

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования «Витебский государственный  
университет имени П.М. Машерова»  
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

# **ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА**

*Методические рекомендации*

*Витебск  
ВГУ имени П.М. Машерова  
2021*

УДК [519.854+510.6](075.8)

ББК 22.18я73+22.12я73

Д48

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 27.10.2021.

Составители: старший преподаватель кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова **Т.А. Александрович**; заведующий кафедрой алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **Т.Б. Караулова**

Р е ц е н з е н т :

доцент кафедры информационных технологий и управления бизнесом  
ВГУ имени П.М. Машерова,  
кандидат физико-математических наук *Е.А. Витько*

**Д48** **Дискретная математика и математическая логика** : методические рекомендации / сост.: Т.А. Александрович, Т.Б. Караулова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2021. – 44 с.

Данное издание подготовлено в соответствии с учебными программами по дисциплинам «Дискретная математика и математическая логика», «Дискретная математика», «Математическая логика» специальностей I ступени высшего образования. В начале каждого раздела приводятся основные теоретические сведения, затем предложены задания для самостоятельного решения.

УДК [519.854+510.6](075.8)

ББК 22.18я73+22.12я73

© ВГУ имени П.М. Машерова, 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                  |    |
|--------------------------------------------------|----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ .....                                | 4  |
| 1. Высказывания .....                            | 5  |
| 2. Предикаты .....                               | 10 |
| 3. Множества .....                               | 13 |
| 4. Бинарные отношения. Отображения .....         | 17 |
| 5. Комбинаторика .....                           | 20 |
| 6. Булевы функции .....                          | 23 |
| 7. Алгоритмические модели. Машины Тьюринга ..... | 28 |
| 8. Способы матричного задания графов .....       | 30 |
| 9. Деревья. Код Прюфера .....                    | 35 |
| 10. Планарность .....                            | 37 |
| 11. Раскраска графов .....                       | 41 |
| ЛИТЕРАТУРА .....                                 | 43 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Дискретная математика представляет собой область математики, в которой изучаются свойства структур конечного характера, а также бесконечных структур, предполагающих скачкообразность происходящих в них процессов или отделимость составляющих их элементов. В отличие от дискретной математики классическая математика занимается преимущественно изучением свойств структур непрерывного характера. Деление математики на классическую и дискретную достаточно условно, так как, с одной стороны, происходит взаимопроникновение возникающих идей и методов, а с другой – средства дискретной математики используются для изучения непрерывных моделей и наоборот.

Бурное развитие дискретной математики обусловлено прогрессом компьютерной техники, необходимостью создания средств обработки и передачи информации, а также представления различных моделей на компьютере, являющихся по своей природе конечными структурами.

В начале каждого параграфа излагаются основные теоретические понятия. Затем помещены задачи для самостоятельного решения по основным разделам дискретной математики и математической логики: высказывания, предикаты, множества, бинарные отношения, отображения, комбинаторика, булевы функции, алгоритмические модели, графы.

Адресовано студентам Витебского государственного университета имени П.М. Машерова, обучающимся по специальностям:

1-26 03 01 Управление информационными ресурсами;

1-40 01 01 03 Программное обеспечение информационных технологий. Базы данных и программное обеспечение информационных систем;

1-40 05 01 07 Информационные системы и технологии (в здравоохранении);

1-98 01 01-02 01 Компьютерная безопасность (радиофизические методы и программно-технические средства). Комплексное обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных и информационных систем;

1-31 03 07-01 02 Прикладная информатика (программное обеспечение компьютерных систем). Мультимедийные системы и интернет-программирование;

1-31 03 07-03 Прикладная информатика (веб-программирование и компьютерный дизайн).

Данные методические рекомендации могут успешно использоваться для подготовки к занятиям по дисциплинам: «Дискретная математика», «Математическая логика», «Теория графов», а также при изучении спецкурсов, где затрагиваются вопросы теории графов и математической логики.

# 1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ

*Высказыванием* называется всякое повествовательное предложение, которое определенно является истинным или ложным.

Обозначается большими буквами латинского алфавита:  $A, B, C, X, Y...$

Если суждение об истинности высказывания можно вынести из самого высказывания, то такое высказывание называют *простым*. В противном случае мы имеем *сложное* высказывание.

Из простых высказываний можно образовать сложные высказывания с помощью *логических связок*. Примерами таких логических связок являются союзы И, ИЛИ, НЕ, конструкция ЕСЛИ..., ТО...

## Логические операции:

1. *Отрицание* – операция, ставящая в соответствие высказыванию  $A$  высказывание  $\bar{A}$ , которое истинно, когда  $A$  ложно и ложно, когда  $A$  истинно.

2. *Дизъюнкция* – операция, ставящая в соответствие высказываниям  $A$  и  $B$  высказывание  $A \vee B$ , которое принимает значение истина, если хотя бы одно из высказываний истинно.

3. *Конъюнкция* – операция, ставящая в соответствие высказываниям  $A$  и  $B$  высказывание  $A \wedge B$ , которое принимает значение истина, когда оба высказывания истинны.

4. *Импликация* – операция, ставящая в соответствие высказываниям  $A$  и  $B$  высказывание  $A \Rightarrow B$ , которое принимает значение ложь, тогда и только тогда, когда  $A = \text{и}$ ,  $B = \text{л}$ .

5. *Эквиваленция* – операция, ставящая в соответствие высказываниям  $A$  и  $B$  высказывание  $A \Leftrightarrow B$ , которое принимает значение истина, когда оба высказывания истинны, либо ложны.

Логические операции удобно записывать в виде таблицы истинности:

| $A$ | $B$ | $\bar{A}$ | $A \vee B$ | $A \wedge B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|-----|-----|-----------|------------|--------------|-------------------|-----------------------|
| и   | и   | л         | и          | и            | и                 | и                     |
| и   | л   | л         | и          | л            | л                 | л                     |
| л   | и   | и         | и          | л            | и                 | л                     |
| л   | л   | и         | л          | л            | и                 | и                     |

С помощью логических операций, рассмотренных выше, можно, исходя из простейших высказываний, строить новые, более сложные высказывания, которые называются *формулами*. Например,  $(p \vee q) \Rightarrow r$ , где  $p, q, r$  – «простейшие» высказывания. Отвлекаясь от конкретного содержания высказываний  $p, q, r$ , будем называть их *высказывательными переменными*.

Формулы  $A$  и  $B$  называются *равносильными (эквивалентными)*, если при одних и тех же наборах значений высказывательных переменных они принимают одинаковые значения.

### Основные равносильности алгебры высказываний:

- 1)  $\overline{\overline{A}} \equiv A$  закон двойного отрицания;
- 2)  $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- 3)  $A \vee B \equiv B \vee A$  } коммутативные законы;
- 4)  $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
- 5)  $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$  } ассоциативные законы;
- 6)  $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- 7)  $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$  } дистрибутивные законы;
- 8)  $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$
- 9)  $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$  } законы де Моргана;
- 10)  $A \vee A \equiv A$
- 11)  $A \wedge A \equiv A$  } законы идемпотентности;
- 12)  $A \vee I \equiv I$ ;
- 13)  $A \wedge L \equiv L$ ;
- 14)  $A \wedge I \equiv A$ ;
- 15)  $A \vee L \equiv A$ ;
- 16)  $A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$  закон замены импликации;
- 17)  $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A)$  закон замены эквиваленции;
- 18)  $A \vee \overline{A} \equiv I$  закон исключенного третьего;
- 19)  $A \wedge \overline{A} \equiv L$  закон противоречия;
- 20)  $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
- 21)  $A \vee (A \wedge B) \equiv A$  } законы поглощения;
- 22)  $A \Rightarrow B \equiv \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$  закон контрапозиции.

Формула  $A$  является логическим следствием формул  $A_1, \dots, A_k$ , если она принимает значение истина по крайней мере при тех наборах переменных, при которых все формулы  $A_i$  принимают значение истина.

### Применение алгебры высказываний в технике:

Как известно, высказывание может принимать два истинностных значения: истинно ( $I$ ) или ложно ( $L$ ). В электрической сети это можно интерпретировать, как замкнутый (1) или разомкнутый (0) контакт.

1) Дизъюнкции  $p \vee q$  ставится в соответствие схема (рис. 1.1), состоящая из параллельного соединения контактов  $P$  и  $Q$ , которая замкнута тогда и только тогда, когда хотя бы один из контактов  $P$  или  $Q$  замкнут.

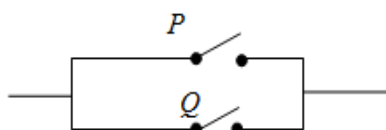


Рисунок 1.1

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| 1   | 1   | 1          |
| 1   | 0   | 1          |
| 0   | 1   | 1          |
| 0   | 0   | 0          |

2) Конъюнкции  $p \wedge q$  ставится в соответствие схема (рис. 1.2), состоящая из последовательного соединения контактов  $P$  и  $Q$ , которая замкнута тогда и только тогда, когда оба контакта  $P$  и  $Q$  замкнуты.

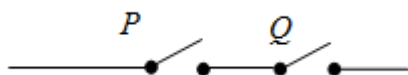


Рисунок 1.2

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| 1   | 1   | 1            |
| 1   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 0            |
| 0   | 0   | 0            |

3) Отрицанию  $\bar{p}$  может быть поставлен в соответствие контакт  $\bar{P}$ , который замкнут, если контакт  $P$  разомкнут, и разомкнут, когда контакт  $P$  замкнут.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями:

- Москва – столица России.
- Треугольник  $ABC$  подобен треугольнику  $A'B'C'$ .
- Луна – спутник Марса.
- $2 + 2 = 5$ .
- Кислород – газ.
- Каша – вкусное блюдо.
- Математика – интересный предмет.
- «Да здравствуют Музы!».
- Треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны.
- Треугольник равносторонний, если в треугольнике все углы равны.
- Сегодня плохая погода.
- В романе А. С. Пушкина «Евгений Онегин 136245 букв».

2. Определите, являются ли последовательности символов формулой:

- $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \vee q)$ ;
- $((\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow (r \wedge (q \vee s)))$ ;
- $((p \vee \bar{q}) \Rightarrow \bar{r} \wedge s)$ ;

- г)  $(p \Rightarrow (q \wedge r \Rightarrow \bar{p}))$ ;  
 е)  $((\bar{p} \wedge \bar{q}) \Rightarrow (p \vee (r \wedge \bar{s})))$ ;  
 ж)  $p \Rightarrow q \Rightarrow r$ ;  
 з)  $\bar{\bar{p}} \Rightarrow p$ ;  
 и)  $(p \Rightarrow q) \vee \vee (q \Rightarrow p)$ ;  
 к)  $((p \wedge q) \wedge r) \Rightarrow \bar{s}$ ;  
 л)  $(p \wedge (\bar{q} \Rightarrow r)) \vee (\bar{p} \Leftrightarrow r) \wedge \bar{q}$ ;  
 м)  $\bar{p} \vee q = s$ .

