Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

Об одном свойстве порожденных классов Фиттинга

Н.Н.Воробьев

Все рассматриваемые группы конечны. Кроме общепринятой терминологии (см. [1]) используются определения и обозначения работы [2]. Символом $\mathrm{Cosoc}(G)$ обозначается коцоколь группы G, т.е. пересечение максимальных нормальных подгрупп группы G, а символом $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех таких нормальных подгрупп N группы G, что $G/N \in \mathfrak{F}$. В частности, вместо $G^{\mathfrak{N}_p}$ пишут $O^p(G)$. Через $\mathfrak{G}$ обозначается класс всех групп.

Функции вида $f : \mathbb{P} \longrightarrow \{$классы Фиттинга$\}$ называются функциями Хартли или H-функциями [2]. Для произвольной H-функции f определяют [2] класс

$$LR(f) = \{G \mid F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)\}.$$

Здесь $F^p(G) = O^p(O^{p'}(G))$. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f, то говорят, что $\mathfrak{F}$ — локальный класс Фиттинга с H- функцией f.

Напомним восходящее к работе [3] понятие кратно локального класса Фиттинга. Всякий класс Фиттинга считается 0-кратно локальным , а при $n > 0$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно локальным [4], если $\mathfrak{F} = LR(f)$, где все непустые значения H-функции f являются $(n-1)$-кратно локальными классами Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех n-кратно локальных классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначается символом $l^n \operatorname{fit} \mathfrak{X}$ и называется n-кратно локальным классом Фиттинга, порожденным $\mathfrak{X}$ [2]. Настоящая работа посвящена изучению свойств порожденных n-кратно локальных классов Фиттинга. Следующая теорема дуализирует результат, полученный А.Н. Скибой в теории формаций (см. лемму 9.14 в монографии [5]).

Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ — разрешимый нормально наследственный класс и $A \in \in l^n \operatorname{fit} \mathfrak{M}$, где $n \geq 0$. Тогда $O^p(A) \in l^n \operatorname{fit}\{O^p(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.*

Для доказательства теоремы нам необходимы следующие леммы.

Лемма 1. *Если M — максимальная нормальная подгруппа группы G и N — любая не содержащаяся в M нормальная подгруппа группы G, то подгруппа $N \cap M$ является максимальной нормальной в N.*

Лемма 2. *Пусть $N_1, \ldots, N_t$ — такие максимальные нормальные подгруппы группы G $(t > 2)$, что для любых трех попарно различных индексов i, j, k имеет место $N_i \cap N_j \not\subseteq N_k$. Тогда*

$$\prod_{\{i_1,\ldots,i_r\}} (N_{i_1} \cap \ldots \cap N_{i_r}) = G,$$

где $\{i_1, \ldots, i_r\}$ пробегает всевозможные выборки по r элементов из $\{1, \ldots, t\}$ и $1 < r < < t$.

Доказательство. Проведем индукцию по r. Пусть $r = 2$. Заметим, что если найдутся такие попарно различные индексы p, q, $s \in \{1, \ldots, t\}$, что $N_p \cap N_q = N_p \cap N_s$, то получаем $N_p \cap N_q \cap N_s = N_p \cap N_s$, т.е. $N_p \cap N_s \subseteq N_q$. Последнее невозможно по условию. Значит, $N_p \cap N_q \neq N_p \cap N_s$ для любых трех попарно различных индексов p, q, $s \in \{1, \ldots, t\}$. Поэтому ввиду леммы 1

$$\prod_{(i,j)\subseteq\{1,\ldots,t\}} (N_i \cap N_j) = N_1 N_2 \ldots N_{t-2}(N_{t-1} \cap N_t) = G.$$

Допустим теперь, что $r > 2$ и при $r-1$ лемма верна. Пусть $\{j_1, \ldots, j_{r-1}\} \subseteq \{1, \ldots$ $\ldots, t\}$. Допустим, что найдутся два таких различных индекса a, $b \in \{1, \ldots, t\} \setminus \{j_1, \ldots$ $\ldots, j_{r-1}\}$, что

$$N_a \cap N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}} = N_b \cap N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}}.$$

Тогда $N_a \cap N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}} \subseteq N_b$ и $N_b \cap N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}} \subseteq N_a$. Поэтому

$$(N_a \cap N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}})(N_b \cap N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}}) = N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}}.$$

Если же

$$N_a \cap N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}} \neq N_b \cap N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}},$$

то по лемме 1 снова получаем

$$(N_a \cap N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}})(N_b \cap N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}}) = N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}}.$$

