УДК 521.542

О.А. Шпырко

О пересечениях холловых подгрупп и π-длине π-разрешимой группы

В 1977 году В.С. Монахов и А.Г. Анищенко [1] заметили, что многие инварианты силовских p-подгрупп, влияющих на p-длину $l_p(G)$ группы G, могут быть заменены инвариантами центральных p-силовских пересечений. В частности, они показали, что p-длина p-разрешимой группы не превосходит некоторые такие инварианты. Отдельные результаты работы [1] перенесены С.В. Путиловым [2] на π-разрешимые группы.

В настоящей заметке получена новая информация о нильпотентной π-длине $l_\pi^n(G)$ π-разрешимой группы в зависимости от строения ее центральных π-холловых пересечений (теорема 1) и центральных p-силовских пересечений (теорема 2).

Рассматриваются только конечные группы. Пусть π – некоторое множество простых чисел, π′ – множество всех простых чисел, не содержащихся в π, а π(G) – множество простых чисел, делящих порядок группы G. Группу G называют π-разрешимой, если она обладает нормальным рядом с π′-факторами и разрешимыми π-факторами. В частности, если множество π состоит только из одного простого числа p, то π-разрешимая группа называется p-разрешимой.

Нильпотентная π-длина π-разрешимой группы G определяется следующим образом. Пусть $P_0^n = 1,\ N_i^n/P_i^n = O_{\pi'}(G/P_i^n), P_{i+1}^n/N_i^n = F(G/N_i^n),\ \ i = 0,1,2,...$ Здесь $O_{\pi'}(X)$ – наибольшая нормальная π'-подгруппа группы X, F(X) – подгруппа Фиттинга группы X. Наименьшее k, для которого в ряде

$$1 \le P_0^n \le N_0^n \le P_1^n \le N_1^n \le ... \le P_i^n \le N_i^n \le ...$$

выполняется равенство $N_k^n = G$, называется нильпотентной π-длиной группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Если вместо $F(G/N_i^n)$ рассматривать $O_\pi(G/N_i^n)$, то получаем определение π-длины $l_\pi(G)$ π-разрешимой группы G.

Поскольку P_{i+1}^n/N_i^n – нильпотентная π-группа, а факторгруппа N_i^n/P_i^n – π'-группа, то $l_\pi^n(G) \le l_\pi(G)$, а если π = {p}, то $l_\pi^n(G) = l_\pi(G) = l_p(G)$. Ясно также, что равенство $l_\pi^n(G) = l_\pi(G)$ сохраняется для π-разрешимой группы с нильпотентной π-холловой подгруппой. Кроме того, для π-разрешимой группы с нильпотентной π-холловой подгруппой в [3] показано, что $l_\pi^n(G) = l_\pi(G) = \max_{p\in\pi} l_p(G)$.

Как и в [3] под $l_\pi^*(G)$ понимается либо всюду $l_\pi(G)$, либо всюду $l_\pi^n(G)$.

Лемма 1 ([3], лемма 1). *Пусть π – некоторое множество простых чисел и G – π-разрешимая группа. Тогда:*

(1) если H – подгруппа группы G, то $l_\pi^*(H) \le l_\pi^*(G)$;

(2) если N – нормальная подгруппа группы G, то $l_\pi^*(G/N) \le l_\pi^*(G)$; если N – нормальная π'-подгруппа группы G, то $l_\pi^*(G/N) = l_\pi^*(G)$;

(3) в любом ряде нормальных подгрупп группы G с π'-факторами и π-факторами (нильпотентными π-факторами) число неединичных π-факторов (неединичных нильпотентных π-факторов) не меньше чем $l_\pi(G)$ (не меньше чем $l_\pi^n(G)$).

(4) Если $H_i \lhd G$, i=1, 2, ..., n и G = $H_1H_2...H_n$, то $l_\pi^*(G) = \max_{i=1,2,...n} l_\pi^*(H_i)$.