3. Докажите, что справедливы следующие логические следования. Выясните, будут ли верны обратные следования, т. е. будет ли формула, стоящая слева логическим следствием другой:

*Вариант 1*

- 1)  $(p \vee \bar{r}) \Rightarrow q \quad | = \quad (p \Rightarrow q) \wedge r$ ;  
 2)  $((p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow p \quad | = \quad p \vee q$ .

*Вариант 2*

- 1)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \quad | = \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ;  
 2)  $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q) \quad | = \quad p \Rightarrow q$ .

*Вариант 3*

- 1)  $(p \vee q) \Rightarrow r \quad | = \quad (p \wedge \bar{q}) \vee r$ ;  
 2)  $p \wedge \bar{q} \quad | = \quad (\bar{p} \vee q) \Rightarrow \bar{q}$ .

*Вариант 4*

- 1)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \quad | = \quad (p \wedge q) \Rightarrow r$ ;  
 2)  $\overline{p \vee q} \quad | = \quad \bar{p} \vee \bar{q}$ .

*Вариант 5*

- 1)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \quad | = \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ;  
 2)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \bar{q} \quad | = \quad (\bar{q} \Rightarrow p) \Rightarrow p$ .

4. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями (с помощью таблиц истинности, аналитически, равносильными преобразованиями):

*Вариант 1*  $((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge \overline{q \vee s}) \Rightarrow \overline{p \vee r}$ .

*Вариант 2*  $((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s))$ .

*Вариант 3*  $((p \Rightarrow q) \vee r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$ .

*Вариант 4*  $p \Rightarrow (q \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)))$ .

*Вариант 5*  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q))$ .



5. С помощью равносильных преобразований докажите, что следующие формулы являются тождественно ложными:

Вариант 1  $\overline{(x \vee y \Rightarrow \overline{x \Rightarrow y}) \vee \overline{z \wedge y \Rightarrow (z \Rightarrow \bar{z})} \vee z}.$

Вариант 2  $\overline{((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z)}.$

Вариант 3  $\overline{((x \Rightarrow \bar{y}) \Rightarrow \overline{x \Rightarrow z}) \wedge \overline{z \Rightarrow y}}.$

Вариант 4  $\overline{((\bar{p} \Rightarrow \bar{q}) \Rightarrow ((\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow p)) \Rightarrow (\overline{\bar{p} \Rightarrow p \Rightarrow p})}.$

Вариант 5  $\overline{((x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{z})) \Leftrightarrow ((x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z))}.$

6. Построить переключательные схемы для заданных формул логики высказываний. Определить, при каких положениях переключателей ток в сети отсутствует.

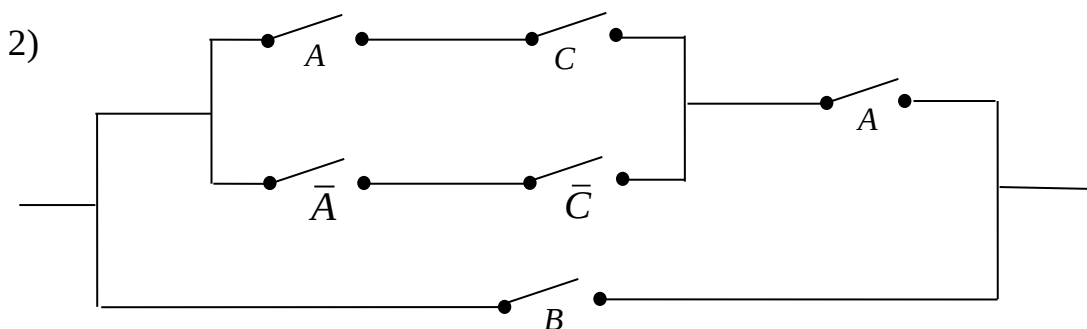
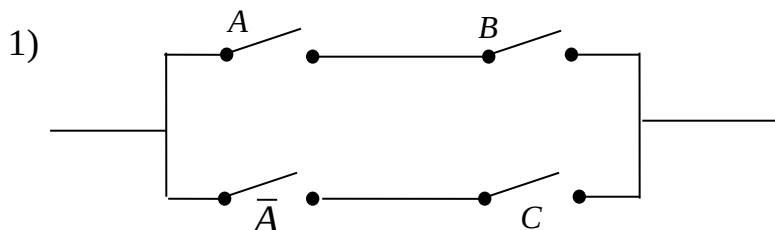
Вариант 1  $a \vee (\bar{b} \wedge c \wedge d) \vee (\bar{b} \wedge \bar{c} \wedge \bar{d}) \vee b \vee (\bar{b} \wedge \bar{c} \wedge d).$

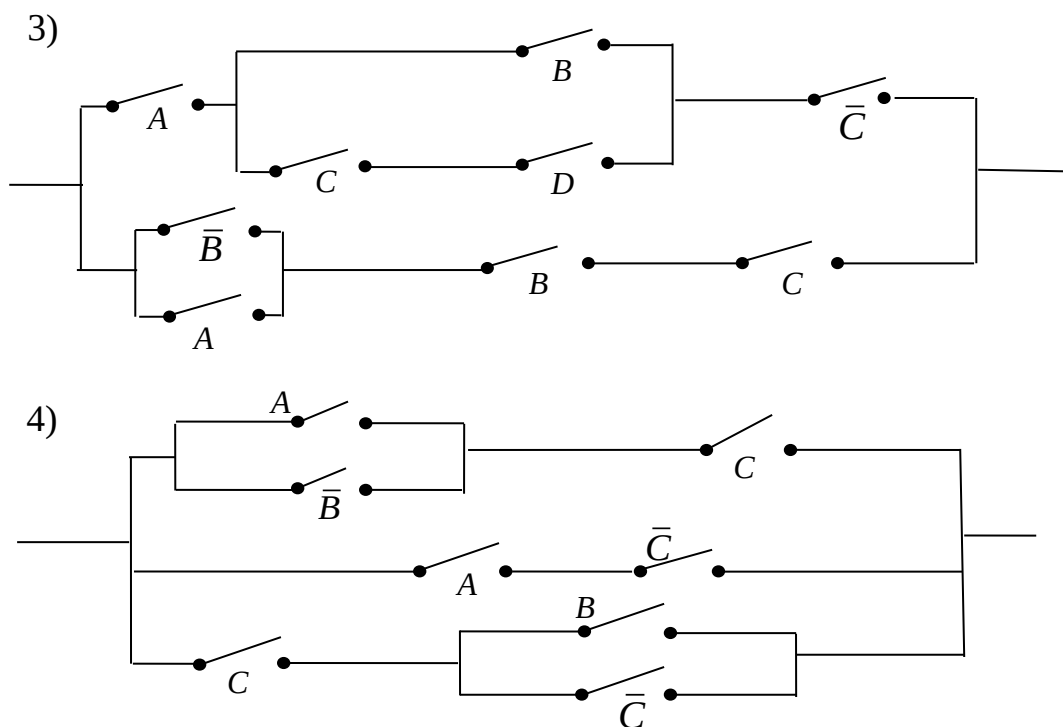
Вариант 2  $(x \wedge (\bar{y} \vee z)) \vee (y \wedge (\bar{x} \vee z)).$

Вариант 3  $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}).$

Вариант 4  $((a \vee b) \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b).$

7. Составить формулы логики высказываний для следующих схем, если возможно формулы упростить:





## 2. ПРЕДИКАТЫ

Предикатом  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется соответствие (функция), переменные которого принимают значения из некоторого множества  $M$ , а само оно принимает два значения:  $I$  (истинно) или  $L$  (ложно).

Предикаты будем обозначать прописными буквами латинского алфавита. Предикаты бывают *одноместными*, *двуместными*, ..., *n-местными*, если в них входят соответственно одна, две, ...,  $n$  переменных.

Областью истинности *n-местного* предиката называется множество всех значений его предикатных переменных, при которых предикат обращается в истинное высказывание.

Для алгебры предикатов справедливы все равносильности алгебры высказываний и добавляется еще несколько.

*Правило выноса квантора за скобки:*

1.  $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ ;
2.  $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ .

*Правило перестановки одноименных кванторов:*

1.  $\forall y \forall x P(x, y) \equiv \forall x \forall y P(x, y)$ ;
2.  $\exists y \exists x P(x, y) \equiv \exists x \exists y P(x, y)$ .

*Правило переноса квантора через отрицание:*

1.  $\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}$ ;
2.  $\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

1. Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов:

*Вариант 1*

1)  $(x \geq 3) \Rightarrow (y < 5)$ ;

2)  $((x > 2) \vee (y > 1)) \wedge ((x < -1) \vee (y < -2))$ ;

3)  $|y + 1| = 2 - x$ .

*Вариант 2*

1)  $(y \geq x^2 - 4) \Rightarrow (x > 3)$ ;

2)  $(x^2 - 5 > 0) \wedge (x > 2)$ ;

3)  $|y| = 9 - x^2$ .

*Вариант 3*

1)  $(y^2 + x^2 > 16) \Rightarrow (y < 2)$ ;

2)  $(x^2 - 3 > 0) \vee (x > 2)$ ;

3)  $xy \leq 2$ .

*Вариант 4*

1)  $(y^2 + x^2 < 25) \Rightarrow (y < 1)$ ;

2)  $(|x - 4| > 6) \wedge (y \leq 12)$ ;

3)  $(y - 2)^2 + (x + 1)^2 = 1$ .

*Вариант 5*

1)  $(y \geq x^2 + 2) \Rightarrow (y < 3)$ ;

2)  $(|x - 3| < 7) \vee (y > 10)$ ;

3)  $|y + x| = 3$ .

2. Найти отрицания следующих формул:

*Вариант 1*

$\exists x(A(x) \wedge B(x) \wedge C(x))$ .

*Вариант 2*

$\forall x(A(x) \Rightarrow \forall yB(y))$ .

*Вариант 3*

$\forall x(A(x) \vee \exists yB(y))$ .

*Вариант 4*

$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \wedge \exists x(S(x) \wedge \overline{R(x)})$ .

*Вариант 5*

$\forall x \exists y \forall z(P(x, y, z) \Rightarrow Q(x, y, z))$ .

