Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2024

УДК 517.521(076.1)
ББК 22.161.3я73
И20

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 20.12.2023.

Авторы: доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Ж.В. Иванова;** доцент кафедры прикладного и системного программирования ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Т.Л. Сурин**

Рецензент:
доцент кафедры математики и информационных технологий
УО «ВГТУ», кандидат технических наук *А.П. Дмитриев*

Иванова, Ж.В.

И20 Числовые и функциональные ряды : методические рекомендации / Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – 43 с.

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы по дисциплине «Числовые и функциональные ряды» студентов факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)». Оно может быть использовано студентами специальностей «Физико-математическое образование (математика и информатика)», «Информационные системы и технологии. Информационные системы и технологии в здравоохранении», «Программная инженерия» при изучении соответствующих тем в курсе «Математический анализ».

УДК 517.521(076.1)
ББК 22.161.3я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы по дисциплине «Числовые и функциональные ряды» студентов факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)».

Методические рекомендации содержат материал по темам «Числовые ряды и их сходимость», «Функциональные ряды», «Степенные ряды», «Ряды Фурье», который представлен в 7 параграфах. Каждый из них состоит из 3 пунктов. В пункте I – «Контрольные вопросы и задания» – содержатся вопросы по теоретическому материалу. Цель этого раздела – помочь студенту самостоятельно разобраться в теоретическом материале, выделить наиболее важные места, без которых невозможно осмысленное решение задач. В пункте II – «Примеры решения задач» – разобраны наиболее типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. Эти два пункта студенты должны разобрать самостоятельно при подготовке к практическому занятию по данной теме. В пункте III – «Задачи и упражнения для практических занятий» – приведены задания для аудиторной и домашней работы.

Материал, приведенный в издании, соответствует учебной программе по дисциплине «Числовые и функциональные ряды» и может быть использован студентами специальностей «Физико-математическое образование (математика и информатика)», «Информационные системы и технологии. Информационные системы и технологии в здравоохранении», «Программная инженерия» при изучении соответствующих тем в курсе «Математический анализ».

Издание может быть полезно для студентов других специальностей, осваивающих высшую математику.

1. ЧИСЛОВОЙ РЯД И ЕГО СХОДИМОСТЬ

I. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое числовой ряд?
2. Что называется n-ой частичной суммой ряда, суммой ряда?
3. Какой ряд называется сходящимся (расходящимся)?
4. Сформулируйте критерий Коши сходимости ряда.
5. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
6. Верны ли утверждения:

1) если необходимый признак не выполняется, то ряд расходится;
2) если необходимый признак выполняется, то ряд сходится;

II. Примеры решения задач

Пример 1. Для ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....$ найти частичные суммы S_1, S_{10}, S_n и сумму ряда S или доказать его расходимость.

Решение. Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...$ является геометрической прогрессией, для которой $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$. Тогда $S_1 = 1$, а остальные частичные суммы ряда находятся по формуле $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Следовательно,

$$S_n = \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right),$$

$$S_{10} = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right) = \frac{2^{10}-1}{2^9} = 1\frac{511}{512},$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

Значит, данный ряд сходится и его сумма $S = 2$, частичные суммы $S_1 = 1$, $S_{10} = 1\frac{511}{512}$.

Пример 2. Для следующих рядов:

а) $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

найти:

1) n-ую частичную сумму S_n,

2) сумму S ряда.

Решение. а) Ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (|q| \neq 1)$$

является суммой элементов бесконечной геометрической прогрессии.

Его n-ая частичная сумма будет равна

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & \text{при } |q| < 1, \\ \infty, & \text{при } |q| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, если $|q| < 1$, то последовательность $\{S_n\}$ имеет конечный предел, т.е. ряд сходится и его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$.При $|q| > 1$ ряд расходится.

При $q = 1$ наш ряд имеет вид $a + a + \ldots + a + \ldots$. Для данного ряда $S_n = na$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Следовательно, ряд расходится.

При $q = -1$ наш ряд имеет вид $a - a + a - a \ldots + (-1)^{m+1}a + \ldots$. Частичные суммы ряда находятся по формуле

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 2k, \\ a, & \text{при } n = 2k+1. \end{cases}$$

Последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет две подпоследовательности:

$$\{S_{2n}\} \equiv 0, 0, \ldots, 0, \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0,$$

$$\{S_{2n+1}\} \equiv a, a, \ldots, a, \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = a.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, ряд расходится.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{n} aq^n$ сходится при $|q| < 1$ и его сумма равна $S = \dfrac{a}{1-q}$.

б) Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.Его n-я частичная сумма будет равна

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Найдем предел частичных сумм данного ряда

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1.$$

Следовательно, этот ряд сходится и его сумма $S = 1$.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}$.

Решение. Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$, то необходимый признак сходимости числовых рядов не выполняется. Следовательно, ряд расходится.

III. Задачи и упражнения для практических занятий

Для следующих рядов найти S_1, S_5, S_n. Найти сумму рядов или доказать, что ряд расходится.

1.1. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$;

1.2. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$;

1.3. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots$;

1.4. $\frac{2+3}{6}+\frac{2^2+3^2}{6^2}+\ldots+\frac{2^n+3^n}{6^n}+\ldots$;

1.5. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots$;

1.6. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$;

1.7. $\frac{4}{3}+\frac{10}{9}+\frac{28}{27}+\ldots$.

Для следующих рядов записать три первых члена ряда. Проверить, выполняется ли для данных рядов необходимый признак сходимости.

1.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$;

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$;

1.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{2n^4+n+1}$;

1.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$;

1.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^6+1}}$;

1.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}$;

1.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$;

1.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg} n$;

1.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n^2}$;

1.18. $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin\frac{1}{n}$;

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

1.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$;

1.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{2n^2-1}$.

2. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

I. Контрольные вопросы и задания

1. Какой числовой ряд называется рядом с положительными членами?
2. Сформулируйте признаки сравнения. Для каких рядов они применяются?
3. Сформулируйте признак Даламбера.
4. Сформулируйте признак Коши.
5. Сформулируйте интегральный признак Коши.
6. Можно ли для рядов с положительными членами применять необходимый признак сходимости? При исследовании каких рядов применяется необходимый признак сходимости?

II. Примеры решения задач

Пример 1. Исследовать на сходимость следующие ряды, пользуясь необходимым условием сходимости или признаками сравнения.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$; *б)* $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2^2}+\ldots+\frac{1}{1+2^n}+\ldots$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4-n+1}}$.

Решение. *а)* Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$. Проверим, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда. Рассмотрим последовательность $\{\operatorname{arctg} n\}$ членов ряда и найдем ее предел: $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, последовательность $\{arctg\, n\}$ не является бесконечно малой и ряд расходится.

