УДК 517.538.52+517.538.53

Асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для двух экспонент

А.П. Старовойтов, Г.Н. Казимиров, А.В. Астафьева
Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины»

Для системы функций $\{e^z, e^{2z}\}$ изучаются асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде $\left\{\pi^j_{2n,n+m_1}(z,e^{jz})\right\}_{j=1}^2$. В частности, для любого комплексного числа z найдены асимптотики поведения разностей $e^{jz}-\pi^j_{2n,n+m_1}(z,e^{j\xi})$ при $j=1,2$. Полученные результаты дополняют исследования Эрмита, Паде, Перрона, Д. Браесса, А.П. Аптекарева, относящиеся к изучению сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для системы экспонент.

Ключевые слова: *совершенная система функций, совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Эрмита–Паде, асимптотические равенства, интегралы Эрмита.*

Asymptotic of Hermite–Pade approximants for two exponents

A.P. Starovoitov, G.N. Kazimirov, A.V. Astafieva
Educational establishment «Gomel State Francisk Skoriny University»

We study the asymptotic properties of Hermit–Pade approximants $\left\{\pi^j_{2n,n+m_1}(z,e^{jz})\right\}_{j=1}^2$ for a system of functions $\{e^z, e^{2z}\}$. In particular, we determine asymptotic behavior of differences $e^{jz}-\pi^j_{2n,n+m_1}(z,e^{j\xi})$ for $j=1,2$ for any complex of the number of z. The obtained results supplement the research of Hermite, Pade, Perron, D. Braess and A.I. Aptekarev dealing with the study of the convergence of Hermite–Pade approximants for systems of exponents.

Key words: *perfect system of functions, joint approximants of Pade, Hermite–Pade approximants, asymptotic equality, Hermite integral.*

Основная цель настоящей работы – исследование сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для систем экспонент.

Рассмотрим набор

$$f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i,\ j=1,2,\ldots,k \qquad (1)$$

голоморфных в нуле функций или формальных степенных рядов. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа $n, m_1, m_2, \ldots, m_k$. По определению полагаем $m=\sum_{i=1}^k m_i$, $n_j=n+m-m_j$, $j=1,2,\ldots,k$. Известно (см. [1]), что при $j=1,2,\ldots,k$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P^j_{n_j}(z)$, $deg\, Q_m \le m$, $deg\, P^j_{n_j} \le n_j$, для которых

$$R^j_{n,m}(z)=Q_m(z)f_j(z)-P^j_{n_j}(z)=A_j z^{n+m+1}+\ldots \qquad (2)$$

Если $k=1$, то согласно теореме Паде многочлены $Q_m(z)$, $P^1_n(z)$ определяются с точностью до однородной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию $\pi_{n,m}(z,f_1)=P^1_n(z)/Q_m(z)$, которую называют аппроксимацией Паде для $f_1(z)$. При $k\ge 2$ дроби $\pi^j_{n,m}(z)=\pi^j_{n_j,m}(z;f_j)=P^j_{n_j}(z)/Q_m(z)$, $j=1,2,\ldots,k$ условиями (2) определяются, вообще говоря, неоднозначно. В случае единственности множества $\{\pi^j_{n,m}(z)\}_{j=1}^k$ его элементы называют совместными аппроксимациями Паде для системы функций (1). Единственность, в частности, имеет место для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем функций см. в [1]). Совершенной, например, является система экспонент $f_j(z)=e^{\lambda_j z}$, $j=1,2,\ldots,k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные комплексные числа (см. [1], теорема 2.1). Без формального определения этот факт был установлен Ш. Эрмитом [2].

В случае одной экспоненты e^z явные выражения для числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ получил Паде. Опираясь на полученные представления, он доказал, что при $n/m \to \gamma$, $0 \le \gamma \le +\infty$ на компактах комплексной плоскости дроби $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ равномерно сходятся к e^z. О. Перрон обобщил результаты о сходимости $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ к e^z, доказав ее при $n+m \to +\infty$. Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z - \pi_{n,m}(z;e^{\xi})$. Гипотеза Г. Мейнардуса была доказана Д. Браессом [3]: для любого комплексного z при $n+m \to +\infty$

$$e^z - \pi_{n,m}(z;e^{\xi}) = \\ = \frac{(-1)^m\, n!\, m!\, e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!\,(n+m+1)!} z^{n+m+1}\ (1+o(1)). \qquad (3)$$