3. Какие из ниже приведенных формул являются общезначимыми:

*Вариант 1*

1)  $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x));$

2)  $\forall x P(x, y) \vee \overline{\exists x P(x, y) \wedge \exists y Q(x, y)} \Rightarrow \forall y \overline{Q(x, y)}.$

*Вариант 2*

1)  $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x));$

2)  $\left( \left( (\forall x A(x) \vee \forall y B(y)) \Rightarrow \exists x A(x) \right) \Rightarrow \forall y B(y) \right) \Leftrightarrow \forall y B(y).$

*Вариант 3*

1)  $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x));$

2)  $\left( \left( (\exists x A(x) \Rightarrow \exists y B(y)) \Rightarrow \exists x A(x) \right) \Rightarrow \exists y B(y) \right) \Leftrightarrow (\forall x \overline{A(x)} \vee \exists y B(y)).$

*Вариант 4*

1)  $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x));$

2)  $\left( \left( (\overline{\exists x A(x)} \Rightarrow \overline{\forall x A(x)}) \wedge (\exists x B(x) \Rightarrow \forall x \overline{B(x)}) \right) \right) \Leftrightarrow \forall x \overline{B(x)}.$

*Вариант 5*

1)  $\exists x R(x) \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x (R(x) \vee Q(x));$

2)  $((\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x)) \vee (\exists x B(x) \Rightarrow \forall x A(x))) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \Rightarrow (\exists x B(x) \Rightarrow \forall x A(x))).$

4. Установить какие из следующих высказываний истины, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов  $M$  совпадает с  $\mathbb{R}$ :

*Вариант 1*

1)  $\exists x(x + 5 = x + 3);$       2)  $\exists x((x^2 - 5x + 6 \geq 0) \wedge (x^2 - 6x + 8 \leq 0)).$

*Вариант 2*

1)  $\exists x\left(x^2 + x + \frac{1}{2} = 0\right);$       2)  $\forall x((x^2 - 6x + 8 \geq 0) \vee (x^2 - 6x + 8 < 0)).$

*Вариант 3*

1)  $\forall x(x^2 + x + 1 > 0);$       2)  $\exists x((x^2 - 2x + 1 \geq 0) \wedge (x^2 + x - 2 \leq 0)).$

*Вариант 4*

1)  $\forall x(x^2 + x + 1 > 0);$       2)  $\exists x((x^2 - 2x + 1 \geq 0) \wedge (x^2 + x - 2 \leq 0)).$

*Вариант 5*

1)  $\forall x(x^2 - 5x + 6 \geq 0);$       2)  $\forall x((x^2 - 2x + 1 \geq 0) \vee (x^2 + x - 2 \geq 0)).$

*Вариант 6*

1)  $\exists x((x^2 - 5x + 6 \geq 0) \wedge (x^2 - 2x + 1 > 0));$       2)  $\forall x(2x - 3 < x + 7).$

### 3. МНОЖЕСТВА

Под *множеством* будем понимать совокупность объектов (предметов или понятий) мыслимых как единое целое.

Множества будем обозначать прописными буквами латинского алфавита:  $A, B, X, Y, A_1, A_2, \dots$ , элементы множеств – строчными буквами:  $a, b, x, y, a_1, a_2, \dots$ .

Различают множества:

- 1) конечные (частный случай – единичное или одноэлементное множество);
- 2) бесконечные (например, множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$ );
- 3) пустое – множество, не содержащее ни одного элемента, обозначается символом  $\emptyset$ .

**Способы задания (описания) множеств:**

1) Множество  $A$  определяется непосредственным *перечислением всех своих элементов*  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , т.е. записывается в виде:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

2) Множество  $A$  определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества  $T$ , которые обладают общим свойством  $P(x)$ . В этом случае используется обозначение  $A = \{x \mid x \in T \wedge P(x)\}$ , т.е. множество задается *характеристическим предикатом*.

*Универсальное множество*  $U$  (или *универсум*) есть множество, обладающее таким свойством, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

**Операции над множествами:**

*Объединением множеств*  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$ , обозначается  $A \cup B$ , рис. 3.1.

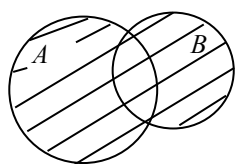


Рисунок 3.1

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

*Пересечением множеств*  $A$  и  $B$  называется множество, которое состоит из общих элементов этих множеств, обозначается  $A \cap B$ , рис. 3.2.

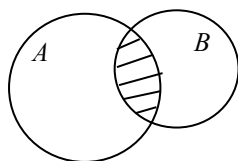


Рисунок 3.2

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Разностью множеств  $A$  и  $B$  называется множество всех тех и только тех элементов множества  $A$ , которые не принадлежат множеству  $B$ , обозначается  $A \setminus B$ , рис. 3.3.

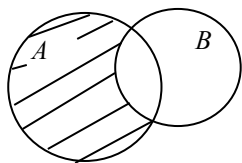


Рисунок 3.3

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Симметрическая разность множеств  $A$  и  $B$  есть множество  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ , обозначается  $A \Delta B$ , рис. 3.4.

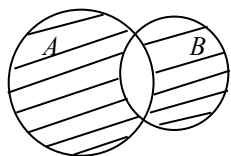


Рисунок 3.4

$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

Дополнением множества  $A$  называется множество элементов некоторого универсального множества содержащего  $A$  (универсума  $U$ ), которые не принадлежат  $A$ , обозначается  $\bar{A}$ , т.е.  $\bar{A} = U \setminus A$ , рис.3.5.

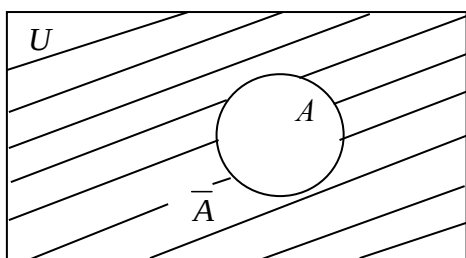


Рисунок 3.5

$$\bar{A} = U \setminus A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

**Теорема.** Пусть задан универсум  $U$ . Тогда для  $\forall A, B, C \subset U$  выполняются следующие свойства:

1. Свойства коммутативности:

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

2. Свойства ассоциативности:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

3. Свойства дистрибутивности:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4. Свойства тождества:

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A.$$

5. Законы идемпотентности:

$$A \cup A = A,$$

$$A \cap A = A.$$

6. Свойства поглощения:

$$A \cup (A \cap B) = A,$$

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

7. Двойное дополнение:  $\overline{\overline{A}} = A$ .

8. Свойства дополнения:

$$A \cup \overline{A} = U,$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

9. Законы де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

10. Разность множеств:  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ .

*Прямое (декартовое) произведение* двух множеств  $A$  и  $B$  называется множеством всех упорядоченных пар, в котором первый элемент каждой пары принадлежит  $A$ , а второй принадлежит  $B$ :

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

1. Записать следующие множества с помощью перечисления элементов, в виде числовых промежутков или с помощью символа  $\emptyset$ . Указать каким является множество.

*Вариант 1*

$$M_1 = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq x \leq 6\}; \quad M_2 = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge |x| < 5\}.$$

*Вариант 2*

$$M_1 = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq x \leq 4\}; \quad M_2 = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge |x| < 5\}.$$

*Вариант 3*

$$M_1 = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge -3 < x < 6\}; \quad M_2 = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x > 7\}.$$

*Вариант 4*

$$M_1 = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge -8 \leq x < 4\}; \quad M_2 = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 6x + 5 = 0\}.$$

*Вариант 5*

$$M_1 = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge -6 \leq x \leq 2\}; \quad M_2 = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 7x + 16 = 0\}.$$

2. Равны ли множества  $A$  и  $B$ ?

*Вариант 1*

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - x + 12 = 0\}; \quad B = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + x - 20 = 0\}.$$

*Вариант 2*

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge 24x(x+1) = 4x^2 - 7\}; \quad B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\}.$$

*Вариант 3*

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge 3 + \frac{27}{x} + x^2 + \frac{81}{x^3} = 0\}; \quad B = \{-3, 3\}.$$

*Вариант 4*

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 + 2x - 48 = 0\}; \quad B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x > 5\}.$$

*Вариант 5*

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 6x + 5 = 0\}; \quad B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 5\}.$$

3. Даны числовые множества  $A, B, C$ . Найти числовые множества, которые будут получены в результате выполнения следующих операций:  
а)  $A \cap B$ ; б)  $B \setminus (A \cap C)$ ; в)  $(A \setminus C) \cap (C \setminus B)$ , если

*Вариант 1*

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 2x - 8 > 0\}; \quad B = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge -2x \geq 5\}; \quad C = \{-3, 3\}.$$

*Вариант 2*

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 5x - 6 < 0\}; \quad B = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge -3x \geq -9\}; \quad C = \{-1, 5\}.$$

*Вариант 3*

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 5x - 6 \geq 0\}; \quad B = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge 2x \leq -6\}; \quad C = \{-3, 6\}.$$

*Вариант 4*

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 7x + 6 > 0\}; \quad B = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge -3x \leq 12\}; \quad C = \{0, 8\}.$$

*Вариант 5*

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 7x + 6 \leq 0\}; \quad B = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge 2x > 7\}; \quad C = \{-2, 2\}.$$

4. Изобразить с помощью диаграмм Эйлера-Венна следующие множества:

*Вариант 1*  $M = (B \cup C) \cap \overline{A \cap C}.$

*Вариант 2*  $M = (\overline{A} \setminus B) \cup (B \setminus C).$

*Вариант 3*  $M = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$

*Вариант 4*  $M = (A \setminus \overline{B}) \cap (A \cup C).$

*Вариант 5*  $M = (A \setminus B) \setminus (\overline{A} \cap C).$

5. На координатной плоскости построить множество  $C = A \times B$ , где

*Вариант 1*

1)  $A = \{1, 2, 4\}, B = [1; 4].$

2)  $A = (2; 4], B = [1; 4].$

*Вариант 2*

1)  $A = \{2, 3, 5\}, B = [2; 5].$

2)  $A = (3; 5), B = [2; 5].$



*Вариант 3*

1)  $A = \{5, 7, 8\}$ ,  $B = [3; 7]$ .

2)  $A = [5; 7]$ ,  $B = (3; 6]$ .

*Вариант 4*

1)  $A = \{1, 3, 6\}$ ,  $B = [1; 4]$ .

2)  $A = (3; 6]$ ,  $B = (1; 4]$ .

*Вариант 5*

1)  $A = \{3, 5, 6\}$ ,  $B = [5; 8]$ .

2)  $A = (3; 6)$ ,  $B = [5; 8]$ .

6. Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  соответственно. Изобразите в системе координат  $XOY$  множество  $D$ , полученное из множеств  $A$ ,  $B$ ,  $C$  по формуле  $\delta$ .

