УДК 519.62

В.В. Бобков

Переменного порядка точности методы численного интегрирования дифференциальных уравнений

Данная работа связана с проблемой численного решения начальной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида

$$u'(t) = f(t, u(t)). \qquad (1)$$

Такая задача обычно решается по шагам, при этом длина каждого отрезка дискретизации определяется, как правило, не только естественным шагом наблюдения, но и требованиями к точности приближенного решения. Последние требования часто приводят к излишне суровым ограничениям на шаг дискретизации, что особенно характерно для методов фиксированного порядка точности. В этой работе конструируются методы типа последовательных приближений, когда уровень точности численного решения на каждом шаге наблюдения может регулироваться порядком точности метода. Характерной чертой процесса построения предлагаемых ниже методов является использование на каждом этапе приближения уточнённой информации о локальной ошибке начального приближения.

В дальнейшем нам будет удобнее рассматривать исходную задачу для системы (1) в локальной постановке:

$$u'(x) = f(x, u(x)),\ x = t+\xi,\ 0 \le \xi \le \tau,\ \tau > 0\ , \tag{2}$$

$$u(t) = y\ . \tag{3}$$

В качестве начального приближения к решению задачи (2), (3) изберем, например, функцию

$$y_1(x) = y_1(t+\xi) = y + \frac{1-\exp(-\mu\xi)}{\mu} f, \quad t \le x \le t+\tau\ , \tag{4}$$

где

$$f = f(t, y)\ , \qquad \mu \ge \|f_u(t, y)\|\ .$$

Расчетная формула (4) является естественным обобщением на случай нелинейной системы (1) численного метода первого порядка точности из [1], записанного в непрерывной форме. Так как $[1-\exp(-\mu\xi)] \big/ \mu = \xi + O(\xi^2)$, то (4) можно трактовать также как мультипликативно скорректированный явный метод Эйлера [2] для исходной задачи Коши.

В дополнение к отмеченным в [1] свойствам методов такого рода укажем здесь ещё на одну характеристику расчетной формулы (4), предопределившую наш выбор (в противовес, скажем, заданию начального приближения

$$y_1^*(x) = y + \xi f \tag{5}$$

по явному методу Эйлера или наиболее простому выбору (см. (3))

$$y_0(x) \equiv y \tag{6}$$

стартового приближения).

Для простоты сравнения (4)-(6) проведём таковое применительно к системе линейных дифференциальных уравнений

$$u'(x) = Au(x) + a \tag{7}$$

с постоянными матрицей A и вектором неоднородности a. К системам такого вида мы приходим, например, в одном из простейших вариантов линеаризации (2).

Так как производная приближения (4) применительно к (7) имеет вид $y_1'(x) = \exp(-\mu\xi)(Ay + a)$, где $\mu \ge \|A\|$, то для локальной ошибки $\varepsilon_1(x) = u(x) - y_1(x)$, $\varepsilon_1(t) = 0$, непосредственно находим :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1'(x) &= A\,\varepsilon_1(x) + A(y_1(x) - y) + (1-\exp(-\mu\xi))(Ay + a) = \\ &= A\,\varepsilon_1(x) + A\frac{1-\exp(-\mu\xi)}{\mu}(Ay + a) + (1-\exp(-\mu\xi))(Ay + a) = \\ &= A\,\varepsilon_1(x) + (1-\exp(-\mu\xi))\left(I + \frac{1}{\mu}A\right)(Ay + a)\ ,\ \varepsilon_1(t) = 0\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь через I обозначена единичная матрица соответствующей размерности.

В случае же начальных приближений (5), (6) соответственно имеем:

$$\frac{d}{dx}\varepsilon_1^*(x) = A\,\varepsilon_1^*(x) + \xi A(Ay + a), \quad \varepsilon_1^*(t) = 0\ , \tag{9}$$

$$\varepsilon_0'(x) = A\,\varepsilon_0(x) + Ay + a, \quad \varepsilon_0(t) = 0\ . \tag{10}$$

Здесь $\varepsilon_1^* = u(x) - y_1^*(x)$, $\varepsilon_0(x) = u(x) - y_0(x)$, $\varepsilon_1^*(t) = \varepsilon_0(t) = 0$.