Лемма 2 ([4], лемма 2). *Пусть π – некоторое множество простых чисел и G – π-разрешимая группа. Если $l_\pi^*(G/N) < l_\pi^*(G)$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G, то*

(1) $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$;

(2) в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа K;

(3) K – элементарная абелева p-группа, p∈π, и $K = O_{p',p}(G) = P_1^n$;

(4) $C_G(K)$ = K и подгруппа K дополняема в группе G.

Лемма 3 ([4], лемма 3). *Если G – π-разрешимая группа и H – ее π-холловая подгруппа, то $n(H) \le l_\pi^n(G)$.*

Лемма 4 ([4], лемма 4). *Нильпотентная π-длина π-разрешимой группы с абелевыми силовскими p-подгруппами для всех p∈π совпадает с нильпотентной π-длиной своей π-холловой подгруппы.*

Через X' обозначается коммутант группы X.

Лемма 5 ([4], лемма 7). *Пусть G – π-разрешимая группа и H – ее π-холловая подгруппа. Если $N \lhd G$, то $(HN/N)' \cong H'/(H' \cap N)$.*

Под центральным π-холловым пересечением понимается пересечение двух различных π-холловых подгрупп, содержащее центр одной из них.

Лемма 6. *Пусть N – нормальная подгруппа группы G и D/N – центральное π-холловое пересечение в G/N. Тогда в G существует центральное π-холловое пересечение K такое, что D = KN.*

Доказательство. Так как $D/N = G_\pi N/N \cap G_\pi^x N/N \ge Z(G_\pi N/N) \ge ZN/N$, где G_π – π-холловая подгруппа группы G, а Z = $Z(G_\pi)$, то $D = G_\pi N \cap G_\pi^x N \ge (G_\pi N \cap G_\pi^x)N \ge ZN$. Пусть $K = G_\pi \cap G_\pi^x N$, $L = \langle K, Z \rangle$. Ясно, что L – подгруппа группы G_π, а так как L содержится в $G_\pi^x N$, то существует π-холловая подгруппа G_π^y из $G_\pi^x N$, содержащая L. Поэтому $K = G_\pi \cap G_\pi^x N \geq G_\pi \cap G_\pi^y \geq L = \langle K, Z \rangle \geq K$, т.е. Z содержится в $K = G_\pi \cap G_\pi^y$. Таким образом, K – центральное π-холловое пересечение в группе G и D = KN. Лемма доказана.

В случае, когда π состоит из одного простого числа p, т.е. π = {p}, лемма 6 совпадает с леммой 1 из [1].

Лемма 7. *Если* G – *π-разрешимая группа и* $l_\pi(G) \leq 1$, *то* $l_\pi^n(G) = n(G_\pi)$ *и* $l_p(G) = l_p(G_\pi)$ *для всех* $p \in \pi$.

Доказательство. С одной стороны, по лемме 3 справедливо неравенство $n(G_\pi) \leq l_\pi^n(G)$. С другой стороны, поскольку $l_\pi^n(G) \leq 1$, то $H = G_\pi O_{\pi'}(G) \lhd G$ и для группы G можно построить следующий нормальный ряд с π-факторами и π'-факторами:

$$1 \leq O_{\pi'}(G) < F_1 < F_2 < \ldots < F_t = H \lhd G,$$

где $F_i / F_{i-1} = F(H/F_{i-1})$. Таким образом, по лемме 1(3) $l_\pi^n(G) \leq n(G_\pi)$. Отсюда получаем требуемое равенство $l_\pi^n(G) = n(G_\pi)$.

