УДК 517.929

Н.Л. Слепченков

О существовании правильных и целых решений нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

1. Введение

Рассматривается уравнение

$$u^{(n)} = \varphi(r, u, u', \ldots, u^{(n-1)}), \quad n > 2, \quad r > 0, \tag{1.1}$$

где $\varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ – неотрицательная функция с областью определения dom $\varphi = R_0 \times R_+^n$ или dom $\varphi = R_0 \times R^n$. Здесь $R_0 = [0,\infty)$, $R_+ = (0,\infty)$. Функция $\varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ принадлежит классу Каратеодори $K_{loc}(R_0 \times D)$, где $D = R_+^n$ или $D = R^n$.

Через $\tilde{C}^k[a,\infty)$ обозначим множество функций u: $[a,+\infty) \to R$, абсолютно непрерывных вместе со своими производными до порядка k включительно с топологией равномерной сходимости всех производных до порядка k на любом компактном подмножестве $[a,+\infty)$.

Под правильными решениями уравнения (1.1) будем понимать функции $u(r) \in \tilde{C}^{n-1}(R_0)$, удовлетворяющие уравнению (1.1) в R_0. Под правильными на множестве R_A, $R_A = [A,+\infty)$, $A > 0$ решениями уравнения (1.1) будем понимать функции $u(r) \in \tilde{C}^{n-1}(R_A)$, удовлетворяющие уравнению (1.1) в R_A. Под целыми решениями уравнения (1.1) будем понимать функции $u(r) \in \tilde{C}^{n-1}(R)$, удовлетворяющие уравнению (1.1) в R.

Важнейшим частным случаем уравнения (1.1) является уравнение Эмдена – Фаулера

$$u^{(n)} = k(r)\,|u|^{\lambda}\,\mathrm{sign}\,u, \quad \lambda > 1. \tag{1.2}$$

Условия существования правильных на R_A решений уравнения (1.2) были получены И.Т. Кигурадзе совместно с Г.Г. Квиникадзе. Их можно найти, например, в [1]. Уравнение (1.1) рассматривалось в ряде работ, в том числе в [1, 2], где получены условия существования правильных на R_A решений уравнения (1.1) для достаточно большого A. В этих работах предполагается, что $\varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ не убывает по каждой из переменных u_i, $0 < i \le n-1$.

Вопросам существования и отсутствия целых решений нелинейных эллиптических уравнений посвящено много работ (см., например, [3–6]). В [3] и [4] исследовались эллиптические уравнения высокого порядка, являющиеся аналогами уравнения (1.1). В частности, в этих работах установлено существование целых решений, т.е. классических решений уравнения, определенных во всем пространстве.

Целью настоящей работы является доказательство новых теорем существования правильных и целых решений уравнения (1.1), имеющих степенную асимптотику

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u(r)}{|r|^{n-1}} = \mathrm{const} \in (0,+\infty)\,. \tag{1.3}$$

Во втором пункте будет изучаться проблема существования правильных решений, начальные данные которых удовлетворяют неравенствам

$$u^{(i)}(0) \ge 0,\ 0 \le i \le n-1,\quad \sum_{i=0}^{n-1} u^{(i)}(0) > 0 \ \text{ при } \operatorname{dom}\varphi = R_0\times R_+^n, \tag{1.4}$$

$$u^{(n-1)}(0) > 0 \ \text{при } \operatorname{dom}\varphi = R_0\times R^n. \tag{1.5}$$

В третьем пункте будут рассматриваться целые решения уравнения (1.1) при $n = 2m$, $m \in N$. Относительно функции $\varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$, $r \in R$ будут делаться те же предположения.

В четвертом пункте будут даны условия существования правильных и целых решений для частного вида уравнения (1.1), а именно для полулинейного уравнения.

