УДК 539.3

Свободные колебания вязкоупругой слоистой оболочки при действии неоднородных осевых сил

Е.А. Корчевская*, Г.И. Михасев**
**Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»*
*** Белорусский государственный университет*

В статье с помощью асимптотического комплексного ВКБ-метода исследованы свободные колебания слоистой композитной вязкоупругой цилиндрической оболочки при действии неоднородного осевого сжатия. Разработана методика построения форм локализованных собственных колебаний и определения соответствующих собственных частот и декремента колебаний слоистой цилиндрической вязкоупругой оболочки, находящейся под действием статической осевой силы, неравномерно распределенной по контуру края, с учетом поперечных сдвигов, вязкости материала и наличия на поверхности оболочки «слабой» образующей.

Ключевые слова: слоистые композитные оболочки, дискремент колебаний, собственная частота.

Free vibrations of the laminated composite viscoelastic cylindrical shell under action of the non–uniform axial compression

E. Korchevskaya*, G. Mikhasev**
**Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»*
***Belarusian State University*

Summary. *Using the asymptotic complex WKB-method free vibrations of the laminated composite viscoelastic cylindrical shell under action of the non–uniform axial compression is investigated. Method for the construction of the localized forms of natural vibrations and the definition of the corresponding natural frequencies of the laminated cylindrical viscoelastic shell under the static axial force non–uniformly distributed over the edge line taking the transverse shears and the «weakest» generatrix on the shell surface into account has been worked out.*

Элементы многих инженерных конструкций, используемых в различных областях человеческой деятельности, представляют собой тонкие слоистые оболочки. Особое внимание уделяется исследованию вопросов, связанных с тонкими оболочками в силу того, что такие конструкции сочетают в себе высокую прочность и относительно малый вес. Необходимым элементом исследования на стадии проектирования оболочечных конструкций является определение собственных частот и форм колебаний. Использование в инженерной практике полимерных материалов делает обязательным учет вязкоупругих свойств при исследовании колебаний оболочек.

Исследования колебаний вязкоупругих оболочек проводились в ряде работ [1–7]. В частности в [1], с использованием асимптотического метода, собственные формы вязкоупругих колебаний построены в виде функций, убывающих во времени и локализованных вблизи образующей, испытывающей наибольшую осевую нагрузку. В работе [2] произведен анализ параметров демпфируемых свободных колебаний слоистых композитных цилиндрических оболочек с использованием концепции комплексного модуля упругости. Применена теория деформаций поперечного сдвига, согласно которой предполагается равномерное распределение их по толщине оболочки, и введен компенсирующий поправочный коэффициент. В статье [3] авторы сформулировали модель для анализа частот колебаний трубки с кратным числом слоев демпфирования. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки рассматриваются в [4]. Здесь для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в легком заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол. Материалы слоев здесь приняты линейно-вязкоупругими. В работе [5] представлена конечноэлементная формулировка свободных затухающих колебаний. Методом конечных элементов, используя теорию деформации сдвига первого порядка, изучено демпфирование свободных колебаний слоистых конических оболочек в [6]. В статье [7] выведены дифференциальные уравнения слоистых композитных оболочек с комплексными коэффициентами, учитывающими вязкоупругие свойства материала. Получены формулы для собственных частот и форм колебаний указанных оболочек с учетом вязкоупругих свойств составляющих слоев и поперечных сдвигов. Решена задача оптимального проектирования трехслойных оболочек, имеющих фиксированную массу, с целью увеличения наименьших частот собственных колебаний.

Однако практически отсутствуют работы, в которых рассматривались бы колебания слоистых композитных вязкоупругих оболочек при действии неоднородных статических нагрузок. Это обусловлено, во-первых, тем, что такого рода задачи стали актуальными относительно недавно, и, во-вторых, их математической сложностью, связанной с громоздкостью и высоким порядком разрешающих уравнений теории многослойных оболочек. В подавляющем большинстве публикаций начальные напряжения, вызванные действием внешних статических сил, предполагаются однородными, не зависящими от криволинейных координат оболочки.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку длины L, состоящую из N изотропных слоев, характеризующихся толщиной h_k, модулем Юнга E_k, плотностью ρ_k и коэффициентом Пуассона ν_k, $k = 1,2,\ldots,N$. В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-либо k-ого слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1 = Rs$, $\alpha_2 = R\varphi$. Здесь R – радиус цилиндра исходной поверхности, φ и s – окружная и продольная координаты соответственно.