Таким образом, для каждой из локальных ошибок $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_1^*(x)$, $\varepsilon_0(x)$ мы получили (см. (8)-(10)) начальные задачи вида

$$\varepsilon'(x) = A\,\varepsilon(x) + \delta(x),\ \varepsilon(t) = 0,\ x = t + \xi,\ 0 \le \xi \le \tau .$$

Как известно [3], решение такой задачи представимо в форме

$$\varepsilon(x) = \int_t^x \exp(A(x - z))\,\delta(z)\,dz . \qquad (11)$$

Для сравнительного анализа выбора начального приближения в вариантах (4), (5) или (6) в силу (11) удобно ограничиться в задачах (8), (9) и (10) сравнением лишь векторов неоднородности $\delta_1(x) = (1 - \exp(-\mu\xi))\left(1 + \frac{1}{\mu}A\right)(Ay + a)$, $\delta_1^*(x) = \xi A(Ay + a)$ и $\delta_0(x) = Ay + a$, различающихся матричными множителями $(1 - \exp(-\mu\xi))\left(1 + \frac{1}{\mu}A\right)$, ξA и I соответственно. Так как, например, в важном случае отрицательно определенной матрицы A с вещественными собственными значениями спектральная норма матричного множителя $(1 - \exp(-\mu\xi))\left(1 + \frac{1}{\mu}A\right)$ всегда не превосходит единицы, а для этой же нормы множителя ξA такое утверждение гарантировано, вообще говоря, лишь при малых значениях $\xi > 0$, то выбор стартового приближения (4) является здесь предпочтительным. На таком выборе мы и остановимся, при этом для простоты записей обозначим $y_1(x) = \varphi(x)$.

Локальная погрешность $\varepsilon_1(x)$ избранного начального приближения удовлетворяет, очевидно, следующей задаче Коши:

$$\varepsilon_1'(x) = f(x, y_1(x) + \varepsilon_1(x)) - \varphi'(x),\ \varepsilon_1(t) = 0,\ x = t + \xi,\ 0 \le \xi \le \tau . \qquad (12)$$

По трудности решения задача (12) мало отличается от задачи (2), (3).

Найдем сначала приближение $\varepsilon_{1,1}(x)$ к $\varepsilon_1(x)$ как решение более простой задачи

$$\varepsilon_{1,1}'(x) = f(x, y_1(x)) - \varphi'(x),\ \varepsilon_{1,1}(t) = 0,\ x = t + \xi,\ 0 \le \xi \le \tau . \qquad (13)$$

Поскольку (см. (4)) $y_1(t) = y$, то функцию $\varepsilon_{1,1}'(x)$ можно трактовать как невязку приближения $y_1(x)$ на дифференциальной задаче (2), (3). Значение этой невязки может быть точно вычислено в любой точке рассматриваемого отрезка дискретизации. Однако проинтегрировать эту невязку (для нахождения $\varepsilon_{1,1}(x)$) удается, вообще говоря, лишь приближенно, например, с использованием квадратурных формул. Для упрощения этой процедуры и сохранения непрерывного характера метода выделим из $\varepsilon_{1,1}'(x)$ точно интегрируемую главную часть $\tilde{\varepsilon}_{1,1}'(x)$, представив предварительно (13) в виде

$$\varepsilon_{1,1}'(x) = a_{1,1}\,\xi + \psi_2(x),\ \varepsilon_{1,1}(t) = 0,\ x = t + \xi,\ 0 \le \xi \le \tau . \qquad (14)$$

Так как (см. (4)) $\varepsilon_{1,1}'(t) = 0$, то $\psi_2(t) = 0$ при любых значениях векторного параметра $a_{1,1}$. Подберем $a_{1,1}$ из требования $\psi_2(t + \xi_1) = 0$, где $\xi_1 \in (0, \tau]$:

$$a_{1,1} = \left[f(t + \xi_1, y_1(t + \xi_1)) - \varphi'(t + \xi_1)\right] / \xi_1 . \qquad (15)$$

