tilde{\Lambda}-\left(x^2+l\right)^2\right]W^F=0, \tag{28}$$

где

$$\tilde{\Lambda}=\frac{\lambda'}{2}\left(\frac{4}{b}\right)^{2/3}+\frac{(\kappa'-\tau')}{(2b)^{2/3}},\ x=\left(\frac{b}{4}\right)^{-1/6}\omega,\ l=p'\left(\frac{4}{b}\right)^{1/3},\ b=-\frac{1}{2}t''(\varphi_0). \tag{29}$$

Для каждого l существует счетное множество $\tilde{\Lambda}_i(l)$, при которых существует нетривиальные решения уравнения (28), стремящиеся к нулю, при $x\to\pm\infty$.

В [3] найдено, что функция $\tilde{\Lambda}_0(l)$ принимает наименьшее значение $\tilde{\Lambda}_0=0.905$ при $l=-0.44$. Отсюда критическая нагрузка минимальна при

$$p_m=1-0.44\varepsilon^{2/3}\left(\frac{b}{4}\right)^{1/3} \tag{30}$$

и равна

$$\lambda_{\min}=1+2\varepsilon^{4/3}\left(\frac{b}{4}\right)^{2/3}\left(0.905-\frac{\kappa'-\tau'}{(2b)^{2/3}}\right). \tag{31}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Григолюк Э.И., Куликов Г.М.*** Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. М., 1988. – 287 с.
2. ***Михасев Г.И., Згирская О.М.*** Локальная потеря устойчивости тонкой слоистой цилиндрической оболочки при неоднородном осевом сжатии // Веснік ВДУ, 2001, № 4. С. 90-93.
3. ***Товстик П. Е.*** Устойчивость тонких оболочек. М., 1995. – 320 с.
4. ***Mikhasev G., Seeger F., Gabbert U.*** Local Buckling of Composit Laminated Cylindrical Shells with Oblique Edges under External Pressure: Asymptotic and Finite Element Simulations//Technische Mechanik, Band 21, Heft 1, (2001). P. 1-12.

SUMMARY

Using the asymptotic complex WKB-method, local buckling of the membrane strain-stress state of a thin laminated composite cylindrical shell under non-uniform axial compression is investigated. The critical load parameters were found.

Поступила в редакцию 26.06.2003