УДК 519.9

В.В. Юргелас

Коаппроксимации в пространстве со свойством Бёрлинга-Ханнера

Вводится класс банаховых пространств, в которых имеет место неравенство Бёрлинга-Ханнера [1]. Изучаются некоторые геометрические характеристики таких пространств, устанавливается оценка нормы оператора нелинейного проектирования на подпространство, доказывается аналог теоремы Орлича [2] для безусловно сходящихся рядов.

В 1955 году О. Ханнер в работе [1] привёл доказательство того, что при $p \geq 2$ для произвольной пары функций пространства $L_p(0,1)$ имеет место неравенство

$$||x + y||^p + ||x - y||^p \leq (||x|| + ||y||)^p + |\,||x|| - ||y||\,|^p \qquad (1)$$

(при $p \in (1,2)$ знак неравенства в (1) меняется на противоположный). Десятью годами раньше, как указывает сам О. Ханнер в [1], это неравенство было анонсировано А. Бёрлингом на одном из семинаров, однако его доказательство так и не было опубликовано. Таким образом, является мотивированным следующее:

Определение. *Банахово пространство X, в котором при $p \geq 2$ имеет место неравенство (1) для любых x, y из X, будем называть пространством со свойством Бёрлинга-Ханнера или (BH)-пространством.*

Сразу же отметим, что свойство Бёрлинга-Ханнера оказывается эффективным инструментом при изучении природы некоторых итерационных процессов [3].

1. Некоторые геометрические характеристики (BH)-пространств. Приведём свойства (BH)-пространств, как необходимые для целей дальнейшего изложения, так и представляющие, по-видимому, самостоятельный интерес. При этом все встречающиеся в формулировке интегрирующего утверждения термины будут пояснены при его доказательстве.

Теорема 1. *Всякое (BH)-пространство*

(a) равномерно выпукло;

(b) является p-нормированным;

(c) обладает свойством (L, μ).

Доказательство. (a) Напомним, что банахово пространство X называется равномерно выпуклым [4], если $||x - y|| \leq 2 - 2\delta_x(||x + y||)$ при $||x|| = ||y|| = 1$, где $\delta_x(\varepsilon)$ – неубывающая на промежутке [0,2] функция $\delta_x(0) = 0$ и $\delta_x(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon > 0$.

Итак, пусть $||x|| = ||y|| = 1$ и $\varepsilon = ||x - y||$. Тогда согласно (1)

$$||x + y|| \leq (2^p - \varepsilon^p)^{1/p} = 2\{1 - [1 - (1 - (\varepsilon/2)^p)^{1/p}]\},$$

так что в случае (BH)-пространства можно положить

$$\delta_x(\varepsilon) = 1 - (1 - (\varepsilon/2)^p)^{1/p}.$$

(b) Начнём с определения: нормированное пространство X назовём p-нормированным, если для некоторых $p \geq 2$, $\omega = \omega(p) > 0$, $\tau = \tau(p) > 0$ и произвольных $x, y \in X$ имеет место неравенство

$$\|x - y\|^p \leq \|x\|^p - p\mathrm{Re}\langle \Phi_p(x), y\rangle + \omega\|y\|^p + \tau\|x\|^{p-2}\|y\|^2,$$

где $\Phi_p: X \to 2^{X^*}$ – дуальное отображение пространства X с масштабной функцией $t \to t^\alpha$ [5]:

$\Phi_\alpha(x) = \{\eta \in X^*: \mathrm{Re}\langle \eta, x\rangle = \|x\|^\alpha, \|\eta\|_* = \|x\|^{\alpha-1}, \alpha > 1\}$, $\mathrm{Re}\langle \eta, x\rangle$ – вещественная часть значения линейного непрерывного функционала $\eta \in X^*$ на элементе $x \in X$, $\|\cdot\|_*$ – норма в X^*.