При доказательстве асимптотического равенства (3) Д. Браесс опирается на интегральные представления числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$, полученные О. Перроном [4]:

$$P_n^1(z;e^{\xi}) = \int_0^{\infty} t^m\,(t+z)^n\, e^{-t} dt,$$

$$Q_m(z;e^{\xi}) = \int_0^{\infty} t^n\,(t-z)^m\, e^{-t} dt.$$

Позже выяснилось (см., например, [1], [5]), что явный вид числителей и знаменателей аппроксимаций Паде для e^z и, более того, для совместных аппроксимаций Паде к набору экспонент фактически был известен еще Эрмиту. Эрмит [2] ввел в рассмотрение интегралы

$$M = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^{\infty} [x\prod_{i=1}^{k}(x-i)]^{p-1} e^{-x} dx,$$

$$M_j = \frac{e^j}{(p-1)!}\int_j^{\infty} [x\prod_{i=1}^{k}(x-i)]^{p-1} e^{-x} dx, \quad (4)$$

$$\varepsilon_j = \frac{e^j}{(p-1)!}\int_0^{j} [x\prod_{i=1}^{k}(x-i)]^{p-1} e^{-x} dx,$$

которые после небольших преобразований (см. [1], [5]) приводят к решению системы (2) для набора экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$:

$$Q_m(z) = \frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\infty} [x^n \prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx,$$

$$P_{n_j}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_{\lambda_j}^{\infty} [x^n \prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx, \quad (5)$$

$$R_{n,m}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\lambda_j} [x^n \prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx.$$

В первых двух интегралах (5) интегрирование осуществляется по контуру, идущему в $+\infty$ и $Rez > 0$. При $Rez \le 0$ значения $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$ находятся с помощью аналитического продолжения. В интеграле, определяющем $R_{n,m}^j(z)$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j.

Интегралы Эрмита (4) при некоторых простых p дают удачное приближение к набору $\{e^j\}_{j=1}^{k}$:

$$e^j - \frac{M_j}{M} = \frac{\varepsilon_j}{M}, \quad j = 1,2,...,k. \qquad (6)$$

Так, в предположении существования равенства

$$a_0 + a_1 e + ... + a_k e^k = 0,$$

где $a_0 \ne 0$ и $a_0, a_1, ..., a_k$ – целые числа, из (6) следует, что

$$\left(a_0 M + a_1 M_1 + ... + a_k M_k\right) + \\ + \left(a_0 \varepsilon + a_1 M \varepsilon_1 + ... + a_k \varepsilon_k\right) = 0.$$

Последнее соотношение противоречит следующим элементарным свойствам интегралов Эрмита: M – целое отличное от нуля число, не делящееся на p при достаточно большом простом p; M_j – целые числа кратные p; ε_j убывают к нулю при $p \to +\infty$. Таково, в общих чертах, доказательство трансцендентности числа e, предложенное Эрмитом (см. [6]).

В 1882 году Линдеман, несколько усложнив рассуждения Эрмита, доказал трансцендентность числа π, решив, тем самым, одну из самых старых задач математики – «задачу о квадратуре круга». В основу предложенного им доказательства (см. [6]) легли элементарные свойства интегралов (5) и равенства

$$e^{\lambda_j} - \frac{P_{n_j}^j(1)}{Q_m(1)} = \frac{R_{n,m}^j(1)}{Q_m(1)}, \quad j = 1,2,...,k,$$

где λ_j – различные алгебраические числа, а $P_{n_j}^j(z)$, $Q_m(z)$, $R_{n,m}^j(z)$ определены соотношениями (5), если положить в них $n = m_1 = m_2 = ... = m_k$.