Тем самым вместо (14) при конкретном значении $a_{1,1}$ из (15) можно записать:

$$\tilde{\varepsilon}_{1,1}'(x) = a_{1,1}\,\xi,\ \tilde{\xi}_{1,1}(t) = 0,\ x = t + \xi,\ 0 \le \xi \le \tau . \qquad (16)$$

Из (16) непосредственно находим $\tilde{\varepsilon}_{1,1}(x)=\frac{1}{2}a_{1,1}\xi^2$, что позволяет получить новое приближение

$$y_2(x)=y_1(x)+\tilde{\varepsilon}_{1,1}(x),\quad t\le x\le t+\tau. \qquad (17)$$

С учетом (17) легко получить и новую (в сравнении с (13)) аппроксимацию задачи (12):

$$\varepsilon'_{1,2}(x)=f(x,y_2(x))-\varphi'(x),\ \varepsilon_{1,2}(t)=0\ ,x=t+\xi\ ,0\le\xi\le\tau. \qquad (18)$$

Аналогично подробно обсужденному выше вместо (18) можно записать:

$$\varepsilon'_{1,2}(x)=a_{2,1}\,\xi+a_{2,2}\,\xi(\xi-\xi_1)+\psi_3(x),\ \varepsilon_{1,2}(t)=0\ ,x=t+\xi\ ,0\le\xi\le\tau. \qquad (19)$$

Как и ранее, $\psi_3(t)=0$ при любых значениях векторных параметров $a_{2,1}$ и $a_{2,2}$. Выберем их конкретные значения из условий $\psi_3(t+\xi_1)=0$ и $\psi_3(t+\xi_2)=0$, где $\xi_2\in(0,\tau]$, при этом $\xi_2\ne\xi_1$. Тогда (см. (18), (19)) будем иметь:

$$a_{2,1}=\left[f(t+\xi_1\,y_2(t+\xi_1))-\varphi'(t+\xi_1)\right]\Big/\xi_1\ ,$$

$$a_{2,2}=\left[f(t+\xi_2,\,y_2(t+\xi_2))-\varphi'(t+\xi_2)-a_{2,1}\,\xi_2\right]\Big/\left[\xi_2(\xi_2-\xi_1)\right].$$

Тем самым по аналогии с (16 имеем:

$$\tilde{\varepsilon}'_{1,2}(x)=a_{2,1}\xi+a_{2,2}\xi(\xi-\xi_1),\ \varepsilon_{1,2}(t)=0,\ x=t+\xi\ ,\ 0\le\xi\le\tau. \qquad (20)$$

Непосредственным интегрированием из (20) находим $\tilde{\varepsilon}_{1,2}(x)$ и получаем $y_3(x)=y_1(x)+\tilde{\varepsilon}_{1,2}(x),\ t\le x\le t+\tau$.

Отталкиваясь от $y_3(x)$, по описанной выше методике процесс уточнения можно продолжить. Аналогично проделанному ранее при этом находим:

$$a_{3,1}=\left[f(t+\xi_1,\,y_3(t+\xi_1))-\varphi'(t+\xi_1)\right]\Big/\xi_1\ ,$$

$$a_{3,2}=\left[f(t+\xi_2,\,y_3(t+\xi_2))-\varphi'(t+\xi_2)-q_{3,1}(t+\xi_2)\right]\Big/\left[\xi_2\,p_1(\xi_2)\right],$$

$$a_{3,3}=\left[f(t+\xi_3,\,y_3(t+\xi_3))-\varphi'(t+\xi_3)-q_{3,2}(t+\xi_3)\right]\Big/\left[\xi_3\,p_2(\xi_3)\right],$$