Для доказательства утверждения (b) теоремы обозначим через $\|x\|_C$ – чебышёвскую норму непрерывной функции $x(t)$ на промежутке [0,1]: $\|x\|_C = \max|x(t)|$, $t \in [0,1]$, и заметим, что функция $f_p(t) = (1 + t)^p + (1 - t)^p - 2$ для $p \geq 2$ удовлетворяет неравенству

$$f_p(t) \leq C_p^2 t^2 \|f_{p-2} + 2\|_C \quad (t \in [0,1]), \tag{2}$$

где $C_p^2 = p(p - 1)/2$. Далее, так как согласно (1)

$$\|x - y\|^p + p\mathrm{Re}\langle \eta, x\rangle \leq (\|x\| + \|y\|)^p + |\,\|x\| - \|y\|\,|^p - \|x\|^p,$$

то в случае $\|x\| \leq \|y\|$ будем иметь

$$\|x - y\|^p \leq \|x\|^p - p\mathrm{Re}\langle \Phi_p(x), y\rangle + 2^p\|y\|^p,$$

а в случае $\|x\| > \|y\|$ с учётом (2) получим

$$\|x - y\|^p \leq \|x\|^p - p\mathrm{Re}\langle \Phi_p(x), y\rangle + (\|x\| + \|y\|)^p + |\,\|x\| - \|y\|\,|^p - 2\|x\|^p = \|x\|^p -$$
$$-p\mathrm{Re}\langle \Phi_p(x), y\rangle + \|x\|^p f_p(\|y\|\|x\|^{-1}) \leq \|x\|^p - p\mathrm{Re}\langle \Phi_p(x), y\rangle + C_p^2\|f_{p-2} + 2\|_C\|x\|^{p-2}\|y\|^2,$$

так что $\omega = \omega(p) = 2^p$, $\tau = \tau(p) = C_p^2\|f_{p-2} + 2\|_C$.

(c) Под свойством (L, μ) понимается выполнение так называемого нижнего неравенства параллелограмма

$$\|x + y\|^\alpha + \mu\|x - y\|^\alpha - 2^\beta(\|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha) \leq 0 \tag{3}$$

для некоторых констант $\alpha \geq 1$, $\mu \geq 1$, $\beta \geq 0$ и произвольных x,y из X [3, 5, 6]. Более точно, покажем, что в (BH)-пространстве для $\tau \geq p \geq 2$

$$\|x + y\|^\tau + \|x - y\|^\tau - 2^{\tau-1}(\|x\|^\tau + \|y\|^\tau) \leq 0. \tag{4}$$

Введём в рассмотрение величину

$$\mu = \inf_{x \neq y} \frac{2^{\tau-1}\left(\|x\|^\tau + \|y\|^\tau\right) - \|x + y\|^\tau}{\|x - y\|^\tau} \tag{5}$$

Так как значение μ в (5) не изменится, если infimum вычислить для всех $x,y \in X$, удовлетворяющих условию $\|x - y\| = 1$, то в дальнейшем будем считать выполненным это условие. Наконец, если в неравенстве (1) обозначить $\|x\| = \xi$, $\|y\| = \eta$, $\|x + y\| = \nu$, то (с учётом сделанного замечания) доказываемое утверждение можно переформулировать следующим образом: найти точную нижнюю грань множества значений функции

$$g(\xi, \eta, \nu) = 2^{\tau-1}(\xi, \eta, \nu) - \nu^\tau$$

на множестве D, определяемом системой неравенств

$$\xi \geq 0,\ \eta \geq 0,\ \nu \geq 0,\ \nu^p + 1 \leq (\xi + \eta)^p + |\xi - \eta|^p.$$

Так как функция $h(\xi, \eta) \equiv (\xi + \eta)^p + |\xi - \eta|^p$ монотонно возрастает по каждому аргументу, то при фиксированном ν равенство $h(\xi, \eta) = c$ ($c = \nu^p + 1$) определяет функцию $\eta = \eta(\xi)$, $0 \le \eta \le (c/2)^{1/p}$. А поскольку

$$p(\xi + \eta)^{p-1}(1 + \eta'(\xi)) + p(\xi - \eta)^{p-1}(1 - \eta'(\xi)) = 0,$$