2. Условия существования правильных решений

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ *не убывает по каждой из переменных* u_i, $0 < i < n-1$, *и выполняются следующие условия:*

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^{-1}\varphi(r,\lambda u_0,\ldots,\lambda u_{n-1}) \text{ не убывает по } \lambda\in(0,c] \text{ для некоторой } c>0,\\ \lim\limits_{\lambda\to+0}\lambda^{-1}\varphi(r,\lambda u_0,\ldots,\lambda u_{n-1}) = 0 \text{ для всех } (r,u_0,\ldots,u_{n-1})\in \mathbf{R}_0\times\mathbf{R}_+^n\\ \qquad\qquad \text{при } \operatorname{dom}\varphi = \mathbf{R}_0\times\mathbf{R}_+^n \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

или $\lim\limits_{u_0\to-\infty}\varphi(r,u_0,\ldots,u_{n-1}) = 0$ *для всех* $(r, u_0,\ldots, u_{n-1}) \in R_0\times R^n$ *при* $\operatorname{dom}\varphi = R_0\times R^n$.

$$\tag{2.2}$$

Тогда, если $\int\limits_0^{+\infty}\varphi(s, cs^{n-1}, cs^{n-2},\ldots,c)\,ds < +\infty$ (2.3)

с некоторой положительной постоянной с, то уравнение (1.1) *имеет бесконечно много правильных решений с асимптотическим свойством* (1.3) *с начальными данными, удовлетворяющими* (1.4), *в случае* $\operatorname{dom}\varphi = R_0\times R_+^n$ *или с начальными данными, удовлетворяющими* (1.5), *в случае* $\operatorname{dom}\varphi = R_0\times R^n$.

Доказательство.

I. Пусть сначала выполнены условия (2.1) и (2.3). Рассмотрим следующую начальную задачу

$$\begin{cases} u^{(n)} = \varphi(r,u,u',\ldots,u^{(n-1)}),\\ u^{(n-1)}(0) = (n-1)!\alpha,\ u^{(n-2)}(0) = (n-2)!\beta,\ u(0) = \alpha,\\ u^{(i)}(0) = 0,\ 1 \le i \le n-3, \end{cases} \tag{2.4}$$

где параметры α и β будут определены ниже. Интегрируя (1.1) по отрезку $[0,t]$ получим уравнение

$$u^{(n-1)}(t)-u^{(n-1)}(0)=\int_0^t\varphi(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s))\,ds.$$

После повторного интегрирования с учетом начальных условий находим

$$u^{(n-2)}(r)=(n-1)!\alpha r+\int_0^r dt\int_0^t\varphi(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s))\;ds.$$

Изменив порядок интегрирования, будем иметь

$$u^{(n-2)}(r)=(n-1)!\alpha r+\int_0^r(r-s)\;\varphi(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s))\;ds.$$

Применяя последовательно этот процесс, получим

$$u(r)=\alpha(1+r^{n-1})+\beta r^{n-2}+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^r(r-s)^{n-1}\;\varphi(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s))\;ds.$$

Определим вспомогательную функцию $\ell(r)$ и вспомогательные константы $\rho_{k,i}$ и ρ_i следующим образом:

$$\ell(r)=\max_{r\geq 0}\{1,r\},\tag{2.5}$$

$$\rho_{k,i}=\frac{k!}{(k-i)!},\;0\leq i\leq k,\;\rho_i=\rho_{n-1,i}.\tag{2.6}$$

Положим $\beta=0$ и через ε_1 обозначим некоторую положительную постоянную. Из условия (2.1) и теоремы Лебега следует, что

$$\lim_{\lambda\to+0}\int_0^{+\infty}\lambda^{-1}\,\varphi(s,\lambda[\ell(s)]^{n-1},\lambda[\ell(s)]^{n-2},\dots,\lambda)\,ds=0.$$

С учетом этого выберем α следующим образом:

$$\alpha^{-1}\int_0^{+\infty}\varphi(s,\alpha\rho_0(1+(1+\varepsilon_1)[\ell(s)]^{n-1}),\alpha\rho_1(1+\varepsilon_1)[\ell(s)]^{n-2},\dots,\alpha\rho_{n-1}(1+\varepsilon_1))\,ds<\varepsilon_1.\tag{2.7}$$

Далее определим выпуклое множество функций U в $\tilde{C}^{n-1}[0,+\infty)$, а также оператор T следующим образом:

$$U=\Big\{u(r)\in\tilde{C}^{n-1}[0,+\infty):\alpha(1+r^{n-1})<u(r)\leq\alpha(1+(1+\varepsilon_1)[\ell(r)]^{n-1}),$$
$$\alpha\rho_i r^{n-1-i}\leq u^{(i)}(r)<\alpha\rho_i(1+\varepsilon_1)[\ell(r)]^{n-1-i},1\leq i\leq n-1\Big\}$$

$$Tu=\alpha(1+r^{n-1})+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^r(r-s)^{n-1}\,\varphi(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s))\,ds.$$

Используя условия теоремы, докажем некоторые важные свойства оператора T.