Е.М. Никишин был один из первых, кто обратил внимание на важность дальнейшего изучения свойств интегралов (4), (5). В частности, им была поставлена задача об исследовании сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы экспонент. Ее решение было получено А.И. Аптекаревым [5], который, найдя асимптотику поведения первого из интегралов в (5), показал, что при $n+m \to +\infty$ для любого

$j=1,2,...,k$ $\pi^{j}_{n_j,m}(z;e^{\lambda_j \xi})$ сходится равномерно на компактах комплексной плоскости к $e^{\lambda_j z}$. В частности, в [5] установлен следующий аналог леммы Перрона (см. [4]), доказывающей сходимость $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ к e^{z}: для любых n, m_j

$$\left|Q_m(z)-\exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^{r}\lambda_j m_j}{n+m}z\right\}\right|\le$$

$$\le\frac{\left|z\sum_{j=1}^{r}|\lambda_j|\right|^2}{n+m}\exp\left\{\left|z\sum_{j=1}^{r}|\lambda_j|\right|\right\},$$

где $Q_m(z)$ – знаменатель совместных аппроксимаций Паде к набору $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$. Из этого неравенства следует, что при $n+m\to+\infty$ для любого $|z|\le L$

$$Q_m(z)=\exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^{r}\lambda_j m_j}{n+m}z\right\}\cdot\left\{1+O\left(\frac{1}{n+m}\right)\right\}. \quad (7)$$

Учитывая современную терминологию, в дальнейшем совместные аппроксимации Паде будем называть аппроксимациями Эрмита–Паде.

В настоящей работе исследуется асимптотика интегралов Эрмита, определяющих в (5) функции $R^{j}_{n,m}(z)$. В частности, найдена асимптотика поведения аппроксимаций Эрмита–Паде для системы из двух экспонент $\{e^{z},e^{2z}\}$, в случае, когда $n=m_2$, m_1 – произвольное целое неотрицательное число и $n+m\to\infty$. Ранее, в работах [7], [8] аналогичные результаты были получены, соответственно, в диагональном случае, когда $n=m_1=m_2$, и при ограничениях на рост m: $\lim\limits_{n\to\infty} m^2/n=0$.

Первый результат об асимптотике диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде к набору из двух марковских функций был получен В.А. Калягиным [9]. Главный член асимптотики, а также сходимость аппроксимаций Эрмита–Паде для набора марковских функций, порожденных системой Анжелеско, были исследованы в фундаментальной работе А.А. Гончара и Е.А. Рахманова [10]. Вопросы единственности и свойства главного члена асимптотики аппроксимаций Эрмита–Паде марковских функций для системы Никишина интенсивно исследовались рядом авторов (см. обзор [11]). Отметим также работу [12], в которой рассматриваются близкие задачи.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть* $\{e^{z},e^{2z}\}$ *– набор из двух экспонент, а* $\pi^{j}_{n_j,m}(z;e^{j\xi})$ *– соответствующие этому набору аппроксимации Эрмита–Паде. Тогда, если* $m_2=n$, $m=n+m_1$, $n_1=2n$, $n_2=n+m_1$, *где* m_1 *– произвольное целое неотрицательное число, то для любого* z, $|z|\le L$ *при* $n\to+\infty$

$$e^{z}-\pi^{1}_{2n,n+m_1}(z;e^{\xi})=(-1)^{m}\frac{z^{2n+m_1+1}}{2\cdot(2n+m_1)!}\times \quad (8)$$

$$\times B\big((m_1+1)/2;n+1\big)\,e^{z}\,e^{\sqrt{m_1/(2n+m_1)}\,z}(1+o(1)),$$

$$e^{2z}-\pi^{2}_{n+m_1,n+m_1}(z;e^{2\xi})=(-1)^{m}\frac{z^{2n+m_1+1}}{2\cdot(2n+m_1)!}\times$$

$$\times B\big((m_1+1)/2;n+1\big)\,e^{2z}\times$$

$$\times\left\{e^{\sqrt{m_1/(2n+m_1)}\,z}+(-1)^{m_1}e^{-\sqrt{m_1/(2n+m_1)}\,z}\right\}(1+o(1)). \quad (9)$$

где $B(\cdot;\cdot)$ *– бета-функция Эйлера.*

Доказательство. Из (5) следует, что в рассматриваемом случае

$$R^{1}_{n,m}(z)=\frac{z^{2n+m_1+1}}{(2n+m_1)!}\int_0^1 x^n(x-1)^{m_1}(x-2)^n\,e^{z(1-x)}dx.$$