Докажем теперь равенство $l_p(G) = l_p(G_\pi)$. Так как $l_\pi(G) \leq 1$, то существует (π',π)-ряд:

$$1 = P_0 \leq N_0 < P_1 \leq N_1 = G,$$

где $N_0 = O_{\pi'}(G)$, $P_1 = O_{\pi'\pi}(G) = [O_{\pi'}(G)]G_\pi$. Ясно, что достроить этот (π',π)-ряд до (p',p)-ряда можно за счет секции P_1/N_0. Поэтому число p-факторов получившегося ряда всегда будет не больше числа p-факторов любого (p',p)-ряда π-холловой подгруппы G_π, т.е. $l_p(G) \leq l_p(G_\pi)$ для каждого $p \in \pi$. С другой стороны, так как G_π – подгруппа группы G, то верно и обратное неравенство $l_p(G) \geq l_p(G_\pi)$ для любого $p \in \pi$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если в π-разрешимой группе* G *нет центральных π-холловых пересечений, то* $l_\pi(G) \leq 1$ и $l_\pi^n(G) = n(G_\pi)$.

Доказательство. По теореме 1 [2] $l_\pi(G) \leq 1$. Теперь из леммы 7 получаем, что $l_\pi^n(G) = n(G_\pi)$. Лемма доказана.

Группой Шмидта называется ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Через S = [P]Q обозначают группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P и ненормальной циклической q-подгруппой Q.

Лемма 9. *Пусть* S = [P]Q – *группа Шмидта,* $N \lhd S$ *и* $C_S(N) \leq N$. *Тогда* $P \leq N$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть S = [P]Q – группа Шмидта, $N \lhd S$ и $C_S(N) \leq N$, но P не содержится в N. По теореме 0.6.е [5] $N_p \leq Z(P) \leq Z(S)$. Если $N_q = 1$, то $N = N_p \leq Z(S)$, противоречие с тем, что $C_S(N) \leq N$. Значит, $N_q \neq 1$. Теперь $N_q \neq Q$, т.к. в противном случае

$Q \lhd S$ – противоречие. Поэтому $N \le Z(P) \times Q_1$, где $Q_1 < Q$. Но $Z(P) \times Q_1 \le Z(S)$, противоречие с тем, что $C_S(N) \le N$. Итак, $P \le N$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если в π-разрешимой группе G центральные π-холловые пересечения абелевы либо являются группами Шмидта, то* $l_\pi^n(G) \le 1 + n(G_\pi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как факторгруппа абелевой группы – абелева, а факторгруппа группы Шмидта – либо вновь группа Шмидта, либо циклическая q-группа, где q – простое число, для которого силовская q-подгруппа ненормальна в группе, то индукция применима к любой нетривиальной факторгруппе по лемме 6. Согласно лемме 2 $O_\pi(G) = \Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Поэтому подгруппа Фиттинга F(G) = F группы G является минимальной нормальной элементарной абелевой p-подгруппой, $p \in \pi$, совпадающей со своим централизатором $C_G(F) = F = P_1^n = O_{p'p}(G)$ в группе G, и дополняемой в G, т.е. G = [F]M. По теореме VI 4.6 [6] π-холловая подгруппа группы G равна $G_\pi = [F]M_\pi$, где M_π – π-холловая подгруппа в M, и F содержится в каждой π-холловой подгруппе. Если в группе G нет центральных π-холловых пересечений, то $l_\pi^n(G) = n(G_\pi) < 1 + n(G_\pi)$ по лемме 8. Пусть теперь в группе G имеются центральные π-холловые пересечения. Предположим, что центральное π-холловое пересечение $D = H_1 \cap H_2$ – абелево, где H_1 и H_2 – различные π-холловые подгруппы, тогда F = D и в факторгруппе G/F центральных π-холловых пересечений нет. Поэтому $l_\pi(G/F) = n((G/F)_\pi)$ по лемме 8. В случае, когда в группе G центральное π-холловое пересечение D – группа Шмидта, то F – собственная подгруппа из D. Пусть D = [P]Q, где P – нормальная силовская p-подгруппа, а Q – циклическая ненормальная силовская q-под-группа в D. По лемме 9 $P \le F$, следовательно, в факторгруппе G/F все центральные π-холловые пересечения подгрупп являются циклическими q-группами. Поэтому по теореме 2 из [1] $l_\pi(G/F) \le 1$. Отсюда, по лемме 7 имеем $l_\pi^n(G/F) = n((G/F)_\pi)$. Теперь, окончательно получаем $l_\pi^n(G) = l_\pi^n(G/F) + 1 = n(G_\pi/F) + 1 \le n(G_\pi) + 1$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. Если в π-разрешимой группе G центральные π-холловые пересечения имеют единичное пересечение с коммутантом каждой π-холловой подгруппы, то $l_\pi^n(G) = n(G_\pi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1 следует, что $l_\pi^n(G) \le 1 + n(G_\pi)$. Улучшим эту оценку. Если центральных π-холловых пересечений нет, то $l_\pi^n(G) = n(G_\pi)$ по лемме 8. Пусть центральные π-холловые пересечения есть. Пусть N – нормальная неединичная подгруппа в группе G. Выберем в факторгруппе G/N две различные π-холловые подгруппы H_1N/N и H_1^xN/N, где $x \in G$. Пусть $D/N = H_1N/N \cap H_1^xN/N$ – их центральное π-холловое пересечение в G/N. Тогда по лемме 6 $K = H_1 \cap H_1^y$ – центральное π-холловое пересечение в группе G для некоторого $y \in G$, где H_1 и H_1^y – π-холловые подгруппы в группе G, и D = KN. Обозначим одну из π-холловых подгрупп в G через H. тогда $(HN/N)' = H'N/N$ по лемме 5, а по условию $H' \cap K = E$. Следовательно, $H'N/N \cap D/N = H'N/N \cap KN/N = (H' \cap K)N/N = N/N = E$. Итак, в G/N центральные π-холловые пересечения имеют единичное пересечение с коммутантом каждой π-холловой подгруппы в G/N. Поэтому для доказательства следствия можно воспользоваться индукцией по порядку группы G.