*Вариант 1*

$$\alpha: y - \frac{4}{x} \leq 0;$$

$$\beta: y^2 + x^2 - 25 \leq 0;$$

$$\gamma: |x| \leq 1; |y| \leq 1;$$

$$\delta: (A \cap B) \setminus C.$$

*Вариант 2*

$$\alpha: y - \frac{4}{x} \leq 0;$$

$$\beta: y + \frac{4}{x} \geq 0;$$

$$\gamma: y^2 + x^2 - 25 \leq 0;$$

$$\delta: (A \cap B) \setminus C.$$

*Вариант 3*

$$\alpha: |x| \leq 5; |y| \leq 1;$$

$$\beta: |x| \leq 1; |y| \leq 5;$$

$$\gamma: y^2 + x^2 - 16 \leq 0;$$

$$\delta: A \cup B \cup C.$$

*Вариант 4*

$$\alpha: y + x^2 - 6 \leq 0;$$

$$\beta: |x| > 2; |y| > 2;$$

$$\gamma: x < y;$$

$$\delta: A \cap B \cap C.$$

*Вариант 5*

$$\alpha: y - \frac{5}{x} \leq 0;$$

$$\beta: y + \frac{2}{x} \geq 0;$$

$$\gamma: y \geq 1;$$

$$\delta: (A \cap B) \setminus C.$$

7. Проверить справедливо ли для любых множеств  $A$ ,  $B$ ,  $C$  равенство:

*Вариант 1*  $A \times (C \setminus B) = (A \times (B \cup C)) \setminus (A \times B).$

*Вариант 2*  $B \times A = (B \times (A \setminus C)) \cup (B \times (A \cap C)).$

*Вариант 3*  $B \times (A \cup C) = (B \times (A \setminus C)) \cup (B \times C).$

*Вариант 4*  $B \times (A \cap C) = (B \times A) \cap (B \times (A \setminus C)).$

*Вариант 5*  $B \times (A \setminus C) = (B \times (A \cup C)) \cap (B \times C).$

#### 4. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. ОТОБРАЖЕНИЯ

Бинарным (двухместным) отношением  $\rho$  между множествами  $A$  и  $B$  называется произвольное подмножество  $A \times B$ :

$$a \rho b = (a, b) \in \rho, \text{ где } \rho \subseteq A \times B.$$

Для обозначения отношений между элементами множеств условимся использовать греческий алфавит:  $\rho, \tau, \varphi$  и т.д.

*Областью определения* бинарного отношения  $\rho$  называется множество  $D_\rho = \{a \mid \exists b, \text{ что } a\rho b\}$ . *Областью значений* бинарного отношения  $\rho$  называется множество  $R_\rho = \{b \mid \exists a, \text{ что } a\rho b\}$ .

**Способы задания отношений:**

- 1) с помощью предиката;
- 2) как множество упорядоченных пар;
- 3) в графической форме;
- 4) в виде матрицы.

**Свойства бинарных отношений:**

1. Отношение  $\rho$  на  $A \times A$  называется *рефлексивным*, если  $(a, a)$  принадлежит  $\rho$  для всех  $a$  из множества  $A$ .
2. Отношение  $\rho$  называется *антирефлексивным*, если из  $(a, b) \in \rho$  следует, что  $a \neq b$ .
3. Отношение  $\rho$  *симметрично*, если для  $a$  и  $b$ , принадлежащих множеству  $A$ , из  $(a, b) \in \rho$  следует, что  $(b, a) \in \rho$ .
4. Отношение  $\rho$  называется *антисимметричным*, если для  $a$  и  $b$  из множества  $A$ , из принадлежности  $(a, b)$  и  $(b, a)$  отношению  $\rho$  следует, что  $a = b$ .
5. Отношение  $\rho$  *транзитивно*, если для  $a, b$  и  $c$  из множества  $A$  из того, что  $(a, b) \in \rho$  и  $(b, c) \in \rho$ , следует, что  $(a, c) \in \rho$ .

Отношение  $f$  на  $A \times B$  называется *отображением (функцией)* из  $A$  в  $B$ , если для каждого элемента  $x \in A$  существует один и только один элемент  $y \in B$ . Обозначается  $f: A \rightarrow B$  или  $y = f(x)$ .

Множество  $A$  называется *областью определения функции*. Множество  $B$  – *областью значений функции*.

Если  $M \subseteq A$ , то множество

$$f(M) = \{y \mid f(x) = y \text{ для некоторого } x \in M\}$$

называется *образом* множества  $M$ .

Если  $K \subseteq B$ , то множество  $f^{-1}(K) = \{x \mid f(x) \in K\}$  называется *прообразом* множества  $K$ .

**Свойства отображений (функций):**

- 1) Отображение  $f: A \rightarrow B$  называется *инъективным (инъекцией)*, если оно различные элементы из  $A$  отображает в различные элементы из  $B$ :  $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

2) Отображение  $f : A \rightarrow B$  называется *сюръективным* (*сюръекцией*) или отображением на все множество  $B$ , если в каждый элемент множества  $B$  отображается хотя бы один элемент из  $A$ :  $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$ .

3) Отображение  $f : A \rightarrow B$ , которое одновременно инъективно и сюръективно, называется *биективным* (*биекцией*) или взаимно однозначным отображением множества  $A$  на множество  $B$ .

### Задачи для самостоятельного решения

1. Выполнить задание по вариантам согласно условию.

*Вариант 1* Дано отображение:  $f : \mathbb{R} \rightarrow [2; +\infty)$ , где  $f(x) = x^2 + 2$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Найти: 1) образ элемента  $-2$ ; 2)  $f^{-1}(2)$ .

*Вариант 2* Дано отображение:  $f : \mathbb{R} \rightarrow [4; +\infty)$ , где  $f(x) = |x| + 4$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Найти: 1) образ элемента  $-3$ ; 2)  $f^{-1}(5)$ .

*Вариант 3* Дано отображение:  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-4; +\infty)$ , где  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Найти: 1) образ элемента  $-1$ ; 2)  $f^{-1}(0)$ .

*Вариант 4* Дано отображение:  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$ , где  $f(x) = |x + 2|$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Найти: 1) образ элемента  $2$ ; 2)  $f^{-1}(8)$ .

*Вариант 5* Дано отображение:  $f : \mathbb{R} \rightarrow [4; +\infty)$ , где  $f(x) = x^2 + 4$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Найти: 1) образ элемента  $2$ ; 2)  $f^{-1}(6)$ .

2. Пусть  $A = \{0, 2, 4, 6\}$  и  $B = \{1, 3, 5, 7\}$ . Какие из нижеприведенных отношений между множествами  $A$  и  $B$  являются функциями, определенными на  $A$  со значениями в  $B$ ? Определить какими свойствами обладает функция.

*Вариант 1*  $\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$ .

*Вариант 2*  $\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$ .

*Вариант 3*  $\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\}$ .

*Вариант 4*  $\{(6, 1), (4, 1), (0, 3), (2, 5), (0, 7)\}$ .

*Вариант 5*  $\{(2, 3), (6, 1), (2, 7), (4, 5)\}$ .

3. Пусть даны два множества  $A$  и  $B$ , задано отношение  $\tau$ . Требуется задать данное отношение как множество упорядоченных пар, в графической форме, в виде матрицы.

*Вариант 1*  $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $\tau = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \text{ делит } y, x \leq 3\}$ .

*Вариант 2*  $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$ ,  
 $\tau = \{(x, y) \mid x - y = 3, (x, y) \in A \times B\}$ .

*Вариант 3*  $A=\{2, 4, 5, 6, 7\}, B=\{2, 3, 4, 5, 8\},$

$\tau = \{(x, y) \mid x \cdot y = 16, (x, y) \in A \times B\}.$

*Вариант 4*  $A=\{2, 6, 7, 8\}, \tau = \{(x, y) \mid x, y \in A, x > y\}.$

*Вариант 5*  $A=\{0, 4, 5, 6, 7, 8\}, B=\{2, 3, 4, 5\},$

$\tau = \{(x, y) \mid x + y = 8, (x, y) \in A \times B\}.$

4. Выяснить какими свойствами обладает данное отношение.

*Вариант 1* На множестве  $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  бинарное отношение задано следующим образом:  $arb \Leftrightarrow a - b = 8.$

*Вариант 2* Пусть  $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \rho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}.$

*Вариант 3* На множестве  $M = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  бинарное отношение задано следующим образом:  $\rho = \{(a, b) \mid (a - b) - \text{четное}; a, b \in M\}.$

*Вариант 4* На множестве  $M = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  бинарное отношение задано следующим образом:  $\rho = \{(a, b) \mid (a + b) : (a + 1), a, b \in M\}.$

*Вариант 5* Пусть  $I = \{1, 2, 3, 4\}, \rho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}.$

5. Определить, какие из следующих отношений является отображениями. Какие из отображений инъективны, сюръективны, биективны?

*Вариант 1*  $\varphi = \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty), y = x^2\}.$

*Вариант 2*  $\varphi = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x - y = 3\}.$

*Вариант 3*  $\varphi = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, y - x = 3\}.$

*Вариант 4*  $\varphi = \{(x, y) \mid (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 0], x^2 + y^2 = 1\}.$

*Вариант 5*  $\varphi = \{(x, y) \mid (x, y) \in [-1, 0] \times [-1, 1], x^2 + y^2 = 1\}.$

## 5. КОМБИНАТОРИКА

Пусть имеется  $n$  предметов, отмеченных числами  $1, 2, \dots, n$ . Из этих предметов выбираем один, записываем число, на нем изображенное, а сам предмет либо возвращаем назад, (в этом случае говорят *о выборе с возвращением*), либо он убирается и больше не может быть выбран (в этом случае говорят *о выборе без возвращения*). Повторяем эту процедуру  $k$  раз.

Запись, полученная в результате всех действий, называется *выборкой* из  $n$  элементов по  $k$ .

Запись, полученная по схеме выбора с возвращением, называется *выборкой с повторениями*, а запись, полученная по схеме выбора без возвращений, называется *выборкой без повторений*.

Если две выборки, отличающиеся только порядком записи символов, считают различными, то говорят о *размещении* из  $n$  элементов по  $k$ .

Если две выборки, отличающиеся только порядком записи символов, считают совпадающими, то говорят о *сочетании* из  $n$  элементов по  $k$ .