Таким образом, для любой выборки $\{j_1, \ldots, j_{r-1}\}$ множества индексов из $\{1, \ldots, t\}$ в

$$\prod_{\{i_1,\ldots,i_r\}\subseteq\{1,\ldots,t\}} (N_{i_1} \cap \ldots \cap N_{i_r})$$

всегда найдутся два таких сомножителя, произведение которых равно $N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}}$. Значит,

$$\prod_{(j_1,\ldots,j_{r-1})\subseteq\{1,\ldots,t\}} (N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}}) \subseteq \prod_{\{i_1,\ldots,i_r\}\subseteq\{1,\ldots,t\}} (N_{i_1} \cap \ldots \cap N_{i_r}).$$

Но по индукции

$$\prod_{\{j_1,\ldots,j_{r-1}\}\subseteq\{1,\ldots,t\}} (N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}}) = G.$$

Значит,

$$\prod_{\{j_1,\ldots,j_{r-1}\}\subseteq\{1,\ldots,t\}} (N_{j_1} \cap \ldots \cap N_{j_{r-1}}) = \prod_{\{i_1,\ldots,i_r\}\subseteq\{1,\ldots,t\}} (N_{i_1} \cap \ldots \cap N_{i_r}) = G.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $Cosoc(G) = N_1 \cap \ldots \cap N_t$, где $t > 1$, $Cosoc(G) \neq N_1 \cap \ldots \cap$ $\cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t$ для всех $i \in \{1, \ldots, t\}$ и G – группа с $O^p(G) = G$. Пусть M_i – наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в $N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t$, но не содержащаяся в N_i. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$ группа M_i комонолитична с комонолитом $M_i \cap N_i$, причем $O^p(M_i) = M_i$;

2) $\prod_{i=1}^{t} M_i = G$.

Доказательство. Предположим, что группа M_i не комонолитична. Тогда M_i обладает по крайней мере двумя различными максимальными нормальными подгруппами T и $M_i \cap N_i$.

Если $T \subseteq N_i$, то $T \subseteq M_i \cap N_i$, что противоречит максимальности T. Следовательно, $T \not\subseteq N_i$ и $T \subseteq N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t$. Но ввиду того, что M_i — наименьшая из нормальных подгрупп группы G с этими двумя свойствами, $M_i \subseteq T$. Поэтому $M_i = T$. Противоречие. Следовательно, M_i — комонолитческая группа, и ее комонолит совпадает с $M_i \cap N_i$.

Покажем, что $O^p(M_i) = M_i$. Предположим, что $O^p(M_i) \neq M_i$. Тогда $O^p(M_i) \subseteq M_i \cap N_i = \mathrm{Cosoc}(M_i) \subseteq N_i$. Поскольку $O^p(M_i)O^p(N_i)/O^p(N_i) \subseteq N_i/O^p(N_i) \in \mathfrak{N}_p$, то

$$O^p(M_i)/O^p(M_i) \cap O^p(N_i) \simeq O^p(M_i)O^p(N_i)/O^p(N_i) \in \mathfrak{N}_p.$$

Отсюда

$$O^p(M_i) = O^p(O^p(M_i)) \subseteq O^p(M_i) \cap O^p(N_i) \subseteq O^p(N_i).$$

Итак, $O^p(M_i) \subseteq O^p(N_i)$. Ввиду того, что $M_i \not\subseteq N_i$, имеем $G = M_iN_i$. Вместе с тем по условию $O^p(G) = G$. Значит, $G = O^p(M_iN_i)$. По лемме 2.12 главы IX книги [1] $G = O^p(M_i)O^p(N_i)$, а так как $O^p(M_i) \subseteq O^p(N_i)$, то $O^p(M_i)O^p(N_i) = O^p(N_i)$. Отсюда $GN_i = G = O^p(N_i)N_i = N_i$. Противоречие. Значит, $O^p(M_i) = M_i$.

