Доклады Национальной академии наук Беларуси

2000 май—июнь Том 44 № 3

УДК 512.542

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

ОБ ИНДУКТИВНЫХ РЕШЕТКАХ ФОРМАЦИЙ И КЛАССОВ ФИТТИНГА

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1]. Функции вида $f : \mathbf{P} \to$ {формации} называются спутниками. Для формации $\mathfrak{F}$ пишут $\mathfrak{F} = LF(f)$ и говорят, что $\mathfrak{F}$ — локальная формация со спутником f, если группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G)$. Функции вида $f : \mathbf{P} \to$ {классы Фиттинга} называются функциями Хартли или, более коротко, H-функциями. Для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ пишут $\mathfrak{F} = LR(f)$ и говорят, что $\mathfrak{F}$ — локальный класс Фиттинга с H-функцией f, если группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G)$ (здесь $F^p(G) = O^p(O^{p'}(G))$).

Совокупность классов групп θ называется полной решеткой классов [2], если пересечение любой совокупности классов из q снова принадлежит θ, и во множестве θ имеется такой класс $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любого другого класса $\mathfrak{H} \in \theta$. Полная решетка формаций (классов Фиттинга) θ называется частичной алгеброй формаций (классов Фиттинга) [3], если для любого простого числа p для любой формации (любого класса Фиттинга) $\mathfrak{F} \in \theta$ имеет место $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} \in \theta$ (соответственно имеет место $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \in \theta$). Как показано в [2] (см. также [3]), такие полные решетки и частичные алгебры играют при изучении классов групп ту же роль, что и сами классы (формации, классы Фиттинга и др.) при изучении групп.

Пусть для произвольной полной решетки формаций (классов Фиттинга) θ символом θ^l обозначается совокупность всех таких локальных формаций (локальных классов Фиттинга), которые определяются θ-значными функциями, т. е. такими функциями, все непустые значения которых принадлежат θ. Нетрудно убедиться (см. подробнее [2, гл. 4]), что θ^l — полная решетка, и она наследует многие свойства решетки θ. Широкую серию примеров частичных алгебр поставляют введенные в работе [4] кратно локальные классы групп. Напомним, что, согласно [4], всякая формация считается 0-кратно локальной, а при $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно локальной, если $\mathfrak{F} = LF(f)$, где все непустые значения спутника f $(n-1)$-кратно локальны. Формация называется тотально локальной, если она n-кратно локальна для всех натуральных n. Аналогично определяются n-кратно локальные и тотально локальные классы Фиттинга. Нетрудно показать, что класс всех тотально локальных формаций l_∞, класс тотально локальных классов Фиттинга l^∞, а при фиксированном $n \geq 0$ класс всех n-кратно локальных формаций l_n и класс всех n-кратно локальных классов Фиттинга l^n являются частичными алгебрами (см. подробнее [3]).

Пусть θ — полная решетка формаций. Тогда верхняя грань произвольной совокупности $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ элементов из θ^l обозначается [2] через $\vee_{\theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$. Решетка θ называется индуктивной [2], если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i = LF(f_i) \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \theta^l$ и для всякого такого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ θ-значных спутников f_i, что f_i —некоторый внутренний спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место $\vee_{\theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF(\vee_\theta(f_i \mid i \in I))$, где символ $\vee_\theta(f_i \mid i \in I)$ обозначает такой спутник f, что $f(p)$ является верхней гранью для $\{f_i(p) \mid i \in I\}$ в θ, если $\bigcup_{i \in I} f_i(p) \neq \varnothing$, и $f(p) = \varnothing$ в противном случае. Аналогично определяются индуктивные решетки классов Фиттинга. В неявном виде свойство индуктивности тех или иных решеток формаций использовалось еще в [5].

Заметим, что индуктивность решетки θ по существу означает, что исследование операции $\vee_{\theta^l}$ на множестве θ^l можно редуцировать к исследованию более простой операции $\vee_\theta$ на множестве θ. Значение понятия индуктивности связано прежде всего с тем, что, как показано в [2], при фиксированном целом неотрицательном n и для любого подгруппового функтора τ, решетка всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций и решетка всех разрешимых тотально локальных формаций индуктивны. Эти результаты нашли ряд глубоких приложений (см. подробнее [2, гл. 4]) при исследовании решеток локальных формаций. Однако вопрос об индуктивности решетки всех τ-замкнутых тотально локальных формаций и решетки всех тотально локальных классов Фиттинга оставался открытым (см. [2, вопрос 4.1.8]). В данной работе мы дадим положительный ответ на данный вопрос.