(a) T отображает множество U в себя. Действительно, для $1\leq i\leq n-1$

$$(Tu)^{(i)}=\alpha\rho_i r^{n-1-i}+\frac{1}{(n-1-i)!}\int_0^r(r-s)^{n-1-i}\varphi(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s))\,ds\leq$$

$$\leq\alpha\rho_i r^{n-1-i}+\frac{1}{(n-1-i)!}[\ell(r)]^{n-1-i}\int_0^r\varphi(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s))\,ds\leq$$

$$<\alpha\rho_i r^{n-1-i}+\alpha\rho_i\varepsilon_1[\ell(r)]^{n-1-i}<\alpha\rho_i(1+\varepsilon_1)[\ell(r)]^{n-1-i}.$$

Совершенно аналогично рассматривается оставшийся случай $i=0$.

(b) T – непрерывен. Пусть $\{u_p\}$ последовательность из U сходится при $p\to\infty$ к $u \in U$ в топологии $\tilde{C}^{n-1}[0,+\infty)$. Тогда для любого $R>0$ на отрезке $[0,R]$ выполняется $u_p^{(i)}(r) \rightrightarrows u^{(i)}(r)$, $0\le i < n-1$. Т.к. $\varphi(r, u_0, \ldots, u_{n-1})$ принадлежит классу Каратеодори, то $\varphi(r, u_p(r), \ldots, u_p^{(n-1)}(r)) \to \varphi(r, u(r), \ldots, u^{(n-1)}(r))$ почти всюду на $[0,R]$. Причем $\varphi(r, u_p(r), \ldots, u_p^{(n-1)}(r)) \le \varphi(r, \alpha(1+(1+\varepsilon_1)[\ell(r)]^{n-1}), \ldots, \alpha(1+\varepsilon_1))$. Применяя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы Лебега [5, с. 346–347], не сложно показать, что $Tu_p \to Tu$ при $p\to\infty$ в топологии $\tilde{C}^{n-1}[0,+\infty)$.

(c) T – вполне непрерывен. Для всех $r\in[0,R]$

$$(Tu)^{(n)} = \varphi(r,u(r),u'(r),\ldots,u^{(n-1)}(r)) \le$$
$$\le \varphi(r,\alpha(1+(1+\varepsilon_1)[\ell(r)]^{n-1}),\alpha\rho_1(1+\varepsilon_1)[\ell(r)]^{n-1},\ldots,\alpha(1+\varepsilon_1))ds \le \text{const}.$$

По теореме Арцела – Асколи из (a), (b) и (c) следует, что оператор T – вполне непрерывен в U в топологии $\tilde{C}^{n-1}[0,+\infty)$.

Используя диагональный процесс, не сложно доказать, что T вполне непрерывно отображает U в себя в топологии $\tilde{C}^{n-1}[0,+\infty)$. Применяя теорему Шаудера – Тихонова, заключаем, что оператор T имеет неподвижную точку $u\in U$. Эта точка – правильное решение (1.1).

Покажем, что это решение обладает свойством (1.3). Используя правило Лопиталя и неравенство (2.7), находим

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{u(r)}{r^{n-1}} = \frac{\int_0^{\infty}\varphi(s,u(s),u'(s),\ldots,u^{(n-1)}(s))ds}{(n-1)!} = \text{const} \le$$
$$\le \frac{\int_0^{+\infty}\varphi(s,\alpha(1+(1+\varepsilon_1)[\ell(s)]^{n-1}),\alpha\rho_1(1+\varepsilon_1)[\ell(s)]^{n-1},\ldots,\alpha\rho_{n-1}(1+\varepsilon_1))ds}{(n-1)!} < \frac{\alpha\varepsilon_1}{(n-1)!}. \tag{2.8}$$