Через  $A_n^k$  обозначают число различных размещений с повторениями из  $n$  элементов по  $k$

$$A_n^k = n^k.$$

Через  $A_n^k$  обозначают число различных размещений без повторений из  $n$  элементов по  $k$

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Через  $C_n^k$  обозначают число различных размещений без повторений из  $n$  элементов по  $k$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Через  $C_n^k$  обозначают число различных сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$

$$C_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Размещение из  $n$  элементов по  $n$  называется *перестановкой*  $n$  элементов. Число различных перестановок из  $n$  элементов обозначают  $P_n$

$$P_n = n!$$

Пусть имеется  $k_1$  элементов 1-го типа,  $k_2$  элементов 2-го типа, ...,  $k_m$  элементов  $m$ -го типа, причем элементы одного типа считаем неразличимыми. Тогда будем говорить, что у нас *перестановки с повторениями*, и количество таких перестановок выражается числом

$$P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

*Бином Ньютона:*  $(a + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} x^k.$

*Полиномиальная формула:*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 \in \mathbb{N}_0, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}}^n P(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}.$$

*Полиномиальные коэффициенты:*  $P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$

Пусть имеется  $N$  предметов, которые могут обладать свойствами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Обозначим через  $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  количество предметов, обладающих набором свойств  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , а через  $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_k})$  – количество предметов, не обладающих ни одним из свойств  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . Тогда справедлива *формула включений и исключений*:

$$\begin{aligned} N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \dots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1, \alpha_2) + \\ &+ N(\alpha_1, \alpha_3) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \dots + (-1)^n \cdot N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

### Задачи для самостоятельного решения

1. Найти коэффициент при  $x^k$  в разложении данного выражения  $P$  по полиномиальной формуле, полученной после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Вариант 1  $(2 + x^2 - x^3)^{13}$ ,  $k = 23$ .

Вариант 2  $(1 + x^6 - x^{10})^{17}$ ,  $k = 96$ .

Вариант 3  $(x^2 + 3 - x^2)^{16}$ ,  $k = 30$ .

Вариант 4  $(2 + x^6 - x^2)^9$ ,  $k = 18$ .

Вариант 5  $(3 - x^2 + x^5)^{12}$ ,  $k = 22$ .

2. Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на  $\alpha$ , ни на  $\beta$ , ни на  $\gamma$ , ни на  $\delta$ ?

Вариант 1  $\alpha = 4, \beta = 5, \gamma = 6, \delta = 7$ .

Вариант 2  $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 4, \delta = 5$ .

Вариант 3  $\alpha = 3, \beta = 4, \gamma = 5, \delta = 8$ .

Вариант 4  $\alpha = 6, \beta = 7, \gamma = 3, \delta = 2$ .

Вариант 5  $\alpha = 5, \beta = 8, \gamma = 9, \delta = 4$ .

3. Подсчитать количество различных перестановок цифр данного числа  $\alpha$ , при которых никакие  $n$  одинаковых цифр не идут друг за другом.

Вариант 1  $\alpha = 4244522, n = 3$ .

Вариант 2  $\alpha = 6858757, n = 2$ .

Вариант 3  $\alpha = 1249248, n = 2$ .

Вариант 4  $\alpha = 32331252, n = 3$ .

Вариант 5  $\alpha = 46749679, n = 2$ .

4. Сколько существует перестановок  $n$  различных предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно  $k$  или ровно  $m$  предметов?

Вариант 1  $n = 9, m = 3, k = 7$ .

Вариант 2  $n = 8, m = 5, k = 6$ .

Вариант 3  $n = 7, m = 4, k = 3$ .

Вариант 4  $n = 6, m = 3, k = 2$ .

Вариант 5  $n = 9, m = 4, k = 6$ .

5. Найти из данной пропорции  $x$  и  $y$ .

Вариант 1  $C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^y : C_{x+1}^{y-1} = 5 : 4 : 2$ .

Вариант 2  $C_x^{y+1} : C_x^y : C_x^{y-1} = 3 : 3 : 2$ .

Вариант 3  $C_{x+1}^{y+2} : C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^y = 3 : 4 : 3$ .

Вариант 4  $C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^y : C_{x+1}^{y-1} = 4 : 5 : 4$ .

Вариант 5  $C_x^{y+2} : C_x^{y+1} : C_x^y = 3 : 5 : 5$ .

6. Найти наибольший член разложения бинома  $(a + b)^n$ .

Вариант 1  $(\sqrt{5} + 3)^{17}$ .

Вариант 2  $(\sqrt{3} + 10)^{17}$ .

Вариант 3  $(\sqrt{5} + 2)^{13}$ .

Вариант 4  $(3 + \sqrt{6})^{12}$ .

Вариант 5  $(\sqrt{7} + 3)^{15}$ .

## 6. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Булевой функцией  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется функция, принимающая значения 1, 0 и аргументы которой также принимают значения 1, 0. Таким образом, булева функция от  $n$  переменных – это отображение из  $\{0, 1\}^n$  в  $\{0, 1\}$ .

Булевы функции нуля, одной и двух переменных называют *элементарными*.

*Булевы функции от одной переменной:*

| $x$ | $f_1(x) = 0$ | $f_2(x) = 1$ | $f_3(x) = x$          | $f_4(x) = \bar{x}$ |
|-----|--------------|--------------|-----------------------|--------------------|
|     | константа 0  | константа 1  | тождественная функция | отрицание $x$      |
| 0   | 0            | 1            | 0                     | 1                  |
| 1   | 0            | 1            | 1                     | 0                  |

*Булевы функции от двух переменных:*

| $x_1$ | $x_2$ | $f_0(x_1, x_2) = 0$ | $f_1(x_1, x_2) = 1$ | $f_2(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ | $f_3(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ |
|-------|-------|---------------------|---------------------|----------------------------------|--------------------------------|
|       |       | константа 0         | константа 1         | конъюнкция                       | дизъюнкция                     |
| 0     | 0     | 0                   | 1                   | 0                                | 0                              |
| 0     | 1     | 0                   | 1                   | 0                                | 1                              |
| 1     | 0     | 0                   | 1                   | 0                                | 1                              |
| 1     | 1     | 0                   | 1                   | 1                                | 1                              |

| $x_1$ | $x_2$ | $f_4(x_1, x_2) = x_1 \Rightarrow x_2$ | $f_5(x_1, x_2) = x_1 \Leftrightarrow x_2$ | $f_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ |
|-------|-------|---------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------|
|       |       | импликация                            | эквиваленция                              | сложение по mod 2                |
| 0     | 0     | 1                                     | 1                                         | 0                                |
| 0     | 1     | 1                                     | 0                                         | 1                                |
| 1     | 0     | 0                                     | 0                                         | 1                                |
| 1     | 1     | 1                                     | 1                                         | 0                                |

| $x_1$ | $x_2$ | $f_7(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ | $f_8(x_1, x_2) = x_1   x_2$ |
|-------|-------|--------------------------------------|-----------------------------|
|       |       | стрелка Пирса                        | штрих Шеффера               |
| 0     | 0     | 1                                    | 1                           |
| 0     | 1     | 1                                    | 1                           |
| 1     | 0     | 0                                    | 1                           |
| 1     | 1     | 0                                    | 0                           |

Функция  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  из  $P_2$  (множество булевых функций от  $n$  переменных) *зависит существенно* от аргумента  $x_i$ , если существуют такие значения  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$  переменных  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ , что

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

В этом случае переменная  $x_i$  называется *существенной*, в противном случае – называется *несущественной (фиктивной)* переменной.

*Элементарной конъюнкцией* называется конъюнкция литералов (переменных или их отрицаний), взятых не более чем по одному разу.

Элементарная конъюнкция булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  содержащая  $n$  литералов, называется *полной*.

Дизъюнкция любого конечного множества элементарных конъюнкций булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Число элементарных конъюнкций (слагаемых, термов), составляющих ДНФ, называется *длиной ДНФ*.

ДНФ булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , состоящая только из полных элементарных конъюнкций, называется *совершенной ДНФ (СДНФ)*.

СДНФ является единственной (с точностью перестановки слагаемых) для конкретной булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

*Элементарной дизъюнкцией* называется дизъюнкция литералов (переменных или их отрицаний), взятых не более чем по одному разу.

Элементарная дизъюнкция булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  содержащая  $n$  литералов, называется *полной*.

Конъюнкция любого конечного множества элементарных дизъюнкций булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Число элементарных дизъюнкций, составляющих КНФ, называется *длиной КНФ*.

КНФ булевой функции  $F$ , состоящая только из полных элементарных дизъюнкций, называется *совершенной КНФ (СКНФ)*.

*Построение СДНФ с помощью элементарных преобразований*

1. Получаем одну из ДНФ.

2. Если в полученной ДНФ, входящая в нее конъюнкция  $B$  не содержит переменную  $x$ , то используют равносильность:  $B = B \wedge (x \vee \bar{x}) = (B \wedge x) \vee (B \wedge \bar{x})$  и получаем две элементарные конъюнкции.



3. Если в ДНФ входят две одинаковые конъюнкции, то лишнюю можно отбросить.

*Построение СКНФ с помощью элементарных преобразований*

1. Получаем одну из КНФ.

2. Если в полученной КНФ, входящая в нее дизъюнкция  $B$  не содержит переменную  $x$ , то используют равносильность:  $B = B \vee (x \wedge \bar{x}) = (B \vee x) \wedge (B \vee \bar{x})$  и получаем две элементарные дизъюнкции.

3. Если в КНФ входят две одинаковые дизъюнкции, то лишнюю можно отбросить.

*Полином Жегалкина для трех переменных:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3.$$

Система булевых функций  $F = \{f_1, f_2, \dots\}$  называется *полной системой*, если любую булеву функцию можно представить формулой над  $F$ , т.е. реализовать в виде суперпозиции функций из  $F$ .

*Замыканием множества  $F$*  называется множество всех функций из  $P_2$  являющихся суперпозициями функций из  $F$ . Замыкание множества  $F$  обозначим через  $[F]$ .

Система булевых функций  $F$  называется *замкнутой*, если  $[F] = F$ .

Система булевых функций  $F$  называется *полной*, если  $[F] = P_2$ .

### Задачи для самостоятельного решения

1. Перечислить все существенные и фиктивные переменные у следующих функций:

*Вариант 1*

1)  $f(x_1, x_2, x_3) = (10101010);$

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \downarrow (x_2 \mid x_3)) \downarrow (x_2 \downarrow (x_1 \mid x_3))) \downarrow (x_1 \mid x_2).$

*Вариант 2*

1)  $f(x_1, x_2, x_3) = (00111100);$

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_2 \bar{x}_3) \Rightarrow (x_2 \Rightarrow (x_1 x_3))) \Rightarrow (x_1 \vee x_3).$

*Вариант 3*

1)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1100110000110011);$

2)  $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2 \oplus (x_1 \Rightarrow x_2)) \Rightarrow (x_1 \Leftrightarrow x_1 x_2).$

*Вариант 4*

1)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0101111101011111);$

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \oplus (x_2 \Rightarrow \bar{x}_3)) \oplus (x_2 \Rightarrow x_3).$

*Вариант 5*

1)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1011010110110101);$

2)  $f(x_1, x_2) = ((x_1 \vee x_2) \Rightarrow x_1 x_2) \oplus (x_1 \Rightarrow x_2)(x_2 \Rightarrow x_1).$

## 2. Построить СДНФ и СКНФ

№ 1 – по таблице;

№ 2, № 3 – по таблице и методом равносильных преобразований.