Со всяким классом Фиттинга $\mathfrak{F}$ можно сопоставить наименьший (по включению) класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ [6], содержащий $\mathfrak{F}$, и такой, что для любых групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Для произвольной H-функции f через f^* обозначается такая H-функция, что $f(p) = (f(p))^*$ для всех $p \in \mathbf{P}$.

Т е о р е м а. *Всякая частичная алгебра формаций и всякая частичная алгебра классов Фиттинга, содержащая все классы Локетта, являются индуктивными решетками.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть θ — частичная алгебра классов Фиттинга, содержащая все классы Локетта. И пусть $\{\mathfrak{F}_i = LR(f_i) \mid i \in I\}$ — произвольный набор классов Фиттинга из θ^l, где f_i — некоторая внутренняя θ-значная H-функция. Пусть $\mathfrak{F} = \vee_{\theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, $\mathfrak{M} = LR(\vee_\theta(f_i \mid i \in I))$ и h_i — минимальная θ-значная H-функция класса $\mathfrak{F}_i$.

Покажем, что $m = \vee_\theta(h_i \mid i \in I)$ — минимальная θ-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$. Пусть $\pi = \pi(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = \bigcup_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i) = \pi(\mathfrak{F})$ и h — минимальная θ-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Докажем, что $h = m$.

Пусть $p \in \mathbf{P} \setminus \pi$. Тогда для любого $i \in I$ имеет место $h(p) = \varnothing$ и $h_i(p) = \varnothing$. Значит, $m(p) = \varnothing$. Пусть $p \in \pi$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $h_i(p) \neq \varnothing$, т. е. $m(p) \neq \varnothing$. По лемме 21 [1] имеет место

$$h(p) = \theta\mathrm{fit}\left(F^p(G) \mid G \in \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right) = \theta\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I}\theta\mathrm{fit}(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)\right) =$$

$$\theta\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I}h_i(p)\right) = (\vee_\theta(h_i \mid i \in I))(p) = m(p).$$

Итак, $h = m$. Поскольку $h_i \le f_i$, то для всех $p \in \mathbf{P}$ имеет место включение

$$\theta\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I}h_i(p)\right) \subseteq \theta\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I}f_i(p)\right).$$

Отсюда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Докажем теперь обратное включение. Пусть t_i — такая H-функция класса $\mathfrak{F}_i$, что $t_i(p) = h_i(p)\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbf{P}$. Тогда по лемме 4 [7] t_i^* — H-функция класса $\mathfrak{F}_i$. Заметим, что поскольку θ — частичная алгебра классов Фиттинга, то H-функции t_i и t_i^* θ-значны. Покажем, что $f_i \le t_i^*$.

Допустим, что $f_i \not\le t_i^*$. Тогда найдется такое простое число p, что $f_i(p) \not\subseteq (t_i(p))^*$. Пусть G — группа из $f_i(p) \setminus (t_i(p))^*$. Пусть $\Gamma = G \wr Z_p = [K]Z_p$, где Z_p — группа порядка p, K — база регулярного сплетения Γ. Так как $G \notin (t_i(p))^*$, то, согласно [8, гл. 10, утверждение 2.1 а)], $\Gamma_{(t_i(p))^*} = K_1$, где K_1 — база регулярного сплетения $\Gamma_1 = G_{(t_i(p))^*} \wr Z_p$. Ввиду свойств сплетений (см., например, [8, гл. A, 18.2d]) $\Gamma/\Gamma_{(t_i(p))^*} = \Gamma/K_1 \simeq \left(G/G_{(t_i(p))^*}\right) \wr Z_p$. Следовательно, p делит порядок $\Gamma/\Gamma_{(t_i(p))^*}$.