II. Пусть теперь выполнены условия (2.2) и (2.3). Рассмотрим начальную задачу (2.4). Эта задача эквивалентна интегральному уравнению

$$u(r) = \alpha(1+r^{n-1}) + \beta r^{n-2} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^r (r-s)^{n-1}\varphi(s,u(s),u'(s),\ldots,u^{(n-1)}(s))ds.$$

Пусть $\alpha \in (0, c/(3(n-1)!)\,]$. Из условия (2.2) и теоремы Лебега получим

$$\lim_{\beta\to-\infty}\int_0^{+\infty}\varphi(s,\beta s^{n-2}+3\alpha\rho_0[\ell(s)]^{n-1},3\alpha\rho_1[\ell(s)]^{n-2},\ldots,3\alpha\rho_{n-1})\,ds = 0.$$

Определим значение $\beta<0$ следующим образом:

$$\int_0^{+\infty}\varphi(s,\beta s^{n-2}+3\alpha\rho_0[\ell(s)]^{n-1},3\alpha\rho_1[\ell(s)]^{n-2},\ldots,3\alpha\rho_{n-1})ds \le \alpha. \tag{2.9}$$

Далее определим выпуклое множество функций U в $\tilde{C}^{n-1}[0,+\infty)$, а также оператор T:

$$U = \{u(r)\in\tilde{C}^{n-1}[0,+\infty): \beta r^{n-2}+\alpha(1+r^{n-1}) < u(r) < \beta r^{n-2} + 3\alpha[\ell(r)]^{n-1},$$
$$\beta\rho_{n-2,i}\, r^{n-2-i} + \alpha\rho_i r^{n-1-i} \le u^{(i)}(r) \le 3\alpha\rho_i[\ell(r)]^{n-1-i}, 1\le i\le n-2,$$
$$\alpha\rho_{n-1} \le u^{(n-1)}(r) < 3\alpha\rho_{n-1}\}$$

$$Tu = \alpha(1+r^{n-2}) + \beta r^{n-2} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^r (r-s)^{n-1}\varphi(r,u(s),u'(s),\ldots,u^{(n-1)}(s))\,ds.$$

Не сложно установить некоторые свойства оператора Т.

(a) Т отображает U в себя.

$$T(u) \le \alpha(1+r^{n-1})+\beta r^{n-2}+\frac{1}{(n-1)!}[\ell(r)]^{n-1}\int_0^r \varphi(\beta s^{n-2}+3\alpha\rho_0[\ell(s)]^{n-1},\dots,3\alpha\rho_{n-1})\,ds <$$

$$<\beta r^{n-2}+3\alpha[\ell(r)]^{n-1}.$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$(Tu)^{(i)} < 3\alpha\rho_i[\ell(r)]^{n-1-i}$, $1 < i < n-1$.

Аналогично тому, как это сделано в предыдущем случае, доказываем, что

(b) Т – непрерывный в U в топологии $\tilde{C}^{n-1}[0,+\infty)$.

(c) Т – вполне непрерывный в U в топологии $\tilde{C}^{n-1}[0,+\infty)$.

Аналогично предыдущему случаю, применяя теорему Шаудера – Тихонова, получаем, что оператор Т имеет неподвижную точку $u \in U$, которая является правильным решением уравнения (1.1). Покажем, что оно обладает свойством (1.3). Воспользуемся правилом Лопиталя, чтобы найти

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{u(r)}{r^{n-1}}=\frac{\int_{-n}^{+\infty}\varphi(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s))\,ds}{(n-1)!}=\text{const} <$$

$$\le\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}\varphi(s,\beta s^{n-2}+3\alpha\rho_0[\ell(s)]^{n-1},3\alpha\rho_1[\ell(s)]^{n-2},\dots,3\alpha\rho_{n-1})\,ds<\frac{\alpha}{(n-1)!}.\ \square$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\varphi(r, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ *не убывает по каждой из переменных* u_i, $0< i < n-1$. *Тогда, если выполняется условие* (2.3) *с некоторой положительной постоянной* c, *то найдется такое* $A > 0$, *что уравнение* (1.1) *имеет бесконечно много правильных на* R_A *решений со свойством* (1.3).