По лемме 2 $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа – подгруппа Фиттинга $F(G) = F$ группы G, которая является элементарной абелевой p-подгруппой, $p \in \pi$, совпадающей со своим централизатором $C_G(F) = C = F = P_1^n = O_{p'p}(G)$ в группе G, и дополняемой в G, т.е. $G = [F]M$. Ясно, что π-холловая подгруппа группы G равна $G_\pi = [F]M_\pi$, где M_π – π-холловая подгруппа в M и F содержится в каждом π-холловом пересечении группы G. Так как $F \leq K$, то $H' \cap F = E$, $[H', F] = E$ и $H' \leq C = F$. Поэтому окончательно получаем $H' = E$. Таким образом, в группе G все π-холловые подгруппы абелевы, следовательно, $l_\pi^n(G) = n(G_\pi)$ по лемме 4. Следствие доказано.

Лемма 10. *Пусть* G – π*-разрешимая группа и* $l_\pi(G) \leq k$. *Тогда* $l_\pi^n(G) \leq k \cdot n(G_\pi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $l_\pi(G) = k$, то существует (π', π)-ряд:

$$1 \leq N_0 < P_0 < N_1 < P_1 < \ldots < N_i < P_i < N_{i+1} < P_{i+1} < \ldots < P_{k-1} \leq N_k = G. \quad (*)$$

Все π-факторы P_{i+1}/N_i этого ряда уплотним следующим образом:

$$\ldots \leq N_i = F_{i_0} < F_{i_1} < \ldots < F_{i_{(j-1)}} < F_{i_j} < \ldots < F_{i_{(t_m)}} = P_{i+1} \leq \ldots,$$