б) Ряд $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2^2}+\ldots+\frac{1}{1+2^n}+\ldots$. является рядом с положительными членами, следовательно, для доказательства сходимости данного ряда можно применить первый признак сравнения.

Так как для всех n выполняется неравенство $\frac{1}{1+2^n}<\frac{1}{2^n}$, то по теореме сравнения данный ряд будет сходиться, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который является суммой элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ –

сходится, следовательно, по первому признаку сравнения, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}$.

в) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4-n+1}}$ является рядом с положительными членами, следовательно, можно воспользоваться признаком сравнения в предельной форме (второй признак сравнения). В качестве ряда сравнения возьмем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Найдем предел отношения n-х членов полученных рядов

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4-n+1}}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4-n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4}}{\sqrt{n^4-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^4}{n^4-n+1}}=1 .$$

Так как данный предел равен 1 и гармонический ряд расходится, то, по предельному признаку сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4-n+1}}$ также расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряды

а) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2^2}+\frac{\sqrt{3}}{2^3}+\ldots$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$.

Решение. а) Данный ряд является рядом с положительными членами. Для исследования на сходимость ряда воспользуемся признаком Даламбера. Общий член ряда определяется формулой $a_n=\frac{\sqrt{n}}{2^n}$. Заменяя в формуле n на $n+1$, получим следующий член ряда $a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}$. Составим отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}:\frac{\sqrt{n}}{2^n}=\frac{2^n\sqrt{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}.$$

Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

Так как $l=\frac{1}{2}<1$, то по признаку Даламбера ряд сходится.

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$ является рядом с положительными членами, воспользуемся признаком Даламбера: $a_n = \frac{n!}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$. Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,2^n}{2^{n+1}\,n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2} = \infty > 1.$$

Так как $q = \infty > 1$, то по признаку Даламбера ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot \sin^n \frac{1}{2n}$..

Решение. Данный ряд является рядом с положительными членами, воспользуемся признаком Коши. Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n \sin^n \frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{2n} = [0\,\infty] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{2}{2n}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2}.$$

Так как $q = \frac{1}{2} < 1$, то по признаку Коши ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Решение. При $\alpha < 0$ предел $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = \infty$, следовательно, не выполняется необходимый признак сходимости ряда и ряд расходится. При $\alpha = 0$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, который тоже расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

Пусть $\alpha > 0$. При таких значениях α функция $\frac{1}{x^{\alpha}}$ – положительная и убывает на промежутке $[1;\infty)$. Следовательно, ряд сходится, если сходится интеграл $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^{R}\frac{1}{x^{\alpha}}dx.$$

Если $\alpha = 1$, то $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \lim_{R\to\infty}\ln x\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty}\ln R = \infty$.

Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{R\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Следовательно, можно сделать вывод, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leq 1$.

Замечание. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ называется обобщенным гармоническим рядом или рядом Дирихле. Этот ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. Данным рядом обычно пользуются при применении предельного признака сравнения.

III. Задачи и упражнения для практических занятий

Исследовать на сходимость следующие ряды, пользуясь необходимым условием сходимости или признаками сравнения:

2.1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots$;

2.2. $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots$;

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$;

2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n-2)}$;

2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-4}{n^3+1}$;

2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^6+1}}$;

2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{3n^2+n-1}}$;

2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}$;

2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$;

2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n^2}$;

2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$;

2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2+1}$;

2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n}$;

2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{2n^2-1}$;

2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$;

2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$;

2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$.

Воспользовавшись признаком Даламбера или Коши, исследовать на сходимость следующие ряды:

2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(n+1)!}$;

2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$;

2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n}\cdot 2^n}$;

2.23. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots$;

2.24. $\frac{3}{1^2\cdot 2!}+\frac{5}{2^2\cdot 3!}+\frac{7}{3^2\cdot 4!}+\ldots$;

2.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n+2^n}$;

2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3^n}$;

2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n\ln(n+1)}$;

2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$;

2.29. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots$;

2.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3n)!}$;

2.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log_2 n)^n}$;

2.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$;

2.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$;

2.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n+1}e^{-n}$;

2.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$;

2.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{1}{n}$;

2.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n n$;

2.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{e^n}$;

2.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n^2}$;

2.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^{n^2}$;

2.41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$;

2.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cdot\arccos^n\frac{1}{n}$.

Воспользовавшись интегральным признаком, исследовать на сходимость следующие ряды:

2.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

2.49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(e^n+1)^2}$;

2.50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$;

2.51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln^2(\ln n)}$;

2.52. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} n$;

2.53. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sin n$;

Исследовать на сходимость следующие ряды:

2.54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^4}$;

2.55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n}$;

2.56. $\frac{1}{1!} + \frac{1 \cdot 11}{3!} + \frac{1 \cdot 11 \cdot 21}{5!} + \frac{1 \cdot 11 \cdot 21 \cdot 31}{7!} + \ldots$;

2.57. $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{8} + \ \ldots$;

2.58. $\cos 1 + \cos \frac{1}{4} + \cos \frac{1}{9} + \ \ldots$;

2.59. $\frac{|\sin 1|}{1!} + \frac{|\sin 2|}{2!} + \frac{|\sin 3|}{3!} + \ \ldots$;

2.60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2n^2 - n + 3}}$;

2.61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 1)^{\alpha}}$;

2.62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{\alpha} n}$.

(В заданиях 2.61 и 2.62 α – произвольное действительное число).

3. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ И ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

I. Контрольные вопросы и задания

1. Какой ряд называется знакочередующимся (знакопеременным)?
2. Какие ряды называются абсолютно и условно сходящимися рядами?
3. Что можно сказать о перестановке членов абсолютно и условно сходящихся рядов?
4. Какие признаки сходимости используются для исследования на сходимость знакочередующихся рядов?
5. Сформулируйте признак Лейбница и следствие из него. Для каких рядов применяется данный признак?
6. Сформулируйте признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля.

II. Примеры решения задач

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

Решение. Данный ряд знакочередующийся. Для исследования на сходимость используем признак Лейбница. Рассмотрим последовательность $\{p_n\} \equiv \left\{\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, ..., \frac{1}{\ln n}.....\right\}$. Проверяем, выполняются ли условия теоремы (признак Лейбница)

1) последовательность $\{p_n\}$ убывающая, так как

$$\frac{1}{\ln 2} < \frac{1}{\ln 3} < ... < \frac{1}{\ln n} < .....$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0$.

Поскольку все условия признака Лейбница выполняются, то ряд сходится. Так как ряд из модулей расходится, то ряд сходится условно.

Пример 2. Сколько членов ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot}{3^n}$ необходимо взять, чтобы найти сумму ряда с точностью до 10^{-3}?