$$\tilde{\varepsilon}'_{1,3}(x)=q_{3,3}(x)\ ,\tilde{\varepsilon}_{1,3}(t)=0\ ,$$

$$\tilde{\varepsilon}_{1,3}(x)=s_{3,3}(x)\ ,\ y_4(x)=y_1(x)+s_{3,3}(x)\ .$$

Здесь для сокращения записей использованы следующие обозначения:

$$p_m(\xi)=\prod_{k=1}^{m}(\xi-\xi_k),\ m\ge1, \qquad (21)$$

$$q_{i,j}(x)=\sum_{k=1}^{j}a_{i,k}\,\xi\,p_{k-1}(\xi)\ ,\ i\ge j,\ j\ge1\ ,\ p_0(\xi)\equiv1,$$

$$s_{i,j}(x)=\int_0^{\xi}q_{i,j}(t+\gamma)\,d\gamma. \qquad (22)$$

И аналогично на i-ом этапе таких приближений можно записать:

$$a_{i,1}=\left[f(t+\xi_1,\,y_i(t+\xi_1))-\varphi'(t+\xi_1)\right]\Big/\xi_1\ ,\qquad i\ge1,$$

$$a_{i,j}=\left[f(t+\xi_j,\,y_i(t+\xi_j))-\varphi'(t+\xi_j)-q_{i,j-1}(t+\xi_j)\right]\Big/\left[\xi_j\,p_{j-1}(\xi_j)\right],$$

$$i\ge j,\quad j=2,3,\ldots,i,$$

$$\tilde{\varepsilon}'_{1,i}(x) = q_{i,i}(x), \quad \tilde{\varepsilon}_{1,i}(t) = 0 ,$$
$$\tilde{\varepsilon}_{1,i}(x) = s_{i,i}(x) \quad , \quad y_{i+1}(x) = y_1(x) + s_{i,i}(x) .$$

Если степень многочлена $p_m(\xi)$ невелика, то непосредственным перемножением скобок в правой части (21) этот многочлен легко приводится к виду, удобному для точного интегрирования. Чтобы эту процедуру автоматизировать, что особенно важно в случае больших значений m, перепишем по аналогии с [4] многочлен (21) в форме

$$p_m(\xi) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \xi^{m-k} p_{m,k} . \tag{23}$$

Так как по построению $p_m(\xi) = (\xi - \xi_m) p_{m-1}(\xi)$, $m \geq 1$, то для определения коэффициентов $p_{m,k}$ из (23) нетрудно получить следующие рекуррентные формулы:

$$p_{m,k} = \begin{cases} 1, \quad k = 0, \\ p_{m-1,k} + \xi_m p_{m-1,k-1}, \quad k < m, \\ \xi_m p_{m-1,k-1}, \quad k = m. \end{cases}$$

С учетом (23) для $s_{i,j}(x)$ вместо (22) тем самым можно дать явное представление

$$s_{i,j}(x) = \sum_{k=1}^{j} a_{i,k} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \frac{1}{k - r + 1} \xi^{k-r+1} p_{k-1,r} .$$

В заключение заметим, что в общей схеме рассмотренных построений существенных изменений не произойдет, если в качестве начального приближения вместо (4) избрать приближенное решение задачи (2), (3), полученное любым другим численным методом, при этом под производной приближенного решения следует понимать его локальную [5] производную.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Бобков В.В., Бобкова Н.А.*** Об одном классе методов численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 2. С. 47.
2. ***Бахвалов Н.С.*** Численные методы. М.: Наука, 1973. С. 450.
3. ***Гантмахер Ф.Р.*** Теория матриц. М.: Наука, 1966. С. 127.
4. ***Бобков В.В., Борисевич А.М.*** Метод последовательных поправок // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999.№3. С. 52.
5. ***Бобков В.В.*** О построении методов численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. Уравнения,1995.Т. 31. № 7. С. 1174.

SUMMARY

A new way of constructing one step methods of the recursive type with an arbitrary high order of accuracy for an initial value problem in the case of a system of ordinary differential equations is proposed. The characteristic feature of construction procedure for such methods is the use of refined information about the local error of an initial approximation at each recursion.

Поступила в редакцию 15.02.2000