где $F_{i_j}/F_{i_{(j-1)}} = F(P_{i+1}/F_{i_{(j-1)}})$, $1 \leq j \leq t_m$, $1 \leq m \leq k$. Все π'-факторы ряда (*) оставим без изменения. Так как $F_{i_j}/F_{i_{(j-1)}} = F(P_{i+1}/F_{i_{(j-1)}})$ характеристическая подгруппа группы $P_{i+1}/F_{i_{(j-1)}}$, а $P_{i+1}/F_{i_{(j-1)}} \triangleleft G/F_{i_{(j-1)}}$, то $F_{i_j}/F_{i_{(j-1)}} \triangleleft G/F_{i_{(j-1)}}$. Отсюда, по теореме об изоморфизме $F_{i_j} \triangleleft G$ для $j = 1,2,\ldots,t_m$, $m = 1,2,\ldots,k$. Таким образом получаем нормальный ряд в группе G с π'-факторами и нильпотентными π-факторами. По лемме 1(3) число неединичных π-факторов не меньше $l_\pi^n(G)$.

Так как $P_i \leq G_\pi$ для любого $i = 0,\ldots,k-1$, то для каждого i число нильпотентных π-факторов в уплотненном ряде будет не больше $n(G_\pi)$. Учитывая, что таких факторов в ряде (*) ровно k, получаем требуемую оценку $l_\pi^n(G) \leq k \cdot n(G_\pi)$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть* G – π*-разрешимая группа и* $l_p(G) \leq 1$ *для любого* $p \in \pi$. *Тогда* $l_\pi^n(G) = n(G_\pi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. По лемме 2 $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная элементарная абелевая p-подгруппа, $p \in \pi$, – подгруппа Фиттинга $F(G) = F$ группы G, совпадающая со своим централизатором $C_G(F) = C = F = P_1^n = O_{p'p}(G)$ в группе G, и дополняемая в G, т.е. $G = [F]M$. Так как $l_p(G) \leq 1$ для любого $p \in \pi$, то $F = G_p$ и $(F(G_\pi))_{p'} \leq C = F$, т.е. $F = G_p = F(G_\pi)$. Теперь по индукции $l_\pi^n(G/F) = l_\pi^n(G) - 1 = n(G_\pi/F) - 1 = n(G_\pi) + 1 - 1 = n(G_\pi)$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть* G – *π-разрешимая группа,* π = π₁ ∪ π₂. *Тогда* $l_\pi^*(G) \le l_{\pi_1}^*(G) + l_{\pi_2}^*(G)$.

Доказательство. Требуемое неравенство для π-длины π-разрешимой группы справедливо по лемме 5 [7]. Докажем теперь это неравенство для нильпотентной π-длины π-разрешимой группы применяя индукцию по порядку группы G. По лемме 2 $O_{\pi'}(G) = 1$, Ф(G) = 1 и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа – подгруппа Фиттинга F(G) = F группы G, которая является нормальной элементарной абелевой p-подгруппой группы G, $C_G(F) = F = P_1^n = O_{p'p}(G)$ и F дополняема в G, т.е. G = [F]M. Ясно, что $l_\pi^n(G) \le l_\pi^n(G/F) + 1$. Будем считать, что $p \in \pi_1$. Тогда $O_{\pi_1'}(G) \le O_{p'}(G)$ и, значит, $O_{\pi_1'}(G) = 1$. Теперь для факторгруппы G/F по индукции получаем: $l_\pi^n(G) = l_\pi^n(G/F) + 1 \le l_{\pi_1}^n(G/F) + l_{\pi_2}^n(G/F) + 1 \le l_{\pi_1}^n(G) - 1 + l_{\pi_2}^n(G) + 1 \le l_{\pi_1}^n(G) + l_{\pi_2}^n(G)$. Лемма доказана.