Докажем, что $\prod_{i=1}^{t} M_i = G$. Предположим, что $\prod_{i=1}^{t} M_i \subset G$ и пусть R — максимальная нормальная подгруппа группы G, содержащая $\prod_{i=1}^{t} M_i$. Если $R = N_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, t\}$, то $N_i \supseteq \prod_{i=1}^{t} M_i \supseteq M_i$. Противоречие. Значит, $R \neq N_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, t\}$. Поэтому R совпадает с одной из максимальных нормальных подгрупп группы G, не входящих в $\mathrm{Cosoc}(G)$. Значит,

$$R \supset N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t.$$

Следовательно,

$$R \supset \prod_{i=1}^{t} (N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t).$$

Вместе с тем по лемме 2

$$\prod_{i=1}^{t} (N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t) = G.$$

Полученное противоречие показывает, что $\prod_{i=1}^{t} M_i = G$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть f — внутренняя H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(A/\mathrm{Cosoc}(A))$. Тогда если для каждого $p \in \pi$ имеет место $F^p(A) \in f(p)$, то $A \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $\pi = \{p_1, \ldots, p_t\}$, $A^{\mathfrak{G}_{p_i'}} = D^{p_i}$ и $D = D^{p_1} \ldots D^{p_t}$. Тогда поскольку $D^{p_i} \subseteq D$, то

$$A/D^{p_i}/D/D^{p_i} \simeq A/D \in \mathfrak{G}_{p_i'}$$

для всех $p_i \in \pi$. Следовательно, $A/D \in \bigcap_{p_i \in \pi} \mathfrak{G}_{p_i'} = \mathfrak{G}_{\pi'}$.

Покажем, что $A = D$. Допустим $A \neq D$. Тогда $D \subseteq M$ для некоторой максимальной нормальной подгруппы M группы A. Так как $\mathrm{Cosoc}(A) \subseteq M$, то $\pi(A/M) \subseteq \pi(A/\mathrm{Cosoc}(A))$. Поэтому $A/M \in \mathfrak{G}_\pi$. Следовательно,

$$A/D/M/D \simeq A/M \in \mathfrak{G}_\pi \cap \mathfrak{G}_{\pi'} = (1).$$

Противоречие. Значит, $A = D$.

Поскольку по условию $F^{p_i}(A) \in f(p_i)$, то $D^{p_i} \in f(p_i)\mathfrak{N}_{p_i} \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $A = D^{p_1} \ldots$ $\ldots D^{p_t} \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Если $A \in \mathfrak{M}$, то

$$A = O^p(A) \in \{O^p(G) \mid G \in \mathfrak{M}\} \subseteq l^n \operatorname{fit}\{O^p(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}.$$

Пусть $A \notin \mathfrak{M}$. Предположим, что A — комонолитическая группа с комонолитом R. Поскольку группа A разрешима, то A/R — q-группа для некоторого $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$.

Пусть $\mathfrak{F} = l^n \operatorname{fit} \mathfrak{M}$ и f — минимальная l^{n-1}- значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H} = l^n \operatorname{fit}\{O^p(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$ и h — минимальная l^{n-1}-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{H}$. Тогда ввиду леммы 21 [2]

$$f(q) = l^{n-1} \operatorname{fit}(F^q(H) \mid H \in \mathfrak{M})$$

и

$$h(q) = l^{n-1} \operatorname{fit}(F^q(O^p(H)) \mid H \in \mathfrak{M}).$$

По лемме 1 [2] $F^q(H) = F^q(O^p(H))$. Следовательно, $f(q) = h(q)$. Поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то $F^q(A) \in f(q) = h(q)$. Согласно лемме 4 $A \in \mathfrak{H}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\operatorname{Cosoc}(A) = N_1 \cap \ldots \cap N_t$ $(t > 1)$ и $\operatorname{Cosoc}(A) \neq N_1 \cap$ $\cap \ldots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t$ для всех $i \in \{1, \ldots, t\}$. Пусть M_i — наименьшая нормальная в A подгруппа, содержащаяся в $N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t$, но не содержащаяся в N_i. Тогда по лемме 3 $A = M_1 \ldots M_t$, где M_i — комонолитическая группа с комонолитом $M_i \cap N_i$. Поскольку $A \in l^n \operatorname{fit} \mathfrak{M}$, то $M_i \in l^n \operatorname{fit} \mathfrak{M}$. Следовательно, по доказанному выше $M_i \in \mathfrak{H}$. Отсюда $A \in \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Abstract. In this paper the properties of generated n-multiply local Fitting classes are studied.

Литература

1. K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups*, Berlin–New York, Walter de Gruyter, 1992.

2. L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, *Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups*, Siberian Advances in Math. **10**, N2 (2000), 112–141.

3. А. Н. Скиба, *Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины*, Вопросы алгебры, № 3 (1987), 21–31.

4. Н. Т. Воробьев, *О предположении Хоукса для радикальных классов*, Сибирск. матем. ж. **37**, N6 (1996), 1296-1302.

5. Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Москва, Наука, 1989.

Витебский государственный
университет им. П.М.Машерова

Поступило 12.05.04