

О РЕШЕТКЕ ЧАСТИЧНО КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ С ДОПОЛНЯЕМОЙ ПОДФОРМАЦИЕЙ

А.П. Мехович, Е.А. Витько

Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Класс групп \mathcal{F} называется формацией, если он замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Подформация \mathcal{M} формации \mathcal{F} называется дополняемой в \mathcal{F} (А.Н. Скиба, 1981), если \mathcal{M} дополняема в решетке всех подформаций формации \mathcal{F} , т.е. если в \mathcal{F} имеется такая подформация \mathcal{H} (дополнение к \mathcal{M} в \mathcal{F}), что

$$\mathcal{F} = \text{form}(\mathcal{M} \cup \mathcal{H}) \text{ и } \mathcal{M} \cap \mathcal{H} = (1).$$

Цель исследования – найти условия, при которых частично композиционная формация является нильпотентной.

Материал и методы. В качестве материала использованы ранее опубликованные результаты по данной теме. Применены методы исследования теории конечных групп, а также методы теории классов конечных групп, в частности, методы теории формаций.

Результаты и их обсуждение. Доказано, что если класс p -групп дополняем в решетке всех частично композиционных подформаций частично композиционной формации \mathcal{F} , то \mathcal{F} состоит из нильпотентных групп.

Заключение. В настоящей работе определены условия, при которых частично композиционная формация является нильпотентной.

Ключевые слова: конечная группа, формация, подформация, дополняемая подформация, p -композиционная формация групп, решетка, решетка формаций, атом решетки.

ON THE LATTICE OF PARTIALLY COMPOSITION FORMATIONS WITH A COMPLEMENTED SUBFORMATION

A.P. Mekhovich, E.A. Vitko

Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

All groups under consideration in the present article are supposed to be finite. A class of groups \mathcal{F} is called a formation if it is closed with respect to homomorphic images and finite subdirect products. A subformation \mathcal{M} of a formation \mathcal{F} is said to be complemented in \mathcal{F} (A.N. Skiba, 1981) if \mathcal{M} is complemented in the lattice of all subformations of formation \mathcal{F} , i.e., if in \mathcal{F} there is such a subformation \mathcal{H} (complement to \mathcal{M} in \mathcal{F}) then

$$\mathcal{F} = \text{form}(\mathcal{M} \cup \mathcal{H}) \text{ and } \mathcal{M} \cap \mathcal{H} = (1).$$

The purpose of the paper is to find the conditions under which a partially composition formation is nilpotent.

Material and methods. The already published findings on the research topic are the material for the article. Methods of the study of the finite group theory have been used as well as methods of the theory of classes of the finite groups, methods of the theory of formation of groups in particular.

Findings and their discussion. It is proved that if the class of p -groups is complemented in the lattice of all partially composition subformation of a partially compositional formation \mathcal{F} , then \mathcal{F} consists of nilpotent groups.

Conclusion. In the paper conditions have been defined under which a partially composition formation is nilpotent.

Key words: finite group, formation, subformation, complemented subformation, p -composition formation of groups, lattice, the lattice of formations, atom of a lattice.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используется стандартная терминология [1–4].

Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений, т.е. класс групп, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) если $G \in \mathfrak{X}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{X}$;
- 2) если $G/N_1 \in \mathfrak{X}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{X}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{X}$.

В теории решеток классов групп многие исследования связаны с изучением дополняемых подформаций. Понятие дополняемой подформации введено в работе А.Н. Скибы [5], где были описаны разрешимые формации групп, у которых все их подформации дополняемы.

Пусть \mathfrak{X} – произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех формаций, содержащих \mathfrak{X} , обозначают $\text{form } \mathfrak{X}$ и называют *формацией, порожденной* \mathfrak{X} . В частности, пишут $\text{form } G$ в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$. Всякая формация такого вида называется *однопорожденной формацией* (см. [1]). Напомним, что подформация \mathfrak{M} формации \mathfrak{F} называется *дополняемой* в \mathfrak{F} [5], если \mathfrak{M} дополняема в решетке подформаций формации \mathfrak{F} , т.е. если в \mathfrak{F} имеется такая подформация \mathfrak{H} (*дополнение* к \mathfrak{M} в \mathfrak{F}), что

$$\mathfrak{F} = \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Позднее результат А.Н. Скибы получил развитие в монографии [1] и работах [6–8]. Продолжая исследования в данном направлении, в работе [9] А.Н. Скиба дал полное описание локальных формаций с дополняемыми локальными подформациями. В частности, было доказано, что локальная формация нильпотентна, если в ней дополняемы все подформации вида \mathfrak{N}_p .