Будем считать, что выполняются гипотезы теории слоистых оболочек, сформулированные Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [8]. В частности, принимается, что тангенциальные перемещения распределены по толщине пакета слоев по нелинейному закону согласно обобщенной кинематической гипотезе Тимошенко. В рамках принятых гипотез в [8] выведена система двенадцати уравнений, описывающих движение слоистой анизотропной оболочки. В случае, когда физические характеристики слоев различаются незначительно и в предположении об образовании большого количества волн малой длины в окружном или осевом направлении данная система сведена к системе трех уравнений [8]:

$$\begin{cases} \dfrac{Eh^3\eta_3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(1-\dfrac{\theta h^2}{b}\Delta\right)\Delta^2\chi^* + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2 F^*}{\partial\alpha_1^2} - T_1^0\dfrac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1^2} - \rho h\Omega^2 W^* = 0, \\ \Delta^2 F^* = \dfrac{Eh}{R}\dfrac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1^2}, \quad W^* = \left(1-\dfrac{h^2}{b}\Delta\right)\chi^*. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат α_1, α_2, E, ν, ρ – осредненные модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала соответственно, F^*, χ^* – функции напряжений и перемещений, W^* – нормальный прогиб, Ω – частота собственных колебаний, T_1^0 – мембранное осевое усилие, η_3, θ, b – параметры, учитывающие поперечные сдвиги и вязкоупругие свойства материала, определяемые по формулам [7–8].

Следуя [9], положим

$$K/\pi^2 = \varepsilon^2\kappa, \quad K\theta/\pi^2 = \varepsilon^3\tau, \quad \kappa,\tau \sim 1 \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{2}$$

где $K = \pi^2 h^2/\left(bR^2\right)$, а $\varepsilon^4 = h^2\eta_3/\left[12R^2\left(1-\nu^2\right)\right]$ – малый параметр.

Уравнения (1) перепишем в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \varepsilon^4\left(1-\varepsilon^3\tau\Delta\right)\Delta^2\chi + \varepsilon^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \varepsilon^2 t(\varphi)\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\left(1-\varepsilon^2\kappa\Delta\right)\chi - \Lambda\left(1-\kappa\varepsilon^2\Delta\right)\chi = 0, \\ \varepsilon^2\Delta^2 F - \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\left(1-\varepsilon^2\kappa\Delta\right)\chi = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь

$$T_1^0(\varphi) = -Eh\varepsilon^2 t(\varphi), \qquad \Lambda = \frac{\rho R^2}{E}\Omega^2, \qquad l = L/R,$$

$\chi^* = R\chi$, $F^* = \varepsilon^2 EhR^2 F$, $\Lambda = \omega + i\alpha$, ω – безразмерная собственная частота колебаний, α – безразмерный декремент колебаний.

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания

$$F = \Delta F = \chi = \Delta\chi = \Delta^2\chi = 0, \text{ при } s=0,\ l. \tag{4}$$

Зависимость мембранного осевого усилия от окружной координаты является причиной появления на поверхности оболочки «наиболее слабых» областей, которые приводят к сильной локализации форм колебаний.

Метод решения. Принимая во внимание неоднородность нагружения по окружной координате, будем исследовать формы собственных колебаний, локализованные в окрестности «наиболее слабой» образующей $\varphi = \varphi_0$. Введем растяжение масштаба в окрестности этой образующей:

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^{1/2}\xi. \tag{5}$$

Согласно [10] решение задачи (3), (4) будем искать в виде

$$\chi = \chi_m(\varphi)\sin\left(p_m s/\varepsilon\right), \quad F = \Phi_m(\varphi)\sin\left(p_m s/\varepsilon\right),$$
$$p_m = m\pi\varepsilon/l, \quad m = 1,2,\ldots, \tag{6}$$

где

$$\left\{\chi_m, \Phi_m\right\} = \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\left\{\chi_{mj}(\xi), \Phi_{mj}(\xi)\right\}\exp\left\{i\left(\varepsilon^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}a\xi^2\right)\right\}$$

Разложим параметры, характеризующие собственную частоту колебаний и декремент по степеням малого параметра ε:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots,\ \alpha = \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ldots \quad (7)$$

Параметры, характеризующие поперечные сдвиги и учитывающие вязкоупругие свойства слоев представим в виде:

$$\kappa = \kappa_r + i\varepsilon\kappa_i\,,\ \tau = \tau_r + i\varepsilon\tau_i\,. \quad (8)$$

Функцию $t(\varphi)$, зависящую от окружной координаты, разложим в окрестности $\varphi = \varphi_0$ в ряд:

$$t(\varphi) = t(\varphi_0) + \varepsilon^{1/2}t'(\varphi_0)\xi + \frac{1}{2}\varepsilon t''(\varphi_0)\xi^2 + \ldots \quad (9)$$

Подставляя (5)–(9) в (3), (4), получим последовательность алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{j}\mathbf{B}_k\mathbf{X}_{j-k} = 0\,,\ j = 0,1,2,\ldots \quad (10)$$

относительно вектор-функции $\mathbf{X}_j = \left(\chi_{mj}, f_{mj}\right)^{\mathrm{T}}$.