Доказательство. Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{cases} u^{(n)}=\varphi(r,u,u',\dots,u^{(n-1)}),\\ u^{(n-1)}(A)=(n-1)!\alpha,\ u^{(n-2)}(A)=0,\ u(A)=\alpha,\\ u^{(i)}(A)=0,\ 1<i<n-3, \end{cases}$$

где $\alpha \in [\alpha_0, c/3]$, α_0 – некоторая положительная постоянная, а значение параметра А будет определено ниже. Эта задача эквивалентна интегральному уравнению

$$u(r)=\alpha(1+(r-A)^{n-1})+\frac{1}{(n-1)!}\int_A^r (r-s)^{n-1}\varphi(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s))\,ds.$$

Определим вспомогательную функцию

$$\ell_A(r)=\max_{r\ge A}\{1,r-A\}.$$

Используя (2.5), определим значение А следующим образом

$$\int_A^{+\infty}\varphi(s,\alpha\rho_0(1+(1+\varepsilon_1)[\ell(s)]^{n-1}),\alpha\rho_1(1+\varepsilon_1)[\ell(s)]^{n-2},\dots,\alpha\rho_{n-1}(1+\varepsilon_1))\,ds<\alpha_0\varepsilon_1\le\alpha\varepsilon_1,$$

где ε_1 – некоторая положительная постоянная.

Далее определим выпуклое множество U в $\tilde{C}^{n-1}[A,+\infty)$, а также оператор Т:

$$U=\{u(r)\in\tilde{C}^{n-1}[A,+\infty):\alpha(1+(r-A)^{n-1-i})<u(r)<\alpha(1+(1+\varepsilon_1)[\ell_A(r)]^{n-1-i}),$$
$$\alpha\rho_i(r-A)^{n-1-i}<u^{(i)}(r)<\alpha\rho_i(1+\varepsilon_1)[\ell_A(r)]^{n-1-i},1<i<n-1\}$$

$$Tu=\alpha(1+(r-A)^{n-1})+\frac{1}{(n-1)!}\int_A^r(r-s)^{n-1}\varphi(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s))\,ds.$$

Повторяя доказательство теоремы 2.1, показываем, что оператор T имеет неподвижную точку $u\in U$, которая является правильным на R_A решением уравнения (1.1), обладающим свойством (1.3).

Замечание. Результат аналогичный теореме 2.2 был получен в [2] другим методом.

3. Условия существования целых решений

Теорема 3.1. *Пусть в уравнении* (1.1) $n = 2m$, $r\in R$, $\varphi(r, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ *не убывает по каждой из переменных* u_i, $0\le i < n-1$, *и выполняются условия* (2.1) *или* (2.2). *Тогда, если выполнено условие*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s,cs^{n-1},cs^{n-1},\dots,c)\,ds<+\infty, \tag{3.1}$$

с некоторой положительной постоянной c, *то уравнение* (1.1) *имеет бесконечно много целых решений с асимптотическим свойством* (1.3) *в случае* dom $\varphi = R_0\times R^n$ *или бесконечно много целых положительных решений с асимптотическим свойством* (1.3) *в случае* dom $\varphi = R_0\times R_+^n$.

Доказательство.

I. Пусть сначала выполнены условия (2.1) и (3.1). Рассмотрим $r>0$. Повторяя доказательство теоремы 2.1, получим решение уравнения (1.1), содержащееся во множестве.

$$U=\{u(r)\in\tilde{C}^{2m-1}[0,+\infty),\ \alpha r^{2m-1}\le u(r)\le\alpha(1+(1+\varepsilon_1)[\ell(r)]^{2m-1}),$$
$$\alpha\rho_i r^{2m-1-i}\le u^{(i)}(r)\le\alpha(1+\varepsilon_1)\rho_i[\ell(r)]^{2m-1-i},1\le i\le 2m-1\}$$

где ε_1 – некоторая положительная константа, α удовлетворяет (2.7).