Лемма 13. *Если* G – *метанильпотентная группа, то* $l_\pi(G) \le 1$ *и* $l_\pi^n(G) \le 2$ *для любого множества* π *простых чисел.*

Доказательство. Пусть G – метанильпотентная группа, тогда существует такая нормальная нильпотентная подгруппа N в группе G, факторгруппа G/N по которой также нильпотентна. Так как N – нильпотентная подгруппа, то $N = N_\pi \times N_{\pi'}$. Из того, что подгруппа $N_{\pi'}$ характеристична в N, а N нормальна в G, то $N_{\pi'} \lhd G$. Таким образом, группа G обладает следующим нормальным (π′,π)-рядом:

$$1 \lhd N_{\pi'} \lhd N_\pi \times N_{\pi'} \lhd G_\pi N = G_\pi(N_\pi \times N_{\pi'}) = G_\pi N_{\pi'} \lhd G.$$

Так как факторы $N_{\pi'}$ и $G/G_\pi N_{\pi'}$ этого ряда являются π′-группами, а факторы $N/N_{\pi'}$ и $G_\pi N_{\pi'}/N$ – нильпотентными π-группами, то $l_\pi^n(G) \le 2$. Так как $G_\pi N/N \lhd G/N$, то $l_\pi(G) \le 1$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* G – *π-разрешимая группа, и пусть все центральные p-силовские пересечения бициклические для любого* p ∈ π. *Тогда:*

(1) если 2∉π, *то* $l_\pi^n(G) = n(G_\pi)$;

(2) если 2∈π, *то* $l_\pi^n(G) \le 2 + n(G_\pi)$.

Доказательство. Если центральных p-силовских пересечений нет для любого p∈π, то по теореме 1 [1] $l_p(G) \le 1$, а по лемме 11 получаем требуемое равенство $l_\pi^n(G) = n(G_\pi)$. Пусть центральные p-силовские пересечения есть. Выберем в факторгруппе G/N две различные p-силовские подгруппы P_1N/N и P_1^xN/N, где x∈G. Пусть $D/N = P_1N/N \cap P_1^xN/N$ – их центральное p-силовское пересечение в G/N, тогда по лемме 6 существует центральное p-силовское пересечение $K = P_1 \cap P_1^y$ в группе G для некоторого y∈G, где P_1 и P_1^y – p-силовские подгруппы в группе G, и D = KN. По условию K – бициклическая группа, поэтому центральное p-силовское пересечение D/N = KN/N ≅ K/(K ∩ N) – бициклическое как факторгруппа бициклической группы K. Итак, в G/N центральные p-силовские пересечения бициклические для всех $p \in \pi$. Поэтому для доказательства теоремы можно применить индукцию по порядку группы G. В силу леммы 2 $O_\pi(G) = \Phi(G) = 1$, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа – подгруппа Фиттинга F(G)=F группы G, которая является элементарной абелевой p-подгруппой группы G, $p \in \pi$, совпадающей со своим централизатором $C_G(F) = C = F = P_1^n = O_{p',p}(G)$ в группе G, и дополняемой в G, т.е. G=[F]M. Ясно, что $F \le K$ и $K = [F](M_p \cap (M_p)^y)$, где M_p – силовская p-подгруппа в M, $y \in G$.

Если $2 \notin \pi$, то $l_p(G) \le 1$ для любого $p \in \pi$ по теореме 1 [8]. Из леммы 11 следует требуемое равенство $l_\pi^n(G) = n(G_\pi)$. Теорема в этом случае доказана.