Решение. Данный ряд является знакочередующимся рядом. Для него выполняются условия признака Лейбница:

1) последовательность $\left\{\frac{1}{3^m}\right\}$ – убывающая последовательность $\frac{1}{3} > \frac{1}{3^2} > \frac{1}{3^3} > \ldots > \frac{1}{3^{n-1}} > \frac{1}{3^n} > \ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

Следовательно, ряд сходится. Тогда по следствию из признака Лейбница, для того чтобы найти сумму ряда с точностью до 10^{-3}, необходимо найти такой член ряда, модуль которого меньше 10^{-3}, т.е. найти n для которого выполняется неравенство $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{1000}$ или $3^n > 1000$. Данное неравенство выполняется при $n > 6$. Значит необходимо взять шесть членов данного ряда:

$$S \approx \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} = \frac{242}{729} \approx 0{,}3319.$$

Пример 3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды: *а)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2} \cdot n^2}{2^n}$; *б)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2} \cdot n!}{3^n}$.

Решение. Ряд ***а)*** является знакопеременным рядом. Рассмотрим ряд, составленный из модулей его членов, т.е. ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. Для исследования этого ряда применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^m}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1,$$

следовательно, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ сходится. Значит, ряд *а*) сходится абсолютно.

Ряд ***б)*** является знакопеременным рядом. Рассмотрим ряд, составленный из модулей его членов, т.е. ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$. Для исследования этого ряда применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot 3^m}{3^{n+1} n!} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty > 1,$$

следовательно, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$ расходится. Так как расходимость ряда, составленного из модулей членов ряда *б*) установлена по признаку Даламбера, то ряд *б*) также расходится.

Пример 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды *а*) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$; *б*) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n}{n^2+1}$.

Решение. *а*)Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т.е. ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}.$$

Это ряд с положительными членами. Исследуем на сходимость этот ряд, используя простой признак сравнения. Сравним его с гармоническим рядом $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$, который является расходящимся рядом. Так как, для всех $n \in N$, выполняется неравенство $\ln n < n$, то $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. Тогда из расходимости меньшего ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ следует расходимость большего ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ (первый признак сравнения). Следовательно, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ – расходится.

В примере 1 доказано, что ряд *а*) сходится. Так как ряд из модулей его членов расходится, то ряд *а*) сходится условно.

б) Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов исследуемого ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n 5^n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{5^n}{n^2+1}.$$

Исследуем на сходимость этот ряд, используя признак Даламбера.

$$a_n = \frac{5^n}{n^2+1}, \qquad a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{n^2+2n++1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\cdot(n^2+1)}{5^n\cdot(n^2+2n+1)} = 5\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2n+1} = 5>1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n 5^n}{n^2+1}\right|$ расходится, тогда, ряд *б*) также расходится (признак Даламбера для рядов произвольного знака)

Пример 5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}{n}+\ldots \qquad (3.1)$$

Решение. Составим ряд из модулей членов ряда (3.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Получился гармонический ряд, который расходится. Значит, ряд (3.1) может как сходится, так и расходится.

Ряд (1) является знакопеременным рядом. Для исследования этого ряда применим признак Дирихле. Данный ряд можно представить в виде $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot b_n$, где последовательность $\{a_n\}\equiv\left\{\frac{1}{n}\right\}$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}=1+1-1-1+1+\ldots.$$

Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ является убывающей бесконечно малой последовательностью, так как для всех элементов данной последовательности выполняется неравенство $\frac{1}{n-1}>\frac{1}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ имеет ограниченные частичные суммы:

$S_1=1$, $S_2=1+1=2$, $S_3=1+1-1=1$,

$S_4=1+1-1-1$, …,$S_{4n-3}=1$, $S_{4n-2}=2$,

$S_{4n-1}=1$, $S_{4n}=0$.

Следовательно, по признаку Дирихле, ряд (3.1) сходится. Так как ряд из модулей его членов расходится, то ряд (3.1) сходится условно.

III. Задачи и упражнения для практических занятий

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды

3.1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+}}{n+1}$;

3.2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$;

3.3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+4^n}$;

3.4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!+\sqrt[3]{n+1}}$;

3.5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$;

3.6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$;

3.7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{5^n}$;

3.8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$;

3.9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{(n+2)^n}$;

3.10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n-3}{2n+1}\right)^n$;

3.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$;

3.12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}$;

3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$;

3.14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos\frac{1}{n}$;

3.15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{4n+1}$;

3.16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{5n-3}{2n+1}\right)^n$;

3.17. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}n}{e^n}$;

3.18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}3^n}{2^n n}$;

3.19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}3^n n^n}{(2n+1)^n}$.

4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

I. Контрольные вопросы и задания

1. Что называется функциональной последовательностью, функциональным рядом?

2. Дайте определение точки сходимости, области сходимости функциональной последовательности, функционального ряда.

3. Что называется предельной функцией функциональной последовательности, суммой функционального ряда, остатком функционального ряда?

4. Дайте определение равномерно сходящейся функциональнойпоследовательности.

5. Дайте определение равномерно сходящегося функционального ряда.

6. Сформулируйте признаки равномерной сходимости функциональных рядов.

7. Какой ряд называется мажорантным для функционального ряда?

8. Перечислите свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

II. Примеры решения задач

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{x^n}{1+x^{2n}}. \tag{4.1}$$

Решение. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}$, составленный из модулей членов ряда (4.1). Исследуем полученный ряд с помощью признака Даламбера, зафиксировав переменную x, и считая ее постоянной.

$$u_n=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{|x|^n}{1+x^{2n}},\ u_{n+1}=\frac{1}{n+2}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{1+x^{2n+2}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}(n+1)(1+x^{2n})}{(n+2)(1+x^{2n+2})|x|^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{|x|(1+x^{2n})}{(1+x^{2n+2})}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}|x|^{2n}=0$ при $|x|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}|x|^{2n}=\infty$ при $|x|>1$, рассмотрим следующие случаи.

Если $|x|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|x|^{2m}=0,$ тогда $|x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}=|x|<1$. Следовательно, ряд (4.1) сходится абсолютно.

Если $|x|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|x|^{2m}=\infty,$ тогда

$$|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^{2n+2}}+\dfrac{1}{x^{2}}}{\dfrac{1}{x^{2n+2}}+1}=\frac{|x|}{x^{2}}=\frac{1}{|x|}<1.$$

Следовательно, ряд (4.1) так же сходится абсолютно.

Если $|x|=1$, то ряд (4.1) имеет вид $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{2(n+1)}$ или $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}$. Эти ряды сходятся по признаку Лейбница. Поэтому область сходимости исследуемого ряда:

$$x\in(-\infty,\ +\infty).$$

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}2^{n}\cdot\cos^{n}x. \tag{4.2}$$

Решение. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}2^{n}\cdot|\cos x|^{n}$, составленный из модулей членов ряда (4.2). Исследуем полученный ряд с помощью признака Коши, зафиксировав переменную x и считая ее постоянной.

$$u_n=2^{n}\cdot|\cos x|^{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}2|\cos x|=2|\cos x|.$$

Данный ряд сходится, если выполняется неравенство $2|\cos x|<1$, или $|\cos x|<\dfrac{1}{2}$ т.е. при $x\in\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k,\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in Z$ и расходится при $x\in\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k\right), k\in Z$. Так как ряд из модулей членов ряда (4.2) исследован на сходимость с помощью признака Коши, то ряд (4.2) сходится при $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right),\ k \in Z$.