Здесь $\mathbf{B}_0$ – (2×2) – матрица с элементами:

$$B_0^{(11)} = \left(p_m^2 + q^2\right)^2 - t(\varphi_0)\left(p_m^2 + \kappa_r p_m^4 + \kappa_r p_m^2 q^2\right) - \omega_0\left(1 + \kappa_r\left(p_m^2 + q^2\right)\right),$$

$$B_0^{(12)} = -p_m^2\,,\ B_0^{(21)} = p_m^2\left(1 + \kappa_r\left(p_m^2 + q^2\right)\right),$$

$$B_0^{(22)} = \left(p_m^2 + q^2\right)^2.$$

При $j = 0$ имеем однородную систему алгебраических уравнений:

$$\mathbf{B}_0\mathbf{X}_0 = 0\,.$$

Из условия существования нетривиального решения этой системы находим формулу для действительной части частотного параметра нулевого приближения:

$$\omega_0(q,\varphi_0,p_m) = \frac{\left(p_m^2 + q^2\right)^2}{\left(1 + \kappa_r\left(p_m^2 + q^2\right)\right)} + \frac{p_m^4}{\left(p_m^2 + q^2\right)^2} - t(\varphi_0)p_m^2\,. \quad (11)$$

Из условий

$$\frac{\partial\omega_0}{\partial q} = \frac{\partial\omega_0}{\partial\varphi_0} = 0 \quad (12)$$

находим волновое число q^0 и «наиболее слабую» образующую φ_0^0, а также выражение для нулевого приближения наименьшей частоты ω_0^0.

При отыскании минимума возможны три существенно разных случая:

A) $p_m > z_0$,

B) $p_m < z_0$,

C) $p_m \approx z_0$,

где z_0 – положительный корень уравнения

$$-2\left(1 + \kappa_r p_m z\right)^2 + z^4\left(2 + \kappa_r p_m z\right) = 0\,. \quad (13)$$

При $p_m > z_0$ имеем

$$\omega_0^0 = 1 - t(\varphi_0)p_m^2 + \frac{p_m^4}{1 + \kappa_r p_m^2}\,,\ q^0 = 0\,. \quad (14)$$

При $p_m < z_0$ получаем

$$\omega_0^0 = \frac{z_0^2 p_m^2}{1 + \kappa_r p_m z_0} + \frac{p_m^2}{z_0^2} - t(\varphi_0)p_m^2\,,$$

$$q^0 = \sqrt{p_m(z_0 - p_m)}\,. \quad (15)$$

При $p_m \approx z_0$ нарушается асимптотический характер построенных решений. И этот случай требует перестройки асимптотического решения.

При $j = 2$ система (10) является неоднородной. Условие ее совместности приводит к соотношению для вычисления параметра a

$$a = i\left(\omega_{\varphi\varphi}^0 / \omega_{qq}^0\right)^{1/2},$$

а также к уравнению относительно $P_0(\xi)$:

$$\frac{d^2P_0}{d\xi^2} + ia\left[2\xi\frac{dP_0}{d\xi} + P_0\right] + \frac{2\omega_1}{\omega_{qq}^0}P_0 + \frac{2i\alpha_1}{\omega_{qq}^0}P_0 + \Re = 0\,,$$

где

$$\Re = \left(\frac{2\tau_r p_m^6}{\omega_{qq}^0\left(1 + \kappa_r p_m^2\right)} + \frac{ip_m^2}{\omega_{qq}^0\left(1 + \kappa_r p_m^2\right)}\left\{\kappa_i p_m^4 + \kappa_i + \kappa_r\right\}\right)P_0$$