В данной работе доказан аналог вышеуказанного результата в теории частично композиционных формаций.

Цель исследования – найти условия, при которых частично композиционная формация является нильпотентной.

Материал и методы. В качестве материала использованы ранее опубликованные результаты по данной теме. Применены методы исследования теории конечных групп, а также методы теории классов конечных групп, в частности, методы теории формаций.

Результаты и их обсуждение. Пусть p – некоторое простое число, тогда символ p' обозначает множество всех простых чисел, отличных от p . Через $\pi(G)$ обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы G , $\pi(\mathfrak{X})$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из совокупности групп \mathfrak{X} . Символами $R_p(G)$, $C^p(G)$ обозначаются соответственно наибольшая нормальная разрешимая p -подгруппа группы G и пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G , у которых композиционные факторы имеют простой порядок p ($C^p(G) = G$, если в группе G нет таких факторов). Через \mathfrak{N} , \mathfrak{N}_p , $\text{Com}(\mathfrak{X})$ обозначают соответственно класс всех нильпотентных групп, класс всех p -групп и класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f: \{p, p'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}. \quad (*)$$

Следуя [4], сопоставим функции f вида (*) класс групп

$$CF_p(f) = (G \mid G/R_p(G) \in f(p') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(\text{Com}(G))).$$

Если формация \mathfrak{F} такова, что $\mathfrak{F} = CF_p(f)$ для некоторой функции f вида (*), то \mathfrak{F} называется *p -композиционной формацией с p -композиционным спутником* f [4].

Лемма 1 [10, теорема 3.1]. *Решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций алгебраична и модулярна.*

Непосредственно из леммы 1 вытекает

Лемма 2. Любая p -композиционная формация есть решеточное объединение своих однопорожденных p -композиционных подформаций.

Следующая лемма дает способ построения минимального c^{ω}_{n-1} -значного спутника формации $\mathfrak{F} = c^{\omega}_n \text{form } \mathfrak{X}$.

Лемма 3 [4, лемма 11]. Пусть \mathfrak{X} – непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = c^{\omega}_n \text{form } \mathfrak{X}$, где $n \geq 1$, $\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))$, и пусть f – минимальный c^{ω}_{n-1} -значный ω -композиционный спутник формации \mathfrak{F} . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(\omega') = c^{\omega}_{n-1} \text{form}(G / R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
- 2) $f(p) = c^{\omega}_{n-1} \text{form}(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \pi$;
- 3) $f(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$;
- 4) если $\mathfrak{F} = CF_p(h)$ и спутник h c^{ω}_{n-1} -значен, то для всех $p \in \pi$ имеют место

$$f(p) = c^{\omega}_{n-1} \text{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(A) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c^{\omega}_{n-1} \text{form}(A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_{\omega}(A) = 1).$$

Для произвольной совокупности групп \mathfrak{X} полагают (см. [4])

$$\mathfrak{X}(C^p) = \begin{cases} \text{form}(G / C^p), & \text{если } p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{X})), \\ \emptyset, & \text{если } p \notin \pi(\text{Com}(\mathfrak{X})). \end{cases}$$

Если $\mathfrak{F} = CF_p(F)$, где $F(p') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{X}_p \mathfrak{F}(C^p)$ для всех $p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$, то спутник F называется каноническим p -композиционным спутником формации \mathfrak{F} [4].

Лемма 4 [4, замечание 1]. Любая p -композиционная формация обладает каноническим p -композиционным спутником.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – произвольная система непустых классов групп такая, что для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. Символом $\bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ обозначают [1] класс всех групп вида $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$, ..., $A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, i_2, \dots, i_t \in I$.

Лемма 5 [1, теорема 4.3.2]. Пусть \mathfrak{M} – непустая подформация формации \mathfrak{F} . Тогда если \mathfrak{H} – дополнение \mathfrak{M} к \mathfrak{F} , то $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$.