При $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ ряд (4.2) имеет вид $\sum_{n=2}^{\infty} 1$. Данный ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости. При $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ ряд (4.2) имеет вид $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n$. Данный ряд тоже расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости

Поэтому область сходимости исследуемого ряда:

$$x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right),\ k \in Z.$$

Пример 3. Доказать, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ равномерно сходится на всей числовой прямой.

Решение. Так как для всех значений переменной x выполняется неравенство $|\cos nx| \le 1$, то $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Следовательно, сходящийся ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (ряд Дирихле с показателем $\alpha > 1$) является мажорантным для исследуемого ряда. Поэтому, по признаку Вейерштрасса, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ равномерно сходится на всей числовой прямой.

Замечание. Мы доказали также, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ сходится абсолютно на всей числовой прямой.

Пример 4. Найти область определения функции

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{4.3}$$

и исследовать ее на непрерывность.

Решение. Найдем область сходимости ряда (4.3). Членами данного ряда являются функции $u_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n$. Так как для любых значений переменной x члены ряда больше нуля, то мы можем воспользоваться признаком Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(x^2+\frac{1}{n}\right)=x^2.$$

Следовательно, ряд (4.3) сходится при $x^2<1$ или при $x\in(-1,1)$. При $x=\pm 1$ ряд имеет вид $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Данный ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда: $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$. Таким образом, областью сходимости ряда является интервал (–1, 1), следовательно, функция $f(x)$ определена на интервале (–1, 1).

Исследуем функцию на непрерывность. Для этого докажем, что ряд (4.3) равномерно сходится на любом интервале (– r, r), где r – произвольное действительное число, такое что $0 < r < 1$. Выберем число a, такое что $0< r < a < 1$. Для выбранного нами числа a найдется такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $r+\frac{1}{\sqrt{n}}\le a$.

Так как для всех $x\in(-r,r)$ справедливо

$$\left(|x|+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n}=\left(x^2+\frac{2|x|}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)^n\ge\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n,$$

то, при $n>N$ и $|x|\le r$ выполняется неравенство

$$\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n\le\left(|x|+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n}\le\left(r+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n}\le a^{2n}.$$

Тогда сходящийся числовой ряд $\sum_{n=2}^{\infty}a^{2n}$ (геометрическая прогрессия со знаменателем $a^2<1$) является мажорантным для ряда (4.3), следовательно, ряд (4.3) равномерно сходится на интервале (– r, r). Члены данного ряда являются непрерывными функциями на всей числовой прямой, тогда из свойств равномерно сходящихся числовых рядов следует, что сумма данного ряда, т.е. функция $f(x)$, непрерывна на интервале (–r, r). Так как r– произвольное действительное число, такое что $0 < r< 1$, то функция $f(x)$ непрерывна на интервале (–1, 1).

III. Задачи и упражнения для практических занятий

Найти область сходимости следующих функциональных рядов:

4.1. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\ldots;$ 4.2. $2^x+4^x+8^x+\ldots;$

4.3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\left(\frac{x}{2x-1}\right)^{n}$;

4.4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}2^{n-1}\sin\frac{x^2}{3^{n-1}}$;

4.5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^n x}{3^{\frac{n}{2}}}$;

4.6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^{n}$;

4.7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^x}$;

4.8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$;

4.9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$;

4.10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$;

4.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$;

4.12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{(x^2+1)(x^2+2)\ldots(x^2+n)}$.

Пользуясь признаком Вейерштрасса, исследовать на равномерную сходимость следующие ряды:

4.13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^{2m}}}{2^{2n}}$, $-1<x<1$;

4.14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$, $-2\le x<2$;

4.15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$; $-\infty<x<+\infty$;

4.16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{n^3+1}}$; $-\infty<x<+\infty$;

4.17. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $1\le x<\infty$;

4.18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0\le x<\infty$.

4.19. Убедиться, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin 2^n\pi x}{2^n}$, равномерно сходится на всей числовой прямой, но его нельзя почленно дифференцировать ни в каком промежутке.

4.20. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}e^{-(n-x)^2}$ можно дифференцировать на отрезке [0. 1].

4.21. Исходя из формулы для суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x}\quad(|x|<1),$$

найти сумму следующих рядов:

а) $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots$;

б) $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots+(n+1)(n+2)x^n+\ldots$.

4.22. Доказать равенство

$$x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

I. Контрольные вопросы и задания

1.Какой ряд называется степенным рядом?

2. Что называется радиусом сходимости степенного ряда? Как найти радиус сходимости степенного ряда?

3. Дайте определение интервала и области сходимости степенного ряда.

4. Перечислите свойства равномерно сходящихся степенных рядов.

II. Примеры решения задач

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^n n}$.

Решение. Для нахождения радиуса сходимости ряда воспользуемся формулой

$$R=\frac{1}{L},\ L=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Так как $a_n=\frac{2^n}{5^n n}$, $\quad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$, то

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5(n+1)}=\frac{2}{5}.$$

Тогда $R=\frac{1}{L}=\frac{5}{2}$. Интервал сходимости этого ряда задается формулой (x_0-R,x_0+R), т.к. $x_0=0$, то интервал сходимости данного ряда $(-5/2;\ 5/2)$. На концах этого интервала ряд может сходиться или расходиться. Исследуем его на концах интервала сходимости.

Пусть $x=-5/2$. Тогда ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(-\frac{5}{2})^n}{5^n n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Исследуем его на абсолютную сходимость. Если рассмотреть этот ряд по модулю, то получим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это расходящийся гармонический ряд.

Исследуем на условную сходимость. Применим признак Лейбница:

$$1)\ 1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>\ldots;\quad 2)\ \frac{1}{n}=0.$$

Оба условия признака Лейбница выполнены, значит, в этой точке ряд сходится условно.

Пусть x=5/2. Тогда ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(\frac{5}{2}\right)^n}{5^n n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это расходящийся ряд.

Следовательно, областью сходимости является полуинтервал $\left[-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n\,(x-2)^n$.

Решение. Для нахождения радиуса сходимости воспользуемся формулой

$$R=\frac{1}{L},\ L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

В нашем случае $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$, тогда

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})\ =1,$$

тогда $R=1$. Следовательно, ряд сходится на интервале $\left(x_0-1,\,x_0+1\right)$, где x_0 = 2, т.е. на интервале (1, 3).