Пусть теперь $r\le 0$, и рассмотрим начальную задачу (2.4). Начальная задача (2.4) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(r)=\alpha(1+(-r)^{2m-1})+\beta(-r)^{2m-2}+\frac{1}{(2m-1)!}\int_r^0(s-r)^{2m-1}\varphi(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s))ds. \tag{3.2}$$

Положим $\beta = 0$. Повторяя рассуждения теоремы 2.1 аналогично случаю $r>0$, получим решение уравнения (1.1), содержащееся во множестве

$$U=\{u(r)\in\tilde{C}^{2m-1}(-\infty,0],\ \alpha(-r)^{2m-1}\le u(r)\le\alpha(1+(1+\varepsilon_1)[\ell(|r|)]^{2m-1}),$$
$$\alpha\rho_i(-r)^{2m-1-i}<u^{(i)}(r)<\alpha\rho_i(1+\varepsilon_1)[\ell(|r|)]^{2m-1-i},1\le i<2m-1\}$$

где ε_1 – некоторая положительная константа, α удовлетворяет неравенству

$$\alpha^{-1}\int_{-\infty}^0\varphi(s,\alpha\rho_0(1+(1+\varepsilon_1)[\ell(|s|)]^{2m-1}),\alpha\rho_1(1+\varepsilon_1)[\ell(|s|)]^{2m-2},\dots,\alpha\rho_{n-1}(1+\varepsilon_1))\,ds<\varepsilon_1.$$

Построенное решение, учитывая (2.8), будет удовлетворять свойству (1.3).

II. Доказательство второй части теоремы аналогично доказательству ее первой части и доказательству теоремы 2.1.

4. Условия существования правильных и целых решений полулинейного уравнения

В этом пункте будет рассмотрен частный случай уравнения (1.1) вида

$$u^{(n)} = k(r)\, f(u),\ n > 2,\ r > 0, \qquad (4.1)$$
где $k(r)$ – неотрицательная локально интегрируемая по Лебегу функция, отличная от нуля на множестве положительной меры, $f(u)$ – положительная непрерывная функция, с областью определения $\mathrm{dom}\, f = R_+$ или $\mathrm{dom}\, f = R$.

Из теорем 2.1, 2.2 и 3.1 вытекают следующие результаты.

Теорема 4.1. *Пусть* $f(u)$ *не убывает в области определения и выполняются следующие условия:*

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^{-1} f(\lambda u)\ \textit{возрастает по}\ \lambda \in (0, c]\ \textit{и} \\ \lim\limits_{\lambda \to +0} \lambda^{-1} f(\lambda u) = 0\ \textit{для всех}\ u \in \mathbf{R}_+\ \textit{при}\ \mathrm{dom}\, f = \mathbf{R}_+ \end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

или

$$\lim_{u \to -\infty} f(u) = 0\ \textit{при}\ \mathrm{dom}\, f = R. \qquad (4.3)$$

Тогда, если

$$\int_0^{+\infty} k(s)\, f(cs^{n-1})\, ds < +\infty, \qquad (4.4)$$

с некоторой положительной константой с, то уравнение (4.1) *имеет бесконечно много правильных решений с асимптотическим свойством* (1.3) *с начальными данными, удовлетворяющими* (1.4), *в случае* $\mathrm{dom}\, f = R_+$ *или с начальными данными, удовлетворяющими* (1.5), *в случае* $\mathrm{dom}\, f = R$.

Теорема 4.2. *Пусть* $f(u)$ *не убывает в области определения. Тогда, если выполняются условия* (4.4) *с некоторой положительной константой с, то найдется такое* $A > 0$, *что уравнение* (4.1) *имеет бесконечно много правильных на* R_A *решений со свойством* (1.3).

Теорема 4.3. *Пусть в уравнении* (4.1) $n = 2m$, $r \in R$, $f(u)$ *не убывает в области определения и выполняются условия* (4.2) *или* (4.3). *Тогда, если выполнено условие*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(s)\, f(c\,|\,s\,|^{n-1})\, ds < +\infty,$$

с некоторой положительной константой с, то уравнение (4.1) *имеет бесконечно много целых решений с асимптотическим свойством* (1.3) *в случае* $\mathrm{dom}\, f = R$ *или бесконечно много целых положительных решений с асимптотическим свойством* (1.3) *в случае* $\mathrm{dom}\, f = R_+$.

Замечание. Все результаты о существовании правильных и целых решений, полученные в теоремах 2.1, 2.2 и 3.1, будут верны для уравнения

$$u^{(n)} = \varphi_1(r, u, u', \ldots, u^{(n-1)}),\ n > 2,\ r > 0,$$

где $\varphi_1(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ – неотрицательная непрерывная функция с областью определения $R_0 \times R_+^n$ или $R_0 \times R^n$, для которой справедливо неравенство

$$\varphi_1(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) < \varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

Функция $\varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ обладает свойствами, требуемыми соответственно теоремами 2.1, 2.2 и 3.1.