Пусть теперь $2 \in \pi$. Если $n(G_\pi) = 1$, то G_π нильпотентна. Применяя лемму 4 [3] и теорему 1 [8], получаем, что $l_\pi^n(G) = \max_{p \in \pi} l_p(G) \le 2 \le n(G_\pi) + 2$, теорема в этом случае доказана. Пусть теперь $n(G_\pi) \ge 2$. Если $O_2(G) = 1$, то F – p-группа, p > 2. Так как центральные пересечения силовских p-подгрупп группы G метациклические, то F – метациклическая p-подгруппа порядка p либо p^2. Если |F| = p, то группа G сверхразрешима и по лемме 13 $l_\pi(G) \le 1$. Теперь, по лемме 7 $l_\pi^n(G) = n(G_\pi) < n(G_\pi) + 2$, теорема в этом случае доказана. Пусть $|F| = p^2$. Тогда факторгруппа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы GL(2,p), порядок которой равен $(p^2 - 1)(p^2 - p)$. Если G/F сверхразрешима, то $l_\pi(G/F) \le 1$ по лемме 13. Отсюда, по лемме 7 $l_\pi^n(G/F) = n((G/F)_\pi)$. Таким образом, в этом случае $l_\pi^n(G) = l_\pi^n(G/F) + 1 = n(G_\pi/F) + 1 \le n(G_\pi) + 2$ и теорема доказана. Пусть G/F несверхразрешима, тогда сверхразрешимый корадикал $K/F = (G/F)^U$ – 2-группа по лемме 11 [4]. Так как $K \le O_\pi(G)$, то $l_\pi^n(K) \le 2$. По лемме 13 для факторгруппы имеем оценку $l_\pi^n(G/K) \le 2$, поэтому $l_\pi^n(G) \le 4$. Так как $n(G_\pi) \ge 2$, то $l_\pi^n(G) \le n(G_\pi) + 2$ и утверждение теоремы доказано.

Пусть $O_p(G) = 1$ для любого p > 2, тогда F – 2-группа. По лемме 8 [9] подгруппа F имеет порядок 2 или 4. Если |F| = 2, то |G| = 2. Пусть |F| = 4. Тогда факторгруппа G/F изоморфна подгруппе группы GL(2,2) ≅ S_3 и G/F сверхразрешима. Теперь по лемме 13 $l_\pi(G/F) \le 1$, а по лемме 7 $l_\pi^n(G/F) = n((G/F)_\pi)$. Итак, окончательно получаем, что $l_\pi^n(G) = l_\pi^n(G_\pi/F) + 1 = n(G_\pi/F) + 1 \le n(G_\pi) + 1 < n(G_\pi) + 2$. Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Анищенко А.Г., Монахов В.С.*** Центральные пересечения и p-длина p-разрешимых групп // Докл. АН БССР, 1977. Т.XXI, № 11. С. 968-971.
2. ***Путилов С.В.*** О нормальном строении конечных π-разрешимых групп // Вопр. алгебры. Мн.: Университетское, 1996. В.5. С. 82-86.
3. ***Черников Н.С., Петравчук А.П.*** О π-длине конечных π-разрешимых групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев, 1993. С. 393-405.
4. ***Монахов В.С., Шпырко О.А.*** О нильпотентной π-длине конечной π-разрешимой группы // Препринт ГГУ им. Ф. Скорины, № 92. Март 2000. С. 14.

5. ***Монахов В.С.*** Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы. Минск, 1975. С. 70-100.
6. ***Huppert B.*** Endliche gruppen I // Berlin, Heidelberg, New-York, Springer-Verl., 1967. C.793.
7. ***Черников Н.С., Петравчук А.П.*** Характеризация периодических локально разрешимых групп с разрешимыми и с конечноэкспонентными силоскими π-подгруппами // Укр. матем. журнал. 1987. Т.39. № 6. С. 761-767.
8. ***Шпырко О.А.*** О конечных π-разрешимых группах с заданными силовскими подгруппами // Известия ГомГУ, 1999. Т.1. № 1(15). Вопросы алгебры. С. 130-136.
9. ***Монахов В.С.*** Произведение сверхразрешимых групп Шмидта // Известия ГомГУ, 1999. Т.1, № 1(15). Вопросы алгебры. С. 52-57.

S U M M A R Y

All groups considered in this paper are finite. The main aim in this note is receipt new bounds of nilpotent π-length for a π-soluble group. To be more precise we obtain new bounds for the nilpotent π-length of π-soluble group in terms of their structure intersections of π-Hall subgroups.

Поступила в редакцию 26.06.2000