Лемма 6 [11, теорема]. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$ для некоторых формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{H} таких, что $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \emptyset$. Тогда формация \mathfrak{F} p -композиционна в том и только в том случае, когда p -композиционна каждая из формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{H} .

Лемма 7 [1, лемма 4.3.4]. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$ и \mathfrak{M} – непустая подформация формации \mathfrak{F} . Тогда $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_2)$.

Если \mathfrak{F} – p -композиционная формация, то символом $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех p -композиционных подформаций p -композиционной формации \mathfrak{F} . Через c_p обозначают решетку всех p -композиционных формаций.

Лемма 8 [12, теорема 2]. Пусть $\mathfrak{F} = c_p \text{form } G$ – однопорожденная p -композиционная формация. Тогда у решетки $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число атомов.

Для p -композиционных формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{H} полагают

$$\mathfrak{M} \vee_p \mathfrak{H} = c_p \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Теорема. Пусть \mathfrak{F} – p -композиционная формация. Тогда если формация \mathfrak{X}_p дополняема в решетке $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ для каждого $p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$.

Доказательство. По лемме 2 любая p -композиционная формация есть объединение (в решетке c_p) своих однопорожденных p -композиционных подформаций, т.е.

$$\mathfrak{F} = c_p \text{form}(\cup_{G \in \mathfrak{F}} c_p \text{form} G).$$

Значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что она справедлива для любой однопорожденной p -композиционной подформации \mathfrak{M} из \mathfrak{F} .

По лемме 3 формация \mathfrak{M} обладает минимальным p -композиционным спутником m . Тогда если $p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{M}))$, то в силу леммы 4 любая p -композиционная формация обладает каноническим p -композиционным спутником. Это означает, что выполняется

$$\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p m(p) = M(p) \subseteq \mathfrak{M},$$

где M – канонический p -композиционный спутник формации \mathfrak{M} . Покажем, что подформация \mathfrak{N}_p дополняема в решетке $L_{c_p}(\mathfrak{M})$. Нулем этой решетки является формация единичных групп, единицей – формация \mathfrak{M} . По условию теоремы в решетке $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ найдется дополнение \mathfrak{H} к \mathfrak{N}_p . Нулем решетки $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ является формация (1), единицей – формация \mathfrak{F} . Тогда

$$\mathfrak{F} = c_p \text{form}(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \vee_p \mathfrak{H} \text{ и } \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Согласно леммам 5 и 6

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}$$

и формации \mathfrak{N}_p и \mathfrak{H} являются p -композиционными. Поэтому по лемме 7

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}) = \\ &= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \\ &= \mathfrak{N}_p \vee_p (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H} = (1)$, то

$$\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1).$$

Следовательно, $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ – дополнение к \mathfrak{N}_p в \mathfrak{M} , т.е. формация \mathfrak{N}_p дополняема в решетке $L_{c_p}(\mathfrak{M})$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Согласно лемме 8 в \mathfrak{M} имеется лишь конечное число подформаций, являющихся атомами решетки $L_{c_p}(\mathfrak{M})$. Пусть число атомов решетки $L_{c_p}(\mathfrak{M})$ равно k . Проведем индукцию по k . Согласно леммам 5 и 6

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$$

и формация $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ является p -композиционной. Заметим, что поскольку один из атомов \mathfrak{N}_p решетки $L_{c_p}(\mathfrak{M})$ не содержится в $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, то в решетке $L_{c_p}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ число атомов меньше, чем k .

Если $k = 1$, то в решетке $L_{c_p}(\mathfrak{M})$ имеется лишь один атом. Но в решетке $L_{c_p}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ атомов меньше $k = 1$, т.е. в решетке $L_{c_p}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ нет атомов. Последнее возможно лишь в случае, когда $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Поэтому

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \text{form}(\mathfrak{N}_p \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})) = \text{form} \mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_p.$$

Следовательно, любая группа из \mathfrak{M} нильпотентна, т.е. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

Предположим теперь, что $k > 1$ и утверждение теоремы верно для всех p -композиционных формаций, у которых решетка p -композиционных подформаций имеет число атомов меньше, чем k . В данном случае утверждение для формации $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$ верно по индукции. Но $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})$. Поэтому каждая группа G из \mathfrak{M} имеет вид:

$$G = A \times B,$$

где $A \in \mathfrak{N}_p$, $B \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$. Значит, утверждение теоремы выполняется для однопорожденной формации \mathfrak{M} . Итак, утверждение теоремы выполняется и для формации $\mathfrak{F} = c_p \text{form}(\cup_{G \in \mathfrak{F}} c_p \text{form} G)$, т.е. $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Теорема доказана.