при $p_m > z_0$,

$$\Re = \left(\frac{2\tau_r p_m^3 z_0^3}{\omega_{qq}^0\left(1 + \kappa_r p_m z_0\right)} + \frac{iz_0^4}{\omega_{qq}^0\left(1 + \kappa_r p_m z_0\right)}\right)\left\{\frac{\kappa_i\kappa_r}{z_0}p_m^5 + \kappa_i p_m^3 z_0^3 + \kappa_r\kappa_i p_m^4 - \frac{\kappa_i}{z_0}p_m^5 + \right.$$

$$\left.+ \frac{\kappa_i}{z_0}p_m^3 + \frac{\kappa_i}{z_0^3}p_m - \frac{\kappa_i}{z_0^4}p_m^2 + \frac{\kappa_i\kappa_r}{z_0^2}p_m^2 - \frac{\kappa_i\kappa_r}{z_0^3}p_m^3\right\}\Bigg)P_0 \qquad \text{при} \qquad p_m < z_0.$$

При

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^{(n)} = \left(\frac{1}{2} + n\right)\sqrt{\Lambda_{qq}^0 \Lambda_{\varphi\varphi}^0} + \sigma ,$$

где

$$\sigma = \left(\frac{\tau_r p_m^6}{\left(1+\kappa_r p_m^2\right)} + \frac{i p_m^2}{2\left(1+\kappa_r p_m^2\right)} \left\{ \kappa_i p_m^4 + \kappa_i + \kappa_r \right\} \right)$$ (случай А), и

$$\sigma = \frac{\tau_r p_m^3 z_0^3}{\left(1+\kappa_r p_m z_0\right)} + \frac{i z_0^4}{2\left(1+\kappa_r p_m z_0\right)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\kappa_i \kappa_r}{z_0} p_m^5 + \kappa_i p_m^3 z_0^3 + \kappa_r \kappa_i p_m^4 - \frac{\kappa_i}{z_0} p_m^5 + \right.$$

$$\left. + \frac{\kappa_i}{z_0} p_m^3 + \frac{\kappa_i}{z_0^3} p_m - \frac{\kappa_i}{z_0^4} p_m^2 + \frac{\kappa_i \kappa_r}{z_0^2} p_m^2 - \frac{\kappa_i \kappa_r}{z_0^3} p_m^3 \right\}$$

в случае В, уравнение имеет решение в виде полинома Эрмита степени n.

Заключение. С использованием асимптотических методов получены в явном виде формулы для собственных частот и декремента колебаний неоднородно преднапряженных в осевом направлении цилиндрических вязкоупругих оболочек с учетом наличия «слабой» образующей и поперечных сдвигов слоев.

Работа выполнена как составная часть задания «Механика 2.22», входящего в Государственную комплексную программу научных исследований ГКПНИ «Механика» на 2006–2010 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ботогова, М.Г. Свободные колебания вязкоупругой некруговой цилиндрической оболочки под действием однородной осевой нагрузки / М.Г. Ботогова, Г.И. Михасев // Прикладная механика. – 1999. – № 11. – С. 68–74.
2. Singh, S.P. Damped free vibrations of layered composite cylindrical shells / S.P. Singh, K. Gupta // J. Sound and Vibr. – 1994. – № 2. – P. 191–209.
3. Zhou, H. Damping of composite tubes with embedded viscoelastic layers / H. Zhou, M. D. Rao // J. of Vibration and Acoustics. – 1996. – Vol. 118. – P. 384–389.
4. Старовойтов, Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э.И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.
5. Ramech, T.C. Vibration and damping analysis of conical shells with constrained damping treatment / T.C. Ramech, N. Ganesan // Finite Elements in Analysis and Design. – 1993. – № 12. – P. 17–29.
6. Analysis of free damped vibrations of laminated composite conical shells / A. Korjakin [et al.] // Composite Structures. – 1998. – № 41. – P. 39–47.
7. Ботогова, М.Г. Свободные колебания слоистых вязкоупругих цилиндрических оболочек / М.Г. Ботогова, Г.И. Михасев, Е.А. Корчевская // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фунд. науки. Механика. – 2006. – № 10. – С. 125–133.
8. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
9. Korchevskaya, E. Buckling and vibrations of composite laminated cylindrical shells under axial load / E. Korchevskaya, G. Mikhasev, D. Marinkovich, U. Gabbert // Die 6. Magdeburger Maschinenbau–Tage: proceedings of the conference, Magdeburg, 24–26 September 2003 / Otto–von–Guericke–Universität Magdeburg; edited by: R. Kasper [et al.]. – Magdeburg, 2003. – P. 183–189.
10. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 292 с.

Поступила в редакцию 26.05.2010

Адрес для корреспонденции: г. Витебск, ул. П. Бровки, д. 7, корп. 1, кв. 93, тел.: +37529 591-09-35 – Корчевская Е.А.