*Вариант 1*

1)  $f(x_1, x_2, x_3) = (01010001);$

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \Rightarrow \overline{x_3};$

3)  $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} | \overline{x_2}) \Rightarrow (x_2 x_3 \vee x_1 x_3).$

*Вариант 2*

1)  $f(x_1, x_2, x_3) = (11110001);$

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \Rightarrow \overline{x_3};$

3)  $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \oplus \overline{x_2}) \Rightarrow (x_2 x_3 \Rightarrow x_1 x_3).$

*Вариант 3*

1)  $f(x_1, x_2, x_3) = (11001101);$

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \Rightarrow \overline{x_3};$

3)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 \oplus \overline{x_2} \Leftrightarrow x_3) \Rightarrow x_2 x_3.$

*Вариант 4*

1)  $f(x_1, x_2, x_3) = (11010101);$

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \Rightarrow x_2) \vee x_2 \overline{x_3};$

3)  $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 x_2 \vee x_3) \Rightarrow x_1 | x_2) \Leftrightarrow x_3.$

*Вариант 5*

1)  $f(x_1, x_2, x_3) = (10101010);$

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_2} \Rightarrow x_3);$

3)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \Leftrightarrow (\overline{x_1} \vee x_2).$

## 3. Построить полином Жегалкина.

№ 1 – по СДНФ;

№ 2 – методом неопределенных коэффициентов;

№ 3 – методом треугольника Паскаля.

*Вариант 1*

1)  $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} | \overline{x_2}) \Rightarrow (x_2 x_3 \vee x_1 x_3).$

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2} \overline{x_3};$

3)  $f(x_1, x_2, x_3) = (01010001);$

*Вариант 2*

1)  $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \oplus \overline{x_2}) \Rightarrow (x_2 x_3 \Rightarrow x_1 x_3).$

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow x_2) | (x_2 \downarrow x_3);$

3)  $f(x_1, x_2, x_3) = (11110001);$

*Вариант 3*

1)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 \oplus \overline{x_2} \Leftrightarrow x_3) \Rightarrow x_2 x_3$ .

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 | (x_3 \Rightarrow x_2))$ ;

3)  $f(x_1, x_2, x_3) = (11001101)$ ;

*Вариант 4*

1)  $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 x_2 \vee x_3) \Rightarrow x_1 | x_2) \Leftrightarrow x_3$ .

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \downarrow ((x_1 \Rightarrow x_2) \vee \overline{x_3})$ ;

3)  $f(x_1, x_2, x_3) = (11010101)$ ;

*Вариант 5*

1)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \Leftrightarrow (\overline{x_1} \vee x_2)$ .

2)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \Rightarrow x_2) \vee x_2 \overline{x_3}$ ;

3)  $f(x_1, x_2, x_3) = (10101010)$ .

4. Доопределить функции  $f(x_1, x_2, x_3)$ ,  $g(x_1, x_2, x_3)$ ,  $h(x_1, x_2, x_3)$  так, чтобы  $f \in M$ ,  $g \in L$ ,  $h \in S$ .

Если построение какой-либо функции невозможно, докажите это.

Выясните вопрос о принадлежности построенных функций к классам  $T_0$  и  $T_1$ .

| $N_0$ | $F$        | $g$        | $h$        |
|-------|------------|------------|------------|
| 1     | (-10-1---) | (-10--0-0) | (-0--11-1) |
| 2     | (---01---) | (0---110-) | (11--10--) |
| 3     | (---0-10-) | (---00-10) | (-1--01-0) |
| 4     | (-1---0-)  | (01-0-1--) | (101-1---  |
| 5     | (---0-01-) | (0-10---1) | (--10--01) |

5. 1) Можно ли из функции  $f(x_1, x_2, x_3)$  с помощью суперпозиции получить  $g(x_1, x_2, x_3)$ ?

2) Верно ли, что  $f(x_1, x_2, x_3) \in [g]$ ? ( $[g]$  замыкание класса  $\{g\}$ ).

| $N_0$ | $f$       | $g$       |
|-------|-----------|-----------|
| 1     | 1001 0110 | 1110 0110 |
| 2     | 1001 0100 | 1101 0100 |
| 3     | 0111 1010 | 1000 0110 |
| 4     | 1101 1010 | 1010 1010 |
| 5     | 0110 1111 | 1010 0110 |

6. Методом минимизирующих карт найти минимальную ДНФ:

Вариант 1  $f(x, y, z, t) = (1010010110100101);$

Вариант 2  $f(x, y, z, t) = (1001100110011010);$

Вариант 3  $f(x, y, z, t) = (1010101010011001);$

Вариант 4  $f(x, y, z, t) = (1010010101100110);$

Вариант 5  $f(x, y, z, t) = (1011000101011100).$

7. Найти сокращенную ДНФ функции геометрическим методом:

Вариант 1  $f(x, y, z) = (1110 \ 0001);$

Вариант 2  $f(x, y, z) = (0101 \ 0101);$

Вариант 3  $f(x, y, z) = (1000 \ 0011);$

Вариант 4  $f(x, y, z) = (1111 \ 0001);$

Вариант 5  $f(x, y, z) = (1100 \ 1100).$

8. Найти сокращенную ДНФ функции методом Блейка:

Вариант 1  $xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz\bar{u} \vee y\bar{z}\bar{u} \vee yzu;$

Вариант 2  $xy \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}zu \vee \bar{x}yzu;$

Вариант 3  $\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y\bar{t} \vee y\bar{z}t;$

Вариант 4  $xy \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}yzt;$

Вариант 5  $\bar{x}yz \vee x\bar{v} \vee xyz \vee xt \vee x\bar{y}z \vee x\bar{z}.$

## 7. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. МАШИНЫ ТЬЮРИНГА

Машина Тьюринга является математическим, а не техническим понятием. Можно представить ее как вычислительное устройство, имеющее бесконечную ленту, разделенную на ячейки (то есть в любой момент работы слева или справа к конечной ленте можно добавить недостающую ячейку, содержащую специальный символ, называемый пустым). На этой ленте могут быть записаны слова в некотором заранее фиксированном алфавите. По ленте может перемещаться пишущая-читающая головка, обозревающая одну из ячеек. В зависимости от состояния машины и содержимого обозреваемой ячейки, машина может, в соответствии с командой программы, изменить (или не изменять) состояние, заменить (или не заменять) содержимое обозреваемой ячейки, сдвинуть головку на одну ячейку влево, или вправо, или не сдвигать ее.

Команда машины Тьюринга имеет вид:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 + x_3$   
 $q_r a_i \rightarrow q_l S a_j$ , где  $S \in \{L, R, \_ \}$  и обозначает, соответственно, сдвиг влево,  
 вправо или отсутствие сдвига головки.

*Программой* машины Тьюринга называется конечное непустое множество попарно согласованных команд.

Рекурсивные функции – это функции, определенные некоторым специальным образом. Из названия следует, что их вычисление содержит обращение к самим себе (при меньших значениях аргументов).

1) Нуль – функция:  $O(x) = 0$ ;

### 3) Функция выбора аргумента (тождественная функция)

$$I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m, \text{ где } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}_0^n, \quad m = \overline{1, n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

1. Написать машину Тьюринга, вычисляющую сумму двух чисел, записанных в унарной системе счисления.

2. Написать машину Тьюринга, заменяющую в записи десятичной дроби знак «.» (запятая) на знак «.».

3. Написать машину Тьюринга, вычисляющую сумму двух чисел, записанных в двоичной системе счисления.

4. Написать программу машины Тьюринга, осуществляющую удвоение слова в алфавите  $\{a,b\}$ .

5. Удалить из слова  $P$  его второй символ, если такой есть.

6. Доказать, что функция  $f(x, y) = x + y$  примитивно-рекурсивная.

7. Получить функцию  $f(x) = 3$  с помощью суперпозиции из исходных функций.

29

## 8. СПОСОБЫ МАТРИЧНОГО ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

Пусть  $V$  – конечное непустое множество. **Граф**  $G$  представляет собой пару  $(V, E)$ , где  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  – множество вершин, а  $E(G) = \{(u, v) | u \in V, v \in V\}$  – множество ребер графа.

**Неориентированный граф** – граф, множество ребер которого состоит из неупорядоченных пар (т.е.  $(u, v) = (v, u)$ ).

**Оrientированный граф** – граф, ребра которого являются упорядоченными парами (т.е., в общем случае,  $(u, v) \neq (v, u)$ ). В таком графе ребра принято называть **дугами**, а граф обозначать  $\vec{G}$ .

Вершины  $u$  и  $v$  называются **смежными**, если они соединены ребром, т.е. существует пара  $(u, v) \in E(G)$ . В этом случае говорят, что вершина  $u$  (или вершина  $v$ ) и ребро  $(u, v)$  **инцидентны**. При этом, ребро графа  $G$  будем обозначать следующим образом:  $e = (u, v)$ .

**Степенью** вершины  $v$  графа  $G$  называется число инцидентных ей ребер. Для обозначения степени вершины  $v$  графа  $G$  используется запись  $\deg_G(v)$  или просто  $\deg(v)$ , если ясно, о каком графе  $G$  идет речь. В орграфе также различают **полустепень исхода**  $\deg_+(v)$  и **полустепень захода**  $\deg_-(v)$ , которые равны числу исходящих и заходящих в вершину  $v$  ребер, соответственно. В частности, вершина, степень которой равна 1 называется **висячей** или **листом**, а вершина, степень которой равна 0 – **изолированной**.

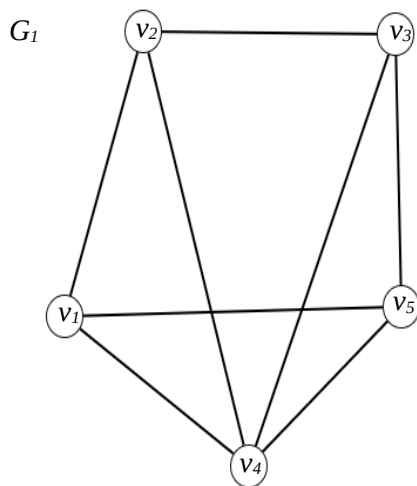
Последовательность степеней вершин графа  $G$ , записанная в каком-либо порядке, называется **степенной последовательностью графа**  $G$ .

Для неориентированного графа справедлива следующая лемма.

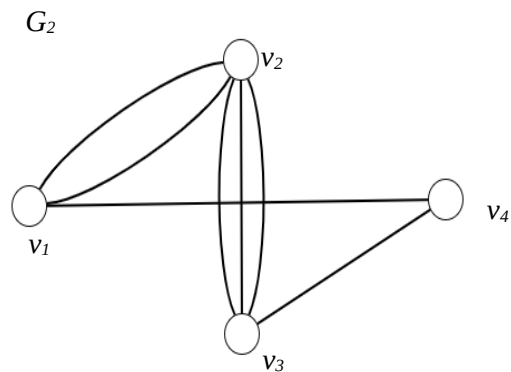
**Лемма о рукопожатиях.** Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер.