Заключение. В настоящей работе определены условия, при которых частично композиционная формация является нильпотентной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Doerk, K. Finite soluble groups. De Gruyter Expo. Math., 4 / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).
4. Скиба, А.Н. Кратно \mathfrak{F} -композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
5. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп: труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.
6. Скиба, А.Н. О дополняемых подформациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 114–118.
7. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры: сб. ст. / Ин-т математики АН Украины; отв. ред. Н.С. Черников. – Киев, 1993. – С. 27–54.
8. Жевнова, Н.Г. p -Насыщенные формации с дополняемыми p -насыщенными подформациями / Н.Г. Жевнова, А.Н. Скиба // Известия вузов. Сер. Математика. – 1997. – № 5(420). – С. 23–29.
9. Скиба, А.Н. О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Известия вузов. Сер. Математика. – 1994. – № 10(389). – С. 75–80.
10. Воробьев, Н.Н. О модулярности решетки τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Украинский матем. журн. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 453–463.
11. Воробьев, Н.Н. Прямые разложения n -кратно ω -композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 26–29.
12. Воробьев, Н.Н. Композиционные формации с условием дополняемости / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2012. – № 5(71). – С. 15–18. (<https://rep.vsu.by/handle/123456789/4169>).

REFERENCES

1. Skiba A.N. *Algebra formatsiy* [Algebra of Formations], Minsk: Belaruskaya navuka, 1997, 240 p.
2. Doerk K. Finite soluble groups. De Gruyter Expo. Math., 4 / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992, 891 p.
3. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of Finite Groups], Moscow: Nauka, 1978, 272 p.
4. Skiba A.N., Shemetkov L.A. *Ukrainskiy Matem. Zhurn.* [Ukrainian Mathematical Journal], 2000, 52(6), p. 783–797.
5. Skiba, A.N. *Pogruppovoye stroyeniye konechnykh grupp: trudy Gomelskogo seminar* [Subgroup structure of finite groups: Proceedings of the Gomel Seminar / Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the BSSR], Minsk, 1981, p. 155–180.
6. Skiba A.N. *Voprosy algebr* [Issues of Algebra], 1996, 9, p. 114–118.
7. Vasiliev A.F., Kamornikov S.F., Semenchuk V.N. *Beskonechniye gruppy i drugiye primykayushchiye algebraicheskiye struktury: sb. st.* [Infinite groups and other adjoining algebraic structures. A Collection of Articles / Institute of Mathematics of Ukrainian Academy of Sciences], Kiev, 1993, p. 27–54.
8. Zhevnova N.G., Skiba A.N. *Izvestiya vuzov. Ser. Matematika* [Journal of Universities. Mathematics], 1997, 5(420), p. 23–29.
9. Skiba A.N. *Izvestiya vuzov. Ser. Matematika* [Journal of Universities. Mathematics], 1994, 10(389), p. 75–80.
10. Vorobyev N.N., Tsarev A.A. *Ukrainskiy Matem. Zhurn.* [Ukrainian Mathematical Journal], 2010, 62(4), p. 453–463.
11. Vorobyev N.N., Mekhovich A.P. *Doklady NAN Belarusi.* [Reports of the National Academy of Sciences of Belarus], 2012, 56(1), p. 26–29.
12. Vorobyev N.N., Mekhovich A.P. *Vesnik Vitsebskaga dziazh un-ta* [Newsletter of Vitebsk State University], 2012, 5(71), p. 15–18. (<https://rep.vsu.by/handle/123456789/4169>).

Поступила в редакцию 26.01.2022

Адрес для корреспонденции: e-mail: amekhovich@yandex.ru – Мехович А.П.