В интеграле

$$I_1(z)=\int_0^1 x^n(x-1)^{m_1}(x-2)^n\,e^{z(1-x)}dx$$

сделаем замену $x=1-u$. В результате получим

$$I_1(z)=(-1)^{n+m_1}\int_0^1 u^{m_1}(1-u^2)^n\,e^{zu}du.$$

При $j=0,1,2,...$ рассмотрим интегралы

$$J_1^{j}=\int_0^1(1-u^2)^n u^{m_1+j}\,du.$$

Тогда

$$J_1^{j}=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-u^2\right)^n\left(u^2\right)^{\frac{m_1+j-1}{2}}du^2=$$

$$=\frac{1}{2}B\big((m_1+j+1)/2;n+1\big). \quad (10)$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы $J_1^1-u_0J_1^0=0$. Тогда, выражая бета-функции Эйлера через гамма-функции, получим равенство

$$u_0=\frac{J_1^1}{J_1^0}=\frac{\Gamma\big((m_1+2)/2\big)}{\Gamma\big((m_1+1)/2\big)}\cdot\frac{\Gamma\big((m_1+2n+3)/2\big)}{\Gamma\big((m_1+2n+4)/2\big)}.$$

Применяя теперь формулу Стирлинга, нетрудно показать, что

$$u_0=\sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}}\,\big(1+o(1)\big). \quad (11)$$

Следовательно, при достаточно больших n $u_0 \in [0,1]$.

Воспользовавшись теоремой Тейлора, будем иметь

$$e^{uz} = e^{u_0 z} e^{z(u-u_0)} =$$
$$= e^{u_0 z}\left\{1 + z(u-u_0) + \frac{z^2}{2}(u-u_0)^2 + \ldots\right\} =$$
$$= e^{u_0 z} + z(u-u_0)e^{u_0 z} + \rho_u(z),$$

где при $|z| \le L$ и $u \in [0,1]$

$$|\rho_u(z)| \le |u-u_0|^2 \left\{\frac{L^2}{2!} + \ldots + \frac{L^n}{n!} + \ldots\right\} \le L_1 |u-u_0|^2.$$

Учитывая выбор u_0 и равенство (10), получим

$$I_1(z) = (-1)^{n+m_1}\left\{\begin{array}{l}\int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1} e^{u_0 z} du + \\ + \int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1} \rho_u(z) du\end{array}\right\} =$$
$$= (-1)^{n+m_1} \frac{e^{u_0 z}}{2} B\big((m_1+1)/2; n+1\big) + A_\rho(z), \qquad (12)$$

где при $|z| \le L$

$$|A_\rho(z)| \le L_1 \int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1}(u^2 - uu_0) du = L_1\left(J_1^2 - u_0 J_1^1\right).$$

С учетом равенств (10) и определения u_0 отсюда следует неравенство

$$|A_\rho(z)| \le$$
$$\le \frac{L_1}{2}\left\{\frac{B((m_1+3)/2; n+1)}{B(m_1/2+1; n+1)} - \frac{B(m_1/2+1; n+1)}{B((m_1+1)/2; n+1)}\right\} \times$$
$$\times B\big(m_1/2+1; n+1\big). \qquad (13)$$

Выражая бета-функции через гамма-функции и опираясь на формулу Стирлинга, получаем, что при $n \to +\infty$ и $m_1 \to +\infty$

$$\frac{B((m_1+3)/2; n+1)}{B(m_1/2+1; n+1)} \sim \sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}},$$
$$\frac{B(m_1/2+1; n+1)}{B((m_1+1)/2; n+1)} \sim \sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}}.$$

Если же m_1 ограничено, а $n \to +\infty$, то

$$\frac{B((m_1+3)/2; n+1)}{B(m_1/2+1; n+1)} \sim \frac{\Gamma\big((m_1+3)/2\big)}{\Gamma\big((m_1+2)/2\big)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}},$$
$$\frac{B(m_1/2+1; n+1)}{B((m_1+1)/2; n+1)} \sim \frac{\Gamma\big((m_1+2)/2\big)}{\Gamma\big((m_1+1)/2\big)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Поэтому, учитывая (12) и (13), при $n \to +\infty$ будем иметь

$$I_1(z) = (-1)^{n+m_1} \frac{e^{u_0 z}}{2} B\big((m_1+1)/2; n+1\big)(1+o(1)).$$

Теперь, принимая во внимание равенства (11), при $n \to +\infty$ окончательно получим

$$R_{n,m}^1(z) = (-1)^{n+m_1} \frac{z^{2n+m_1+1}}{2\cdot(2n+m_1)!} B\big((m_1+1)/2; n+1\big) \times$$
$$\times e^{\sqrt{m_1/(2n+m_1)}\, z}(1+o(1)). \qquad (14)$$