5. Обобщение полученных результатов

Некоторые результаты, полученные в теоремах 2.1, 2.2 и 3.1, можно обобщить на более широкий класс функций $\varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$. В частности, часть утверждений теоремы 2.1 можно обобщить следующим образом.

Теорема 5.1. *Пусть* $\varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ *не убывает или не возрастает по каждой из переменных* u_i, $0 < i \le n - 1$, *и выполняются условия* (2.1) *и*

$$\int_0^{+\infty}\varphi(s, c(1+\gamma_{0k_0}s^{n-1}), c\rho_1\gamma_{1k_1}s^{n-2},\dots, c\rho_{n-1}\gamma_{n-1k_{n-1}})\,ds < +\infty,$$
$$\gamma_{i,0}=1,\quad \gamma_{i,1}=1+\varepsilon,\quad k_i\in\{0,1\},\quad 0\le i<n-1, \tag{5.1}$$

с некоторыми положительными постоянными c *и* ε, *где* ρ_i *определяются в* (2.6), $k_i = 0$, *если* $\varphi(r, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ *не возрастает по переменной* u_i, *и* $k_i = 1$, *если* $\varphi(r, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ *не убывает по переменной* u_i. *Тогда уравнение* (1.1) *имеет бесконечно много правильных решений с асимптотическим свойством* (1.3) *с начальными данными, удовлетворяющими* (1.4).

Доказательство.

Рассуждения аналогичны приведенным в теореме 2.1. Из условия (2.1) и (5.1) получаем

$$\lim_{\lambda\to+0}\int_0^{+\infty}\lambda^{-1}\varphi(s,\lambda(1+\gamma_{0,k_0}s^{n-1}),\lambda\rho_1\gamma_{1,k_1}s^{n-2},\dots,\lambda\rho_{n-1}\gamma_{n-1,k_{n-1}})ds=0.$$

Тогда (2.7) перепишется в виде

$$\alpha^{-1}\int_1^{+\infty}\varphi(s,\alpha(1+\gamma_{0k_0}s^{n-1}),\alpha\rho_1\gamma_{1k_1}s^{n-2},\dots,\alpha\rho_{n-1}\gamma_{n-1,k_{n-1}})\,ds<\varepsilon_1=\varepsilon,$$
$$\alpha^{-1}\int_0^{+1}\varphi(s,\alpha(1+\gamma_{0k_0}),\alpha\rho_1\gamma_{1k_1},\dots,\alpha\rho_{n-1}\gamma_{n-1,k_{n-1}})ds<\varepsilon_1=\varepsilon. \tag{5.2}$$

Выбираем множество U и оператор T такими же, как в теореме 2.1. Тогда будет выполняться (а). Действительно, пусть $1< i < n-1$ и без ограничения общности $r > 1$. Несложно видеть, что

$$(Tu)^{(i)}=\alpha\rho_i r^{n-1-i}+\frac{1}{(n-1-i)!}\int_0^r(r-s)^{n-1-i}\varphi(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s))\,ds\le$$
$$\le\alpha\rho_i r^{n-1-i}+\frac{r^{n-1-i}}{(n-1-i)!}\int_0^r\varphi(s,\alpha(1+\gamma_{0k_0}s^{n-1}),\alpha\rho_1\gamma_{1,k_1}s^{n-2},\dots,\alpha\rho_{n-1}\gamma_{n-1,k_{n-1}})ds\le$$
$$<\alpha\rho_i r^{n-1-i}+\alpha\varepsilon_1\rho_i r^{n-1-i}<\alpha(1+\varepsilon_1)\rho_i[\ell(r)]^{n-1-i}.$$

Далее завершаем доказательство, аналогично тому, как это сделано в теореме 2.1. □