Существует множество способов задания графа. Способ задания выбирается в зависимости от задачи, которую предстоит решать на данном графе. При большом числе вершин и ребер анализ графа  $G(V, E)$  усложняется и его геометрическое представление не всегда удобно. В этом случае для исследования графа применяют один из аналитических способов представления его структурных свойств – граф моделируют матрицами, связанными с ним.

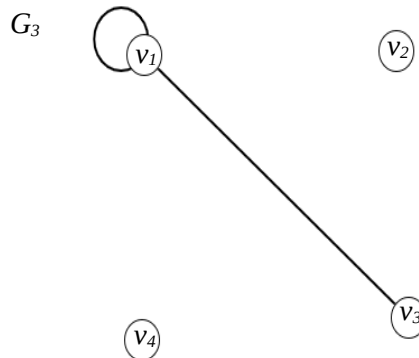
**Матрицей смежности вершин** графа  $G$  называется  $n \times n$  – матрица  $A(G) = (a_{ij})$ , где элемент  $a_{ij}$  есть число ребер, соединяющих вершины  $v_i$  и  $v_j$ , при этом петля может означать одно или два ребра по договоренности. На рис. 8.1 представлены примеры матриц смежности для различных типов графов.



Простой граф



Мультиграф



Граф с петлями

Рисунок 8.1

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(G_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для мульти- и псевдо- неориентированных графов матрица смежности определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{число ребер, соединяющих вершины } v_i \text{ и } v_j, \text{ если } i \neq j; \\ 2 \cdot (\text{число петель, инцидентных вершине } i), \text{ если } i = j. \end{cases}$$

**Матрицей смежности ребер** графа  $G$  называется симметричная матрица  $B(G) = (b_{ij})$ , где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ребро } e_i \text{ смежно с ребром } e_j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

**Матрицей инцидентности** неориентированного графа  $G$  называется  $n \times m$  – матрица  $I(G) = (i_{ij})$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ; у которой

$$i_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

На рис. 8.2 приведен пример матрицы смежности ребер и матрицы инцидентности для неориентированного графа  $G$ .



Рисунок 8.2

**Матрицей смежности вершин** орграфа  $\vec{G}$  называется матрица  $A(G) = (a_{ij})$  с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \text{ является дугой } (v_i - \text{начало}, v_j - \text{конец}); \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Например, матрице, приведенной на рис. 8.3 соответствует граф, изображенный на рис. 8.4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 8.3

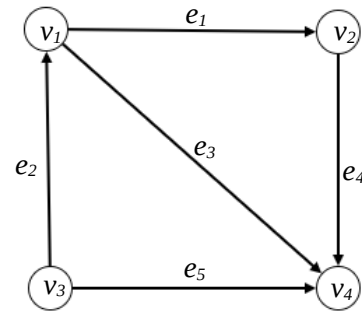


Рисунок 8.4

Заметим, что сумма элементов по строкам этой матрицы равна сумме полустепеней исхода вершин графа, а сумма по столбцам равна сумме полустепеней захода. Сумма элементов этой целочисленной матрицы совпадает с числом дуг орграфа.

**Матрицей инцидентности** орграфа  $\vec{G}$  называется матрица  $I(G) = (i_{ij})$ , где

$$i_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i - \text{начало дуги } e_j; \\ -1, & \text{если вершина } v_i - \text{конец дуги } e_j; \\ 0, & \text{если дуга } e_j \text{ не инцидентна вершине } v_i. \end{cases}$$



Например, матрице, приведенной на рис. 8.5 соответствует граф на рис. 8.6.

$$I(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 8.5

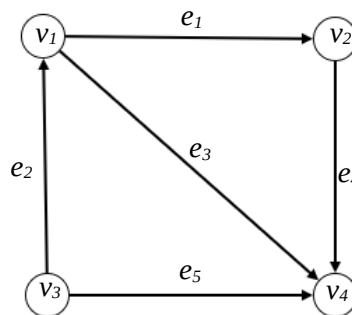


Рисунок 8.6

Одной из важных практических задач на графах является вычисление расстояний и определение маршрутов в графе. Введем некоторые необходимые определения.

**Расстоянием** от вершины  $u$  до вершины  $v$  в графе  $G$  называется длина кратчайшего маршрута из  $u$  в  $v$ . Для обозначения используем:  $\rho(u, v)$ .

Если  $G$  – связный неориентированный граф, то расстояние удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1)  $\rho(u, v) \geq 0$ ;
- 2)  $\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ ;
- 3)  $\rho(u, v) = \rho(v, u)$  (симметричность);
- 4)  $\rho(u, v) + \rho(v, l) \geq \rho(u, l)$  (неравенство треугольника).

**Эксцентриситет** (иначе **удалённость**) вершины  $v$  графа  $G$  – расстояние до максимально удаленной от нее вершины:

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} d(v, u).$$

**Радиус** графа – минимальный эксцентриситет его вершин:

$$R(G) = \min_{v \in V(G)} e(v).$$

**Диаметр** графа  $G$  – максимальный эксцентриситет его вершин:

$$D(G) = \max_{v \in V(G)} e(v).$$

**Центр** графа  $G$  образуют вершины, у которых эксцентриситет равен радиусу. Центр графа может состоять из одной, нескольких или всех вершин графа. **Периферийные** вершины имеют эксцентриситет, равный диаметру.

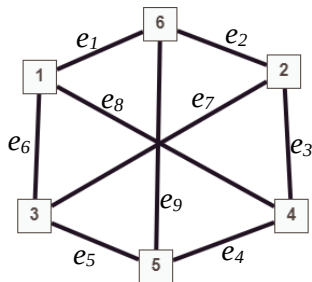
**Матрицей расстояний** графа  $G$  называют матрицу  $S$  такую, что элемент  $s_{ij}$  есть минимальное расстояние от вершины  $v_i$  к вершине  $v_j$ . Если вершина  $v_j$  не достижима из  $v_i$ , то  $s_{ij} = \infty$ .

### Задачи для самостоятельного решения

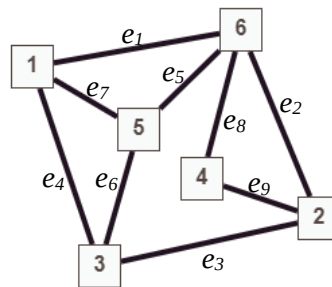
1. Для заданных неориентированных графов:
  - а) записать матрицы смежности вершин и ребер, матрицу инцидентности;

б) найти радиус, диаметр, центры и периферийные центры графа.

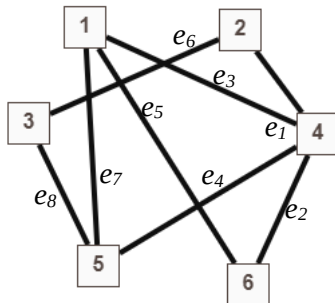
*Вариант 1*



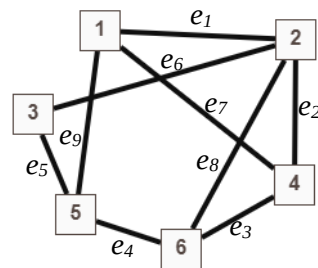
*Вариант 2*



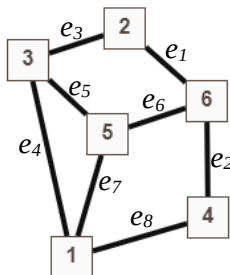
*Вариант 3*



*Вариант 4*

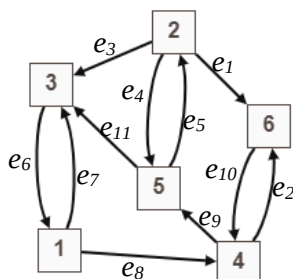


*Вариант 5*

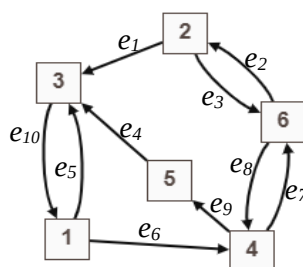


2. Выполнить пункты а) и б) из задания 1 для заданных ориентированных графов.

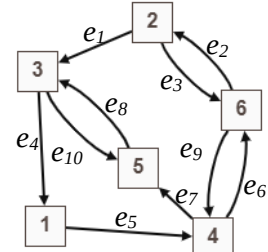
*Вариант 1*



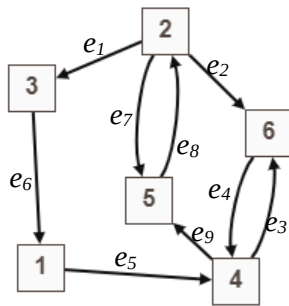
*Вариант 2*



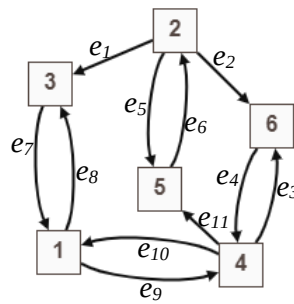
*Вариант 3*



Вариант 4



Вариант 5



## 9. ДЕРЕВЬЯ. КОД ПРИЮФЕРА

**Деревом** называется всякий связный граф, не имеющий циклов.

Удобно считать, что граф, состоящий из одной изолированной вершины, тоже является деревом. Для каждой пары вершин дерева существует единственный соединяющий их путь. Дерево не имеет петель и кратных ребер. Справедливы следующие утверждения:

1. Любое нетривиальное конечное дерево имеет хотя бы две концевые вершины и, хотя бы одно концевое ребро.

2. Дерево с  $n$  вершинами имеет  $n - 1$  ребро.

3. Число различных деревьев, которые можно построить на заданном множестве  $V$ , содержащем  $n$  вершин, равно

$$t_n = n^{n-2}.$$

4. Дерево – граф без циклов, но если любую пару несмежных вершин соединить ребром, то появится ровно один цикл.

5. Дерево – связный граф, но перестанет быть связным после удаления любого ребра.

**Корневое дерево** – дерево с выделенной вершиной, которая называется корнем дерева.

Для представления деревьев можно использовать те же приёмы, что и для представления графов общего вида – матрицы смежности и инцидентности. Наиболее компактным способом представления деревьев является код Прюфера.

### Построение кода Прюфера

1. Найти висячую вершину с минимальным номером  $i$ .

2. Записать в код Прюфера вершину, смежную с  $i$ .

3. Удалить вершину  $i$  из дерева. Если дерево не пустое, то перейти к п.1.

Совместно с задачей построения кода Прюфера стоит задача восстановления закодированного дерева.