Исследуем ряд на концах интервала сходимости.

При $x=3$, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, который расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\ =e\neq 0,$$

При $x=2$, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n})^n$, который так же расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда: $\lim_{n\to\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n})^n\neq 0$.

Следовательно, областью сходимости данного степенного ряда является промежуток (1, 3).

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot\frac{x^{2n}}{4^n}$.

Решение. Так как для данного ряда все коэффициенты $a_{2n+1} = 0$ (ряд не содержит нечетных степеней x), то формулами для нахождения радиуса сходимости воспользоваться нельзя.

Для нахождения интервала сходимости воспользуемся непосредственно признаком Даламбера. Найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2|x|^{2n+1}}{(n+2)^2 4^{n+1}}:\frac{n^2|x|^{2n}}{(n+1)^2 4^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2|x|^{2n+1}\cdot(n+1)^2 4^n}{(n+2)^2 4^{n+1}\cdot n^2|x|^{2n}}=\frac{x^2}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{(n+2)^2\cdot n^2}=\frac{x^2}{4}.$$

Значит, ряд сходится при $\frac{x^2}{4}<1$, т.е. на интервале (– 2, 2). При $x=\pm 2$, ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$. Для этого ряда не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$. Следовательно, ряд сходится на интервале (– 2, 2).

III. Задачи и упражнения для практических занятий

Найти область сходимости степенного ряда:

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n(n+1)}$;

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 3^n}{n^2+1}x^n$;

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(x-2)^n$;

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}(x+1)^n$;

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}(x+3)^n$;

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n}$;

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{n^2}(x+3)^n$;

5.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n^2}x^n$;

5.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}x^{2n}$;

5.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}}$;

5.11. $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-\sqrt{n}}x^{2n+1}$;

5.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1+2^n}$;

5.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n+2^n}$;

5.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot\ln(n+1)}$;

5.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;

5.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2\cdot 2^n}$.

6. РЯД ТЕЙЛОРА

I. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте понятие разложения функции в степенной ряд.
2. Перечислите условия разложения функции в степенной ряд.
3. Какой ряд называется рядом Тейлора (Маклорена)?
4. Как разложить функцию в ряд Тейлора?
5. Где применяется разложение функции в ряд?

II. Примеры решения задач

Разложение функции в ряд

При разложении в степенной ряд многих элементарных функций можно пользоваться известными разложениями в ряд по степеням x (ряд Маклорена) функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(x+1)$, $(1+x)^{\alpha}$. Эти разложения называют основными.

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ $(-\infty < x < \infty)$.

2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{k+1}\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots$
$(-\infty < x < \infty)$.

3. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$.

4. $\ln(x+1) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \ldots$.

Ряд сходится к данной функции на интервале $(-1, 1]$.

5. $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$

Ряд сходится на интервале $(-1, 1)$.

Пример 1. Разложить функцию $y = \sin\dfrac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$.

Решение (1-*й способ*). Разложим функцию в ряд исходя из определения. Для этого найдем производные:

$$f'(x) = \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4^2}\sin\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi^2}{4^2}\sin\left(\frac{\pi x}{4} + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x)=-\frac{\pi^3}{4^3}\cos\frac{\pi x}{4}=\frac{\pi^3}{4^3}\sin\left(\frac{\pi x}{4}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Методом математической индукции легко доказать, что

$$f^{(n)}(x)=\frac{\pi^n}{4^n}\sin\left(\frac{\pi x}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Найдем значения производных при $x = 2$:

$$f(2)=\sin\frac{2\pi}{4}=1,$$

$$f'(2)=\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$f''(2)=\frac{\pi^2}{4^2}\sin\left(\frac{2\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{4^2},$$

$$f'''(2)=\frac{\pi^3}{4^3}\sin\left(\frac{2\pi}{4}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$f^{IV}(2)=\frac{\pi^4}{4^4}\sin\left(\frac{2\pi}{4}+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^4}{4^4},$$

....

$$f^{(2k)}(x)=\frac{\pi^{2k}}{4^{2k}}\sin\left(\frac{2\pi}{4}+2k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\frac{\pi^{2k}}{4^{2k}},$$

$$f^{(2k+1)}(x)=\frac{\pi^{2k+1}}{4^{2k+1}}\sin\left(\frac{2\pi}{4}+(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Подставляя вычисленные значения производных в формулу ряда Тейлора, получаем:

$$\sin\frac{\pi x}{4}\approx 1-\frac{\pi^2}{4^2 2!}(x-2)^2+\frac{\pi^4}{4^4 4!}(x-2)^4-\ldots+$$

$$+(-1)^k\frac{\pi^{2k}}{4^{2k}(2k)!}(x-2)^{2k}+\ldots$$

Поскольку

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\frac{\pi^n}{4^n}\sin\left(\frac{\pi x}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right|\le\frac{\pi^n}{4^n}<1,$$

то производные функции $f(x)$ ограничены в совокупности на всей числовой оси. Значит, ряд Тейлора сходится к $f(x)$ на всей оси, т.е. разложение в ряд

$$\sin\frac{\pi x}{4}=1-\frac{\pi^2}{4^2 2!}(x-2)^2+\frac{\pi^4}{4^4 4!}(x-2)^4-\ldots+(-1)^k\frac{\pi^{2k}}{4^{2k}(2k)!}(x-2)^{2k}+\ldots$$

справедливо при всех значениях x.

Решение (2-*й способ*). Для получения разложения в ряд данной функции воспользуемся известными основными разложениями. Произведем над функцией тождественные преобразования, такие, чтобы под знаком функции получить выражение ($x-2$):

$$\sin\frac{\pi x}{4}=\sin\frac{\pi}{4}(x-2+2)=\sin\left(\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{4}(x-2).$$

Теперь воспользуемся основным разложением 3, в котором на место x поставим $\frac{\pi}{4}(x-2)$.Получим:

$$\cos\frac{\pi}{4}(x-2)=1-\frac{\pi^2}{4^2 2!}(x-2)^2+\frac{\pi^4}{4^4 4!}(x-2)^4-\ldots+$$
$$+(-1)^k\frac{\pi^{2k}}{4^{2k}(2k)!}(x-2)^{2k}+\ldots.$$

Полученный ряд сходится к заданной функции при $-\infty<\frac{\pi}{4}(x-2)<\infty$ т.е. при $-\infty<x<\infty$.

Таким образом,

$$\sin\frac{\pi x}{4}=1-\frac{\pi^2}{4^2 2!}(x-2)^2+\frac{\pi^4}{4^4 4!}(x-2)^4-\ldots+(-1)^k\frac{\pi^{2k}}{4^{2k}(2k)!}(x-2)^{2k}+\ldots.$$

при $-\infty<x<\infty$.