Теорема 5.2. *Пусть* $\varphi(r, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ *не убывает или не возрастает по каждой из переменных* u_i, $0< i < n-1$, *и выполняются следующие условия*:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda^{-1}\varphi(r,\lambda u_0,\dots,\lambda u_{n-1})\ \textit{не возрастает по}\ \lambda\in[c,+\infty)\ \textit{для некоторой}\ c>0,\\&\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-1}\varphi(r,\lambda u_0,\dots,\lambda u_{n-1})=0\ \textit{для всех}\ (r,u_0,\dots,u_{n-1})\in\mathbf{R}_0\times\mathbf{R}^n_+\\&\qquad\textit{при}\ \operatorname{dom}\varphi=\mathbf{R}_0\times\mathbf{R}^n_+\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Тогда, если выполняется условие (5.1) *с некоторыми положительными постоянными* c *и* ε, *где* ρ_i *определяются* (2.6), $k_i = 0$, *если* $\varphi(r, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ *не возрастает по переменной* u_i, *и* $k_i = 1$, *если* $\varphi(r, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ *не убывает по переменной* u_i, *то уравнение* (1.1) *имеет бесконечно много правильных решений с асимптотическим свойством* (1.3) *с начальными данными, удовлетворяющими* (1.4).

Доказательство.

Доказательство такое же, как в теоремах 2.1 и 5.1, отличие только в выборе α. Из (5.3) и (5.1) следует равенство

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}\lambda^{-1}\varphi(s,\lambda(1+\gamma_{0,k_0}s^{n-1}),\lambda\rho_1\gamma_{1,k_1}s^{n-2},\ldots,\lambda\rho_{n-1}\gamma_{n-1,k_{n-1}})ds=0.$$

Далее (2.7) заменяем на (5.2) и доказательство завершается так же, как в теореме 2.1. □

Теорема 5.3. *Пусть* $\varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ *не возрастает по каждой из переменных* u_i, $0< i < n-1$. *Тогда, если выполняется условие* (2.3) *с некоторой положительной постоянной с, то уравнение* (1.1) *имеет бесконечно много правильных решений с асимптотическим свойством* (1.3) *с начальными данными, удовлетворяющими* (1.4).

Доказательство.

Доказательство очевидным образом следует из теоремы 5.2. □

Для теоремы 2.2 имеет место следующее обобщение.

Теорема 5.4. *Пусть* $\varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ *не убывает или не возрастает по каждой из переменных* u_i, $0\le i < n-1$, *выполняется условие* (5.1) *с некоторыми положительными постоянными* с *и* ε, *где* ρ_i *определяются в* (2.6), $k_i = 0$, *если* $\varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ *не возрастает по переменной* u_i, *и* $k_i = 1$, *если* $\varphi(r, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ *не убывает по переменной* u_i. *Тогда найдется такое* $A > 0$, *что уравнение* (1.1) *имеет бесконечно много правильных на* R_A *решений со свойством* (1.3).

Доказательство.

Доказательство такое же, как в теоремах 5.1 и 5.2. Отметим, что значение $A > 1$, можно определить следующим образом:

$$\int_A^{+\infty}\varphi(s,\alpha(1+\gamma_{0k_0}s^{n-1}),\alpha\rho_1\gamma_{1k_1}s^{n-2},\ldots,\alpha\rho_{n-1}\gamma_{n-1,k_{n-1}})ds<\alpha_0\varepsilon_1\le\alpha\varepsilon_1=\alpha\varepsilon.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1990.
2. **Kiguradze I.T., Kvinikadze G.G.** On strongly increasing solutions of nonlinear ordinary differential equations // Ann. Mat. Pura Appl., 1982, v. 130. – P. 67–87.
3. **Usami H.** On strongly increasing entire solution of even order semilinear elliptic equations // Hirosima Math. J., 1987, v. 17. – P. 175–217.
4. **Xu X., Yang B., Debnath L.** Positive entire solutions of nonlinear polyharmonic equations in R^2 // Applied Math. and Computation, 2002, v. 126. – P. 377–388.
5. **Kawano N.** On bounded entire solutions of semilinear elliptic equations // Hirosima Math. J., 1984, v. 14. – P. 125–158.
6. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1989.

SUMMARY

It is considered a nonlinear ordinary differential equation of the following form $u^{(n)}=\varphi(r,u,u',\ldots,u^{(n-1)})$. *For this equation we obtained existence conditions of entire solutions.*

Поступила в редакцию 21.09.2004