то при $\eta \le \xi$

$$\eta'(\xi) = -\frac{(\xi+\eta)^{p-1} + (\xi-\eta)^{p-1}}{(\xi+\eta)^{p-1} - (\xi-\eta)^{p-1}} \tag{6}$$

если же $\eta \ge \xi$, то

$$\eta'(\xi) = -\frac{(\eta-\xi)^{p-1} - (\eta+\xi)^{p-1}}{(\eta+\xi)^{p-1} + (\eta-\xi)^{p-1}}$$

Покажем, что имеют место неравенства

$$\eta'(\xi)\begin{cases} \ge -(\xi/\eta)^{\tau-1} & \text{при} \quad \eta \le \xi, & (7)\\ \le -(\xi/\eta)^{\tau-1} & \text{при} \quad \eta \le \xi. & (8)\end{cases}$$

В самом деле, если заметить, что отношение

$$(a^x + b^x)/(b^x - a^x)$$

при $a < b$ не возрастает по x, то, полагая $s = \eta/\xi$, в случае $\eta \le \xi$ из представления (6) для $\eta'(\xi)$ будем иметь

$$\eta'(\xi) = -\frac{(1+s)^{p-1} + (1-s)^{p-1}}{(1+s)^{p-1} - (1-s)^{p-1}} \equiv -q(p, s),$$

так что

$$s^{\tau-1} q(\tau,s) \le s^{\tau-1} q(p,s) \le s^{p-1} q(p,s) \le 1. \tag{9}$$

Переписывая (9) в виде $-s^{\tau-1} q(\tau,s) \ge -1$ и учитывая, что $s = \eta/\xi$, приходим к (7). Аналогично устанавливается оценка (8).

Таким образом, функция $g(\xi, \eta, \nu)$ возрастает при $\eta \le \xi$ или, что то же, при $(½)c^{1/p} \le \eta \le (c/2)^{1/p}$, и убывает при $\xi \le \eta$, т.е. при $0 \le \eta \le (½)c^{1/p}$. Но поскольку в силу (7) и (8) (при фиксированном ν)

$$\frac{d}{d\xi}\left(2^{\tau-1}\left(\xi^\tau + \eta^\tau(\xi) - \nu^\tau\right)\right)\begin{cases} \le 0 & \text{при} \quad 0 \le \eta \le (1/2)c^{1/2}, \\ \ge 0 & \text{при} \quad (1/2)c^{1/p} \le \eta \le (c/2)^{1/p}\end{cases}$$

то на кривой $h(\xi,\eta) = c$

$$\min g(\xi, \eta, \nu) = c^{\tau/p} - \nu^\tau = (\nu^p + 1)^{\tau/p} - (\nu^p)^{\tau/p} \ge 1 \quad (0 \le \xi \le (c/2)^{1/p}),$$

что равносильно (4).

2. Коаппроксимации и нелинейное проектирование.

Пусть U – непустое собственное подмножество банахова пространства X. Элемент $u_* \in U$ назовём коаппроксимацией элемента $x \in X$ (терминология работы [7]), если $\| x - u_* \| \le \| x - u \|$ $\forall u \in U$. Доказательство существования, построение коаппроксимации (или их множества) для заданных x и U – это хорошо известная задача о наилучшем приближении [8].

Теорема 2. *Пусть* U *–подпространство* (BH)-*пространства* X. *Тогда для каждого* x *из* X *существует единственная коаппроксимация.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $d = \inf\|x - u\|$, $u \in U$, и $(u_n) \subset U$ – последовательность, реализующая этот infimum.