Пример 2. Разложить функцию $y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ в ряд Маклорена.

Решение. Для разложения этой функции в ряд воспользуемся разложением функции e^x. Для того, чтобы получить разложение функции e^{-x} в разложение e^x вместо x подставим $-x$. Получим

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\ldots.$$

Тогда

$$\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}\left(\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\ldots\right)\right)=$$
$$=x+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots.$$

Пример 3. Разложить функцию $y=\arcsin x$ в ряд Маклорена.

Решение. Заметим, что $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Разложим функцию $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ в ряд, используя основное разложение 5.

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n},$$

(здесь $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$). Радиус сходимости получившегося ряда равен единице. Проинтегрируем ряд от 0 до x, где $|x|<1$. Получим

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n(2n+1)n!}x^{2n+1}.$$

Приближенные вычисления с помощью степенных рядов

Пример 4. Вычислить cos 10° с точностью до 0,0001.

Решение. Так как $10°=\dfrac{\pi}{18}\approx 0{,}17453$, то используя разложение функции $\cos x$ в ряд получим

$$\cos 10°=\cos\frac{\pi}{18}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4-\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^6+\ldots$$

Полученный ряд является знакочередующимся. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\pi}{18}\right)^n\right\}$ его элементов является убывающей и стремится к нулю при $n\to\infty$, следовательно, ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Поэтому остаток ряда не превосходит первого отброшенного члена. Так как

$$\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4=\frac{(0{,}17453)^4}{24}<\frac{(0{,}2)^4}{24}=\frac{0{,}0016}{24}\approx 0{,}00006<0{,}0001,$$

то для достижения требуемой точности, достаточно взять два члена ряда, т.е.

$$\cos 10°\approx 1-\frac{(0{,}17453)^2}{2}\approx 1-\frac{0{,}03046}{2}=1-0{,}01523\approx 0{,}98477\approx 0{,}9848.$$

Пример 5. Вычислить ln 1,1 с точностью до 0,0001.

Решение. Воспользуемся разложением функции $\ln(x+1)$ в ряд. Тогда

$$\ln 1{,}1=\ln(1+0{,}1)=$$

$$=0{,}1-\frac{0{,}1^2}{2}+\frac{0{,}1^3}{3}-\frac{0{,}1^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{0{,}1^n}{n}+\ldots.$$

Получился знакочередующийся ряд, элементы которого образуют убывающую бесконечно малую последовательность. Следовательно, это ряд Лейбница, и погрешность замены суммы ряда его частичной суммой не превосходит первого из отброшенных членов. Так как

$$\frac{0{,}1^4}{4}=\frac{0{,}0001}{4}<0{,}0001 \quad \text{и} \quad \frac{0{,}1^3}{3}=\frac{0{,}001}{3}\approx 0{,}00033>0{,}0001,$$

то для достижения требуемой точности достаточно взять три первых члена ряда. Тогда имеем:

$$\ln 1{,}1 = \ln(1+0{,}1) \approx 0{,}1-\frac{0{,}1^2}{2}+\frac{0{,}1^3}{3}\approx 0{,}0953.$$

Замечание. С помощью формулы 4 можно найти значение натурального логарифма для чисел, лежащих в промежутке между 0 и 2. Получим формулу для нахождения логарифмов от произвольного положительного числа.

Кроме ряда 4 будем рассматривать ряд

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots.$$

Найдем разность первого и второго ряда

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\frac{(1+x)}{(1-x)}=$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right).$$

Данный ряд абсолютно сходится при $|x|<1$, так как его радиус сходимости равен $R=1$. Это легко проверить.

Положим, что $\frac{1+x}{1-x}=n$, откуда $x=\frac{n-1}{n+1}$, тогда при любом $n>0$, выполняется неравенство $|x|<1$. Следовательно, используя ряд 4 можно находить приближенное значение логарифмов любых положительных действительных чисел. Однако обычно полученная формула используется для нахождения логарифмов чисел больших 1.

Пример 6. Вычислить ln 3 с точностью до 0,001.

Решение. Используем разложение 4. Положим $\frac{1+x}{1-x}=3$, тогда $x=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$. По формуле 4

$$\ln 3=\ln\frac{(1+1/2)}{(1-1/2)}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\ldots\right).$$

Для нахождения суммы ряда с указанной точностью, надо найти такое n, при котором модуль n-го остатка ряда меньше 0,001, т.е. при котором выполняется неравенство

$$r_n = 2\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}} + \ldots\right) < 0{,}001.$$

Поскольку числа $2n + 3$, $2n + 5$, … больше, чем $2n + 1$, то заменив их на $2n + 1$, мы увеличим каждую дробь в данном неравенстве, т.е.

$$r_n < \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n+3}} + \ldots\right) = \frac{2}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3\cdot(2n+1)\cdot 2^{2n-2}}.$$

Путем подбора значений n находим:

$$n = 3, \quad \frac{1}{3\cdot(2\cdot 3+1)\cdot 2^{2\cdot 3-2}} = \frac{1}{336} > 0{,}001,$$

$$n = 4, \quad \frac{1}{3\cdot(2\cdot 4+1)\cdot 2^{2\cdot 4-2}} = \frac{1}{1728} < 0{,}001.$$

Значит, для нахождения $\ln 3$ с точностью до 0,001 надо взять четыре слагаемых ряда.Тогда

$$\ln 3 \approx 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{7\cdot 2^7}\right) \approx 0{,}0981.$$

Нахождение интегралов

Так как степенные ряды сходятся равномерно на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости, то с помощью разложения подынтегральных функций в степенные ряды можно находить приближенное значение определенных интегралов.

Пример 7. Вычислить $\int_0^1 \sin x^2 dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Используем разложение функции $\sin x$, заменив в нем x на x^2. Получим

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots\ .$$

Он сходится на всей числовой прямой, поэтому его можно почленно интегрировать. Следовательно:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \frac{x^{11}}{5!\cdot 11} - \ldots \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 7} + \frac{1}{5!\cdot 11} - \ldots \,.$$

Этот ряд является рядом Лейбница и уже третий член данного ряда меньше 0,001. Значит, для нахождения приближенного значения определенного интеграла, достаточно взять два слагаемых полученного ряда

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 7} \approx 0{,}3333 - 0{,}0381 \approx 0{,}2952 = 0{,}295.$$

III. Задачи и упражнения для практических занятий

Записать частичную сумму $S_n(x)$ ряда Тейлора функции $f(x)$ при $x = x_0$:

6.1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x_0 = -1$, $n = 3$;

6.2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$, $x_0 = 4$, $n = 3$;

6.3. $f(x) = \arcsin x^2$, $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $n = 2$;

6.4. $f(x) = \ln \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $n = 4$;

6.5. $f(x) = 2^{x^3+x}$, $x_0 = 0$, $n = 4$;

6.6. $f(x) = (1 + tgx)^2$, $x_0 = 0$, $n = 3$;

6.7. $f(x) = \sqrt[3]{2 - e^x}$, $x_0 = 0$, $n = 4$;

6.8. $f(x) = e^{tgx}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $n = 3$.