Так как $G \in f_i(p)$, то $K \in f_i(p)$. Поэтому $K \subseteq \Gamma_{f_i(p)}$. Поскольку $\Gamma/K \simeq Z_p \in \mathfrak{N}_p$, то $\Gamma/K/\Gamma_{f_i(p)}/K \simeq \Gamma/\Gamma_{f_i(p)} \in \mathfrak{N}_p$. Значит, по лемме 23 [1] $\Gamma \in f_i(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}_i = LR(f_i) = LR(t_i^*)$ и поэтому $\Gamma \in \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \left(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})} (t_i(p))^* \mathfrak{G}_{p'} \right)$, т. е. $\Gamma \in (t_i(p))^* \mathfrak{G}_{p'}$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\Gamma / \Gamma_{(t_i(p))^*} \in \mathfrak{G}_{p'}$. Противоречие. Итак, $f_i \le t_i^*$. Значит, $f = \vee_\theta(f_i \mid i \in I) \le \vee_\theta(t_i^* \mid i \in I)$, т. е. для любого $p \in \mathbf{P}$ имеет место включение $f(p) = \vee_\theta(f_i(p) \mid i \in I) \subseteq \vee_\theta((t_i(p))^* \mid i \in I) = \vee_\theta((h_i(p))^* \mathfrak{N}_p \mid i \in I)$. Поскольку $(h_i(p))^* \mathfrak{N}_p \subseteq (\vee_\theta((h_i(p))^* \mid i \in I))\mathfrak{N}_p$, то $\theta\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I} (h_i(p))^* \mathfrak{N}_p \right) \subseteq \theta\mathrm{fit}((\vee_\theta((h_i(p))^* \mid i \in I))\mathfrak{N}_p) = (\vee_\theta((h_i(p))^* \mid i \in I))\mathfrak{N}_p$. Таким образом,

$$f(p) \subseteq \vee_\theta((h_i(p))^* \mathfrak{N}_p \mid i \in I) \subseteq (\vee_\theta((h_i(p))^* \mid i \in I))\mathfrak{N}_p.$$

Кроме того, понятно, что $(h_i(p))^* \subseteq (\vee_\theta(h_i(p) \mid i \in I))^*$. Значит, $\vee_\theta((h_i(p))^* \mid i \in I) = \theta\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I} (h_i(p))^* \right) \subseteq \theta\mathrm{fit}\left(\left(\theta\mathrm{fit}(\bigcup_{i\in I} h_i(p)) \right)^* \right) = \left(\theta\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I} h_i(p) \right) \right)^*$. Поэтому, $(\vee_\theta((h_i(p))^* \mid i \in I))\mathfrak{N}_p \subseteq (\vee_\theta(h_i(p) \mid i \in I))^* \mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \mathbf{P}$. Но $\mathcal{F} = LR(t)$, где t — такая θ-значная H-функция, что $t(p) = (\vee_\theta(h_i(p) \mid i \in I))\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \mathbf{P}$. Тогда по лемме 4 [7] $\mathfrak{F} = LR(t^*)$. Итак, $f \le t^*$. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $m = \mathcal{F}_u$ мы завершили доказательство первого утверждения теоремы.

Пусть теперь θ — частичная алгебра формаций. И пусть $\{\mathfrak{F}_i = LF(f_i) \mid i \in I\}$ — произвольный набор формаций из θ^l, где f_i — некоторый внутренний θ-значный спутник. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F} = \vee_{\theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, $\mathfrak{M} = LF(\vee_\theta(f_i \mid i \in I))$ и h_i — минимальный θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$.

Покажем, что $m = \vee_\theta(h_i \mid i \in I)$ — минимальный θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\pi = \pi\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i \right) = \bigcup_{i\in I} \pi(\mathfrak{F}_i) = \pi(\mathfrak{F})$. И пусть h — минимальный θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда если $p \in \mathbf{P} \backslash \pi$, то для любого $i \in I$ имеет место $h_i(p) = \varnothing$. Значит, $m(p) = \varnothing$. Понятно также, что $h(p) = \varnothing$.

Пусть $p \in \pi$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $h_i(p) \neq \varnothing$. Значит, согласно [2, теорема 1.1.5], имеет место

$$h(p) = \theta\mathrm{form}(G / F_p(G) \mid G \in \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i) = \theta\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I} \theta\mathrm{form}(G / F_p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) =$$
$$\theta\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I} h_i(p) \right) = (\vee_\theta(h_i \mid i \in I))(p) = m(p).$$

Итак, $h = m$.