Так как согласно теореме 1 в (ВН)-пространстве имеет место нижнее неравенство параллелограмма (в форме (3)), то для произвольных u, v ∈ U

$$\|u - v\|^p = \|(x - u) - (x - v)\|^p \le 2^{p-1}(\|x - u\|^p + \|x - v\|^p) -$$
$$- \|2x - u - v\|^p \le 2^{p-1}\{(\|x - u\|^p - d^p) + (\|x - v\|^p - d^p)\},$$

т.е

$$\|u - v\|^p \le 2^{p-1}\{(\|x - u\|^p - d^p) + (\|x - v\|^p - d^p)\}. \qquad (10)$$

Из (10) немедленно вытекает фундаментальность последовательности (u_n) и, следовательно, существование такого элемента $u_\cdot \in U$, что $\|u_n - u_\cdot\| \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. коаппроксимации. Единственность коаппроксимации получается также из (10).

Заметим, что неравенство (10) является обобщением на (ВН)-пространства хорошо известного для гильбертова пространства неравенства Б. Леви [8].

Теорема 2 позволяет определить операцию нелинейного проектирования P в (PH)-пространстве X следующим образом: каждому $x \in X$ поставим в соответствие его коаппроксимацию $u_\cdot \in U$, так что $P(x) = u_\cdot$.

Теорема 3. *Пусть* X – (ВН)-*пространство*, P – *оператор нелинейного проектирования на подпространство* $U \subset X$. *Тогда при любом* $x \in X$

$$\|P(x)\| \le \left(\frac{p\left(2^{p-1}-1\right)}{2}\right)^{1/(p-1)} \|x\| \qquad (11)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из утверждения (а) теоремы 1 следует рефлексивность пространства X (изящное доказательство рефлексивности равномерно выпуклого банахова пространства приведено в [9]), и так как (ВН)-пространство обладает свойством (L,μ), то, как показано в [5], его дуальное отображение является равномерно монотонным:

$$\mathrm{Re}\langle \Phi_p(x) - \Phi_p(y), x - y\rangle \ge \frac{2}{p\left(2^{p-1}-1\right)}\|x - y\|^p \quad \forall x,y \in X. \qquad (12)$$

Но тогда, как известно [10], при фиксированном $x \in X$ функционал $\varphi(u) = \|x-u\|^p/p$: $U \to R$ достигает на U своего infimum'а в единственной точке $u_\cdot \in U$. И поскольку $\Phi_p(u - x)$ является субдифференциалом $\varphi(u)$, то $\theta \in \Phi_p(u_\cdot - x)$. Полагая в неравенстве

$$\mathrm{Re}\langle \Phi_p(u - x) - \Phi_p(v - x), u - v\rangle \ge \frac{2}{p\left(2^{p-1}-1\right)}\|u - v\|^p \ (u,v \in U)$$

$u = u_\cdot$, $v = \theta$, будем иметь

$$\frac{2}{p\left(2^{p-1}-1\right)}\|u_\cdot\|^p \le \mathrm{Re}\,\langle \Phi_p(-x), u_\cdot\rangle,$$

откуда и следует требуемая оценка (11).

В завершение приведём один результат о рядах в (ВН)-пространстве. Напомним, что ряд

$$\sum x_k,\ (k \ge 1) \qquad (13)$$

где x_k – последовательность элементов банахова пространства X, называется безусловно сходящимся [11], если при любой расстановке знаков $\varepsilon_k = \pm 1$ ряд

$$\sum \varepsilon_k x_k,\ (k \ge 1) \qquad (14)$$

сходится. И.М. Гельфандом был установлен следующий критерий безусловной сходимости.

Теорема 4 [12]. *Ряд (13) безусловно сходится точно тогда, когда множество* M *всех векторов вида (14), где* $\varepsilon_k = 0 \pm 1$. *является компактным.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что из безусловной сходимости ряда (13) вытекает сходимость ряда

$$\sum \alpha_k x_k, \quad (k \geq 1)$$

для любой ограниченной числовой последовательности (α_k), а также оценка

$$\left\| \sum_{k \geq 1} \alpha_k x_k \right\| \leq \sup |\alpha_k| \cdot \sup \left\| \sum_{k \geq 1} \varepsilon_k x_k \right\|, \quad \varepsilon_k = \pm 1.$$

Будем говорить, что ряд (13) p–абсолютно сходится, если сходится числовой ряд $\sum \|x_k\|^p$ $(k \geq 1)$.