Представим $R_{n,m}^2(z)$ в виде

$$R_{n,m}^2(z) = \frac{e^z z^{2n+m_1+1}}{(2n+m_1)!}\int_0^1 x^n (x-1)^{m_1}(x-2)^n e^{z(1-x)} dx +$$
$$+ \frac{z^{2n+m_1+1}}{(2n+m_1)!}\int_1^2 x^n (x-1)^{m_1}(x-2)^n e^{z(2-x)} dx =$$
$$= R_1^2(z) + R_2^2(z).$$

Тогда $R_1^2(z) = e^z R_{n,m}^1(z)$. В интеграле, определяющем функцию $R_2^2(z)$, сделаем замену $x-1=u$. Тогда

$$R_2^2(z) = (-1)^n \frac{z^{2n+m_1+1}}{(2n+m_1)!}\int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1} e^{z(1-u)} du.$$

С помощью теоремы Тейлора, получим

$$e^{z(1-u)} = e^{z(1-u_0)} e^{z(u_0-u)} =$$
$$= e^{z(1-u_0)}\left\{1 - z(u-u_0) + \frac{z^2}{2}(u-u_0)^2 - \ldots\right\}.$$

Опираясь на это разложение, по аналогии с доказательством равенства (14) нетрудно показать, что при $n \to +\infty$

$$R_2^2(z) = (-1)^n \frac{z^{2n+m_1+1}}{2(2n+m_1)!} \times \qquad (15)$$
$$\times B\big((m_1+1)/2; n+1\big) \times e^z e^{-\sqrt{m_1/(2n+m_1)}\, z}(1+o(1)).$$

Из (14) и (15) при $n \to +\infty$ следует асимптотическое равенство

$$R_{n,m}^2(z) = (-1)^{n+m_1} \frac{z^{2n+m_1+1}}{2\cdot(2n+m_1)!} \times$$
$$\times B\big((m_1+1)/2; n+1\big)\, e^z \times$$
$$\times\left\{e^{\sqrt{m_1/(2n+m_1)}\, z} + (-1)^{m_1} e^{-\sqrt{m_1/(2n+m_1)}\, z}\right\}(1+o(1)). \qquad (16)$$

Остается заметить, что утверждения теоремы являются простым следствием равенств (14), (16), если только учесть, что при условиях теоремы равенство (7) при $n \to +\infty$ имеет вид

$$Q_m(z) = e^{-z}(1+o(1)).$$

Теорема доказана.

Отметим, что при $n = m_1$ из теоремы вытекает основной результат работы [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.
2. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Acad. Sci. (Paris). – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
3. Braess, D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.
4. Perron, O. Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron // Leipzig–Berlin: Teubner, 1929. – 322 p.
5. Аптекарев, А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. Московск. гос. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
6. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2 т. / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1987. – Т. 1: Арифметика. Алгебра. Анализ. − 324 с.
7. Рябченко, Н.В. Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов, Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1(10). – С. 97–100.
8. Старовойтов, А.П. Об асимптотике совместных аппроксимаций Паде для двух экспонент / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, А.В. Астафьева // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2011. – № 4(64). – С. 5–9.
9. Калягин, В.А. Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности / В.А. Калягин // Матем. сб. − 1979. − Т. 110(152), № 4. – С. 609−627.
10. Гончар, А.А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов // Тр. МИАН СССР. − 1981. − Т. 157. − С. 31–48.
11. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Эрмита–Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, А.Э. Койэлаарс // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6(402). – С. 123–190.
12. Аптекарев, А.И. Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // Матем. сб. – 2011. – Т. 202, № 2. – С. 3–56.

Поступила в редакцию 08.10.2012. Принята в печать 14.12.2012

Адрес для корреспонденции: e-mail: svoitov@gsu.by – Старовойтов А.П.