Используя основные разложения, получить ряд Маклорена для функции $f(x)$; указать радиус сходимости.

6.9. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$;

6.10. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$;

6.11. $f(x)=\dfrac{1}{3x-4}$;

6.12. $f(x)=\ln(x+5)$;

6.13. $f(x)=(x+1)e^{2x}$;

6.14. $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}$;

6.15. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

6.16. $f(x)=ch2x$.

Записать два первых, отличных от нуля, члена ряда Маклорена для функции $f(x)$: *а*) пользуясь основным разложением; *б*) исходя из определения.Указать интервал сходимости полученного ряда к $f(x)$.

6.16. $f(x)=\dfrac{e^{3x}-1}{e^x}$;

`6.17. $f(x)=x\ln(1-x^2)$;

6.18. $f(x)=\cos 2x\cdot\sin\dfrac{x}{3}$;

6.19. $f(x)=\sin 2x\cdot\sqrt[5]{1+x}$.

6.20. $f(x)=\dfrac{\cos x}{(x+1)^2}$;

6.21. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$;

6.22. $f(x)=e^{2x}\cdot\cos x^2$;

6.23. $f(x)=\dfrac{arctgx}{x\ \ +1}$.

Используя табличные разложения, разложить функцию по указанным степеням $(x-x_0)$.

6.24. $f(x)=\ln(1-x)$ по степеням $x+1$;

6.25. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+3}$ по степеням $x-1$;

6.26. $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ по степеням x;

6.27. $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$ по степеням $x-2$;

6.28. $f(x)=\ln(4+x)$ по степеням $x-1$;

6.29. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x}$ по степеням $x+1$;

6.30. $f(x)=x\,e^{-3x}$ по степеням $x+3$;

6.31. $f(x)=\dfrac{3}{x^2-x-2}$ по степеням $x+2$;

6.32. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ по степеням $x+8$.

Вычислить приближенно, взяв три члена разложения в ряд, и оценить погрешность:

6.33. $\sqrt[3]{69}$;   6.34. $\sqrt[3]{1{,}04}$;   6.35. $\sqrt[3]{29}$;

6.36. $\sqrt[4]{85}$;   6.37. $\sqrt{2000}$.

Вычислить приближенно с точностью до 0,001:

6.38. $\sin 6^0$;   6.39. $\cos 18^0$;   6.40. $e^{0{,}03}$.

6.40. $\int\limits_0^{0,6} \frac{\sin 3x}{x}\,dx$;   6.41. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin 0{,}2x}{x}\,dx$;   6.42. $\int\limits_0^{0,5} \frac{arctgx}{x}\,dx$;

6.43. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin 0.3x}{x}\,dx$.

7. РЯДЫ ФУРЬЕ

I. Контрольные вопросы и задания

1. Какая функция называется кусочно-непрерывной?
2. Какой функциональный ряд называется тригонометрическим рядом Фурье? Запишите формулы для нахождения его коэффициентов.
3. Сформулируйте условие разложения функции $f\,(x)$ в ряд Фурье. В каком случае ряд Фурье будет равномерно сходиться к функции $f\,(x)$ на отрезке $[a, b]$?
4. Чему равна сумма ряда Фурье для кусочно-непрерывных функций?
5. Как разложить в ряд Фурье функцию, определенную на отрезке $[0, l]$?
6. Что значит разложить функцию, определенную на отрезке $[0, l]$, по синусам кратных дуг, по косинусам кратных дуг?

II. Примеры решения задач

Пример 1. Найти разложение в ряд Фурье периодической функции с периодом 4, если $f\,(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} -2 < x < 0, \\ 2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 2. \end{cases}$

Решение. Продолжим периодически функцию $f\,(x)$ на всю числовую ось. График этой функции изображен на рисунке 1.

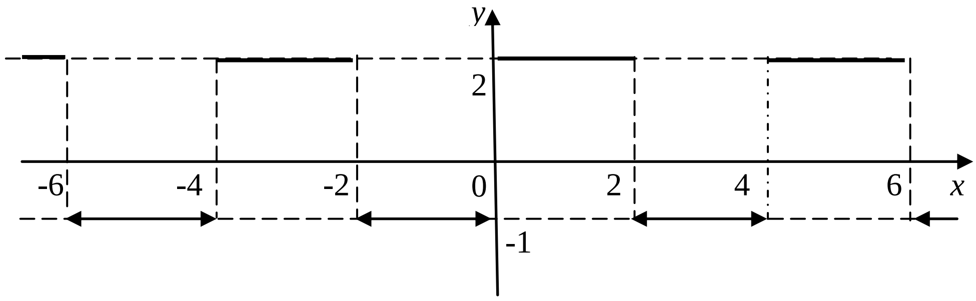

Рис. 1.

Рядом Фурье для периодической кусочно-непрерывной функции $f\,(x)$ называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) + b_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n, $(n = \overline{0, 1, 2, \ldots})$ находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\,(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\,(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

Найдем коэффициенты ряда Фурье для данной функции:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{2} 2\,dx\right) = \frac{1}{2}(-2+4) = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx + \int_{0}^{2} 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_{-2}^{0} + \frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_{0}^{2}\right) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx + \int_{0}^{2} 2\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_{-2}^{0} - \frac{4}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_{0}^{2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{\pi n}(\cos\pi n - 1) = \frac{3}{\pi n}(1-(-1)^n).$$

Подставив полученные коэффициенты в ряд Фурье, получим

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}x\right).$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $y = 2 - x$, заданную на отрезке [0; 2], продолжив ее нечетным образом.

Решение.

Продолжим данную функцию на отрезок [-2; 0] нечетным образом, т.е получим функцию

$$f(x) = \begin{cases} -2-x & \text{при } -2 \le x < 0, \\ 2-x & \text{при } 0 \le x < 2. \end{cases}$$

Затем данную функцию продолжим периодически на всю числовую прямую (рисунок 2)

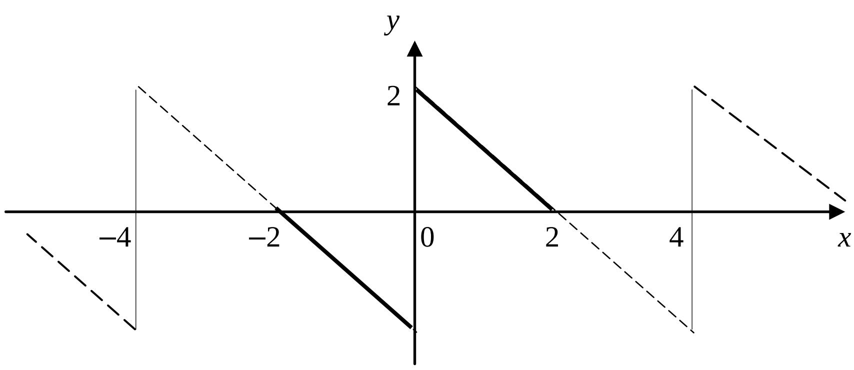

Рис. 2.