Поскольку $h_i \le f_i$, то для всех $p \in \mathbf{P}$ имеет место включение

$$\theta\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I} h_i(p) \right) \subseteq \theta\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I} f_i(p) \right).$$

Значит, $h \le f = \vee_\theta(f_i \mid i \in I)$. Отсюда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Согласно замечанию 2 [1], формация $\mathfrak{F}_i$ обладает таким θ-значным спутником F_i, что $F_i(p) = \mathfrak{N}_p h_i(p)$ для любого $p \in \mathbf{P}$. Покажем, что $f_i \le F_i$. Действительно, если $L \in f_i(\mathrm{p})$, то $L/O_p(L) \in f_i(p)$ и $O_p(L/O_p(L)) = 1$. Тогда, согласно теореме 1.1.5 [2], $L/O_p(L) \in h_i(p) = \theta\mathrm{form}(A \mid A \in f_i(p),\ O_p(A) = 1)$. Поэтому $L \in \mathfrak{N}_p h_i(p) = F_i(p)$. Следовательно, $f \le \vee_\theta(F_i \mid i \in I)$, т. е.

$$f(p) = \vee_\theta(f_i(p) \mid i \in I) \subseteq \vee_\theta(F_i(p) \mid i \in I) = \vee_\theta(\mathfrak{N}_p h_i(p) \mid i \in I)$$

для всех $p \in \mathbf{P}$. Ввиду того что $\mathfrak{N}_p h_i(p) \subseteq \mathfrak{N}_p(\vee_\theta(h_i(p) \mid i \in I))$ и учитывая следствие 7.13 [5], имеем

$$\theta\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{N}_p h_i(p)\right)\subseteq \theta\mathrm{form}(\mathfrak{N}_p(\vee_\theta(h_i(p)\mid i\in I)))=$$

$$\mathfrak{N}_p(\vee_\theta(h_i(p)\mid i\in I)),$$

т. е.

$$f(p)\subseteq \vee_\theta(\mathfrak{N}_p h_i(p)\mid i\in I)\subseteq \mathfrak{N}_p(\vee_\theta(h_i(p)\mid i\in I)).$$

Но ввиду замечания 2 [1] $\mathfrak{F}=LF(F)$, где F — такой θ-значный спутник, что $F(p)=\mathfrak{N}_p(\vee_\theta(h_i(p)\mid i\in I))$ для всех $p\in \mathbf{P}$. Таким образом, $f\leq F$, т. е. $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{M}=\mathfrak{F}$. Итак, частичная алгебра формаций θ индуктивна. Теорема даказана.

С л е д с т в и е 1 ([2, теорема 4.1.1]). *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций индуктивна.*

С л е д с т в и е 2 ([2, теорема 4.1.7]). *Решетка разрешимых тотально локальных формаций индуктивна.*

С л е д с т в и е 3. *Решетка l^n индуктивна.*

С л е д с т в и е 4. *Решетка l^∞ индуктивна.*

С л е д с т в и е 5. *Решетка всех τ-замкнутых тотально локальных формаций индуктивна.*

Напомним, что множество всех локальных спутников (H-функций) частично упорядочено отношением $\leq$, где $f\leq h$ тогда и только тогда, когда $f(p)\subseteq \mathrm{h}(p)$ для всех $p\in\mathbf{P}$.

С л е д с т в и е 6. *Пусть θ — частичная алгебра формаций, $\mathfrak{F}\in\theta^l$. Тогда частично упорядоченное множество всех внутренних θ-значных спутников формации $\mathfrak{F}$ является полной решеткой.*

С л е д с т в и е 7. *Пусть θ — такая же частичная алгебра классов Фиттинга, как и в теореме, $\mathfrak{F}\in\theta^l$. Тогда частично упорядоченное множество всех внутренних θ-значных H-функций класса $\mathfrak{F}$ является полной решеткой.*

Summary

It is proved that in a complete lattice of τ-closed totally local formations l_∞^τ the supremum of an arbitrary set of its elements $\{\mathfrak{F}=LF(f_i)\mid i\in I\}$ where f_i is integrated l_∞^τ-valued satellite can be defined with the help of satellite f the values $f(p)$ of which are the supremums of corresponding values of the set $\{f_i(p)\mid i\in I\}$.

Литература

1. С к и б а А. Н., Ш е м е т к о в Л. А. // Матем. труды. 1999. Т. 2, № 1. С. 1—34.
2. С к и б а А. Н. Алгебра формаций. Мн., 1997.
3. С к и б а А. Н. Алгебры классов групп. Гомель, 1998. (Препринт/Гомельский госуниверситет: 78.)
4. С к и б а А. Н. // Вопросы алгебры. 1987. Вып. 3. С. 21—31.
5. Ш е м е т к о в Л. А., С к и б а А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
6. L o c k e t t F. P. // Math. Z. 1974. Bd 137, N 2. S. 131—136.
7. В о р о б ь е в Н. Т. // Вопросы алгебры. 1992. Вып. 7. С. 60—69.
8. D o e r k K., H a w k e s T. Finite soluble groups. Berlin; New York, 1992.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Поступило 14.06.1999