Теорема 5. *В* (BH)-*пространстве всякий безусловно сходящийся ряд* p-*абсолютно сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения можно провести с использованием теоремы 4 и свойства (L, μ) (BH)-пространства. Однако, более лаконичными представляются рассуждения с помощью следующей теоремы М.И. Кадеца.

Теорема 6 [13]. *Пусть* X – *равномерно выпуклое банахово пространство и ряд (13) безусловно сходится в* X. *Тогда* $\sum \delta_X(x_k) < \infty$ $(k \geq 1)$ $(\delta_X(\varepsilon) = 1$ *при* $\varepsilon > 2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5. Согласно утверждению (а) теоремы 1 (BH)-пространство является равномерно выпуклым, и его модуль выпуклости допускает представление

$$\delta_X(\varepsilon) = \operatorname*{infinum}_{\|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| = \varepsilon} \left(1 - \frac{\|x = y\|}{2}\right) \geq 1 - \left(1 - (\varepsilon/2^{\,p}\right)^{1/p}$$

из которого следует, что

$$\delta_X(\varepsilon) \geq \frac{1}{p}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p - \frac{1}{2!p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2p} + \ldots \geq \frac{1}{p}(\varepsilon/2)^p.$$

Применяя теорему 6, получаем p–абсолютную сходимость ряда (13).

Теорема 5 является обобщением известного утверждения В. Орлича [2] на (BH)-пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Hanner O.*** On the uniform convexity of L^p and l^p // Arkiv for Mathematik, 1955. V. 3, № 19. P. 239-244.
2. ***Orlisz W.*** Über unbedingte konvergenz in Funktionen Räumen // Studia Math., 1930. V.1. P. 83-85.
3. ***Трубников Ю.В.*** Метод Абрамова-Гаиповой в банаховых пространствах // Сиб. матем. Журнал, 1988. 1988. Т. 29, № 4. С. 172–179.
4. ***Clarkson J.*** Uniformly convex spaces // Trans. Amer. Math. Soc., 1936. V. 40, № 3. P. 396-414.
5. ***Юргелас В.В.*** О некоторых геометрических характеристиках банаховых пространств и аккретивных операторов // Изв. вузов. Математика, 1982. № 5. С. 63-69.
6. ***Bynum W.L.*** Weak parallelogram laws for Banach spaces // Canad. Math. Bull., 1976. V. 19, № 3. P. 269-275.
7. ***Smarzewski R.*** Strong coapproximation in Banach space // J. Approhim. Theory., 1988. V. 55, № 3. P. 296 –303.
8. ***Ахиезер Н.И.*** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.
9. ***Дистель Дж.*** Геометрия банаховых пространств: Избранные главы. Киев: Вища школа, 1980. С. 43.
10. ***Владимиров А.А., Нестеров Ю.А., Чеканов Ю.Н.*** О равномерно выпуклых функционалах // Вест. Моск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и киберн., 1978. № 3. С. 12-23.

11. ***Мильман В.Д.*** Геометрическая теория пространств Банаха. Часть I // Успехи матем. наук, 1970. Т. 25, № 3. С. 113-174.
12. ***Гельфанд И.М.*** Операторы и абстрактные функции // Докл. АН СССР, 1937. Т. 17, № 5. С. 241-245.
13. ***Кадец М.И.*** Безусловно сходящиеся ряды в равномерно выпуклом пространстве // Успехи матем. наук, 1956. Т. 11, № 5. С. 185-190.

S U M M A R Y

The class of Banach spaces is entered, in which Hanner-Burling inequality takes place. Some geometrical characteristics of such spaces are studied, the estimation of norm of the operator of nonlinear designing on a subspace is installed, the clone of Orlisz theorem is proved for convergent series.