Так как функция нечетная, то $a_n = 0$ при $n = \overline{0, 1, 2, \ldots}$.

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

$$b_n = \int_0^2 (2-x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \begin{vmatrix} u=2-x, \quad du=-dx \\ dv=\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx, \; v=-\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2(2-x)}{\pi n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Bigg|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx =$$

$$= \frac{4}{\pi n} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{\pi n}.$$

Подставляя полученные коэффициенты в ряд Фурье, получим

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right).$$

На промежутке (0; 2] этот ряд представляет собой заданную функцию.

Замечание. Функцию $y = 2 - x$, заданную на отрезке[0; 2], можно разложить в ряд Фурье, продолжив ее четным образом. Тогда функция будет задана системой уравнений

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{при } -2 \le x < 0, \\ 2-x & \text{при } 0 \le x < 2. \end{cases}$$

Коэффициенты ряда Фурье будут находиться по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \qquad b_n = 0, \quad n = \overline{0, 1, 2, \ldots}.$$

$$a_0 = \int_0^2 (2-x)\,dx,$$

$$a_n = \int_0^2 (2-x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx, \qquad b_n = 0, \quad n = \overline{0, 1, 2, \ldots}.$$

III. Задачи и упражнения для практических занятий

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $\omega = 2\pi$, если на отрезке $[-\pi;\ \pi]$функция $f(x)$ задана следующим образом:

7.1. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi; \end{cases}$ 7.2. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi; \end{cases}$

7.3. $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi; \end{cases}$ 7.4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x-1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

7.5. $f(x) = |x|,\ \ -\pi \le x \le \pi;$ 7.6. $f(x) = x^3,\ \ -\pi \le x \le \pi.$

Найти и изобразить суммы полученных рядов.

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $y = f(x)$ с периодом$\omega = 2l$, заданную на отрезке $[-l;\ l]$ следующим образом:

7.7. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \le x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ x, & 0 < x \le 2; \end{cases}$; 7.8. $f(x) = 1 - |x|,\ \ -1 < x < 1.$

Найти и изобразить суммы полученных рядов.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0;\ \pi)$, продолжив (доопределив) ее четным и нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения.

7.9. $f(x) = x;$ 7.10. $f(x) = (x-1)^2 e^{-3x};$

7.11. $f(x) = e^{-3x};$ 7.12. $f(x) = \operatorname{sh} x.$

7.13. Разложить в ряд Фурье функции, графики которых изображены на рисунках 3, 4 и 5.

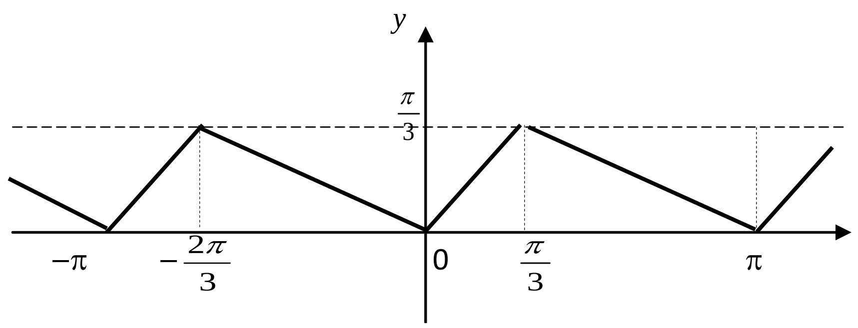

Рис. 3

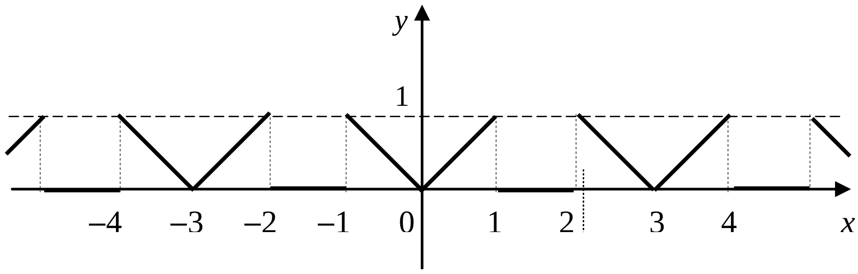

Рис. 4.

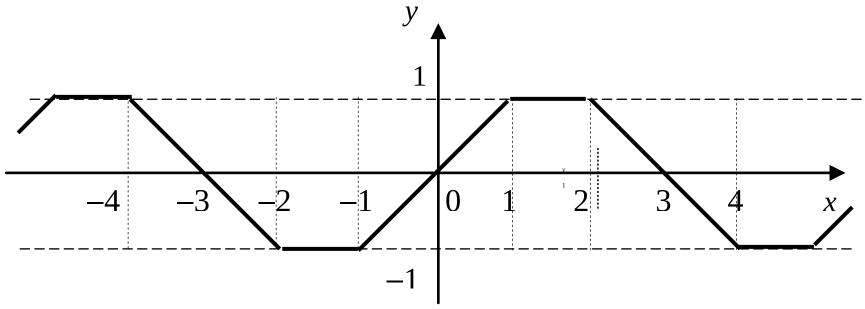

Рис. 12

Воспользовавшись разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале, найти сумму данного числового ряда:

7.14. $f(x) = |x|$, $(-\pi;\ \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$;

7.15 $f(x) = |\sin x|$, $(-\pi;\ \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин, В.А. Основы математического анализа. Ч. 2 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 2009. – 447 с.

2. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. Т. 2 / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 2005. – 463 с.

3. Тер-Крикоров, А.М. Курс математического анализа / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. – М.: Бином, 2013. – 463 с.

4. Математический анализ. Ряды и несобственные интегралы: учеб. пособие для студентов учреждений высш. образования по физическим, математическим и экономическим спец. / О.А. Кастрица [и др.]. – Минск: Вышэйшая школа, 2015. – 389 с.

5. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: Ч. 4: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы / А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2017. – 254 с.

6. Иванова, Ж.В. Ряды. Криволинейные интегралы: курс лекций / Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2010. – 65 с.

Учебное издание

ИВАНОВА Жанна Викторовна

СУРИН Татьяна Леонидовна

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *А.В. Табанюхова*

Подписано в печать 05.02.2024. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,50. Уч.-изд. л. 0,82. Тираж 9 экз. Заказ 11.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.