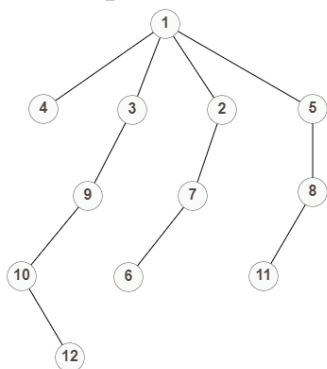
Пусть  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  – множество вершин дерева  $T$ , где  $n \geq 3$ . Опишем процедуру восстановления по коду Прюфера  $\rho(T) = (b_1, \dots, b_{n-2})$ , где  $b_i \in V$  для всех  $i = 1, \dots, n-2$ , дерева  $T$ , вершинами которого являются элементы множества  $V$ . Находим наименьший элемент  $a$  множества  $V$ ,

не содержащийся среди элементов последовательности  $\rho(T)$ , и восстанавливаем ребро  $(a_i, b_i)$  дерева. Далее удаляем  $a_i$  из  $V$  и первую компоненту  $b_i$  из последовательности  $\rho(T)$ . Продолжаем процедуру для оставшихся чисел, пока не будут удалены все компоненты последовательности  $\rho(T)$ . Два оставшихся элемента множества  $V$  — есть последнее ребро дерева  $T$ .

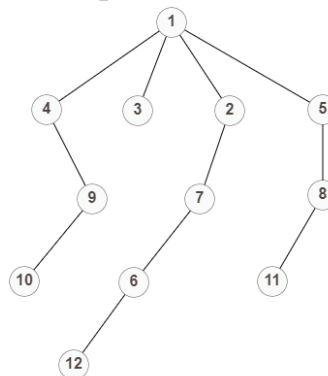
### Задачи для самостоятельного решения

1. Записать код Прюфера для дерева.

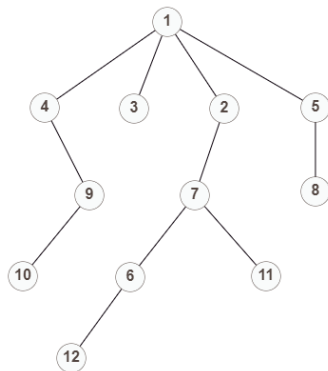
Вариант 1



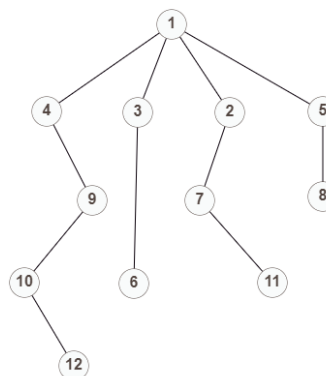
Вариант 2



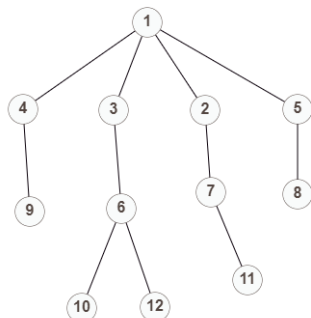
Вариант 3



Вариант 4



Вариант 5



2. По заданному коду Прюфера построить дерево.
1.  $p(T) = [5, 3, 4, 8, 7, 9, 11, 13, 9, 5, 6, 7, 11, 15]$ .
2.  $p(T) = [2, 6, 4, 8, 9, 7, 8, 12, 10, 11, 14, 15, 11, 12]$ .
3.  $p(T) = [2, 2, 6, 8, 6, 7, 7, 11, 13, 14, 11, 15, 14, 15]$ .
4.  $p(T) = [5, 6, 7, 8, 12, 9, 10, 9, 5, 6, 7, 8, 12, 16]$ .
5.  $p(T) = [2, 3, 2, 6, 9, 10, 9, 10, 14, 10, 6, 7, 8, 12]$

## 10. ПЛАНАРНОСТЬ

На практике при изготовлении микросхем возникает задача изображения схемы радиоэлектронного устройства, представляющей собой граф, на плоскости так, чтобы проводники не пересекались. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

Таким образом, возникает потребность введение понятия плоского графа.

**Плоским** называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, причем никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершине.

**Планарным** называется любой граф, изоморфный плоскому графу.

Примерами планарных графов являются все деревья и все графы, образованные вершинами и ребрами выпуклых многогранников.

Часть плоскости, ограниченная ребрами графа, любые две точки которой можно соединить кривой, не имеющей общих точек с ребрами, называется **гранью** плоского графа. **Границей** грани плоского графа называется множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани.

Заметим, что плоский граф разбивает плоскость на части (грани). Грани являются важным элементом плоского графа, именно они отличают плоский граф от планарного графа, который можно изобразить на плоскости. В теории графов допускают, что все грани равноправны. Однако, одна из них отличается от всех остальных – это внешняя грань (единственная неограниченная грань).

Рассмотрим плоский граф  $G$ , изображенный на рис. 10.1 (этот же граф изображен на рис. 10.2). Обозначим число граней через  $F(G)$ , число вершин графа – через  $V(G)$  и число ребер – через  $E(G)$ . Таким образом, для графа на рис. 10.2  $F(G) = 4$ ,  $V(G) = 4$ ,  $E(G) = 6$ .

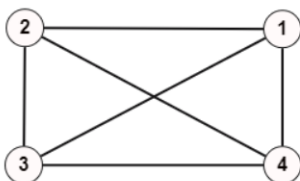


Рисунок 10.1

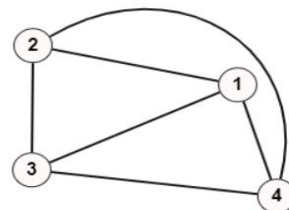


Рисунок 10.2

**Теорема (Эйлера).** Для правильно нарисованного связного плоского графа имеет место равенство

$$V(G) - E(G) + F(G) = 2.$$

Полный граф, имеющий пять вершин обозначим  $K_5$  (рис. 10.3.), полный двудольный граф с шестью вершинами обозначим  $K_{3,3}$  (рис. 10.4.). Данные графы непланарны.

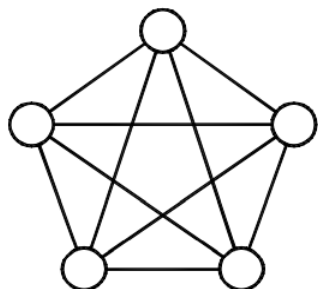


Рисунок 10.3

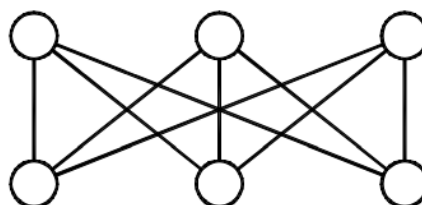


Рисунок 10.4

Рассмотрим следующие операции над графом.

**Включение вершины в ребро.** Пусть дан граф  $G(V, E)$ , в котором вершины  $u$  и  $w$  – смежны. Тогда результатом включения вершины в ребро будет граф

$$G'(V', E'): V' = V \cup v; E' = \{E \cup (v, w) \cup (v, u)\} \setminus (u, w).$$

**Удаление вершины степени 2.** Пусть дан граф  $G(V, E)$  и найдется вершина  $v \in G$ , степень которой равна 2. Пусть  $u$  и  $w$  – вершины, смежные с  $v$ . Тогда результатом удаления вершины будет граф

$$G'(V', E'): V' = V \setminus v; E' = \{E \cup (u, w)\} \setminus \{(v, w) \cup (v, u)\}.$$

Графы называются **гомеоморфными**, если графы, полученные из них включением вершин в ребро и удалением вершин степени 2, изоморфны.

Графы, изображенные на рис. 10.5 гомеоморфны.

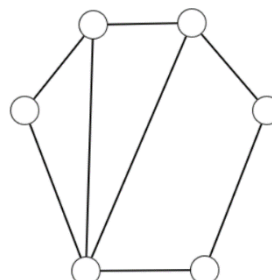
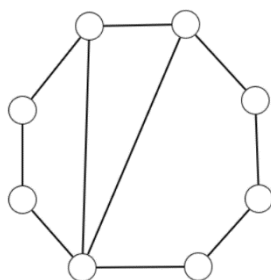


Рисунок 10.5

Два графа называются **гомеоморфными** графами, если они изоморфны с точностью до вершин степени два.

Проблема характеристики планарных графов долгое время оставалась нерешённой. В 1927 г. советский математик Л.С. Понтрягин (1908–1988) доказал (но не опубликовал) критерий планарности, который независимо от него в 1930 г. был открыт и опубликован польским математиком К. Куратовским (1896–1980).

**Теорема (Понтрягина-Куратовского).** Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных графам типов  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

Базируясь на критерии Понтрягина-Куратовского, был получен критерий планарности, основанный на понятии элементарного стягивания. **Стягивание ребра** – это операция отождествления смежных вершин  $u$  и  $v$  в графе  $G$ . На рис. 10.6 показан граф  $H$ , полученный из графа  $G$  стягиванием ребра  $\{1, 2\}$ .



Рисунок 10.6

При этом полученная вершина  $1(2)$  инцидентна тем же рёбрам, что и вершины 1 и 2 в исходном графе (кроме ребра, которое выброшено).

**Теорема.** Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа или частичного графа, стягиваемых к графу  $K_5$  или к графу  $K_{3,3}$ .

В электротехнике части цепей наносятся на одну сторону непроводящей пластины (печатная плата). Поскольку проводники не изолированы, они не могут пересекаться, и соответствующие графы должны быть планарными. Требуется знать, сколько печатных плат понадобится для формирования всей сети. С этой целью вводится понятие толщины графа.

**Толщина графа  $t(G)$**  – наименьшее число планарных графов, наложение которых образует граф  $G$ .

Заметим, что толщина произвольного планарного графа равна 1, а графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$  – 2.

Определим нижнюю оценку толщины графа  $t(G)$

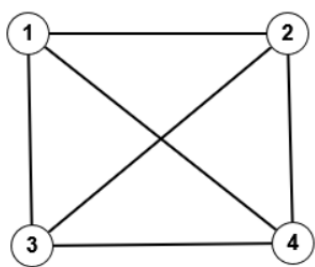
$$t(G) \geq 1 + \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^n d_i - 2}{6(n-2)} \right\rceil,$$

где  $n$  – число вершин в графе,  $d_i$  – степень  $i$ -ой вершины.

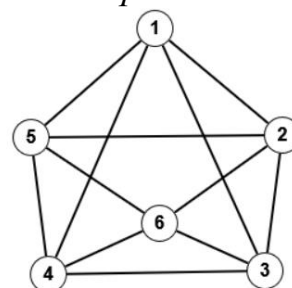
### Задачи для самостоятельного решения

1. Покажите, что граф является планарным и нарисуйте его нужным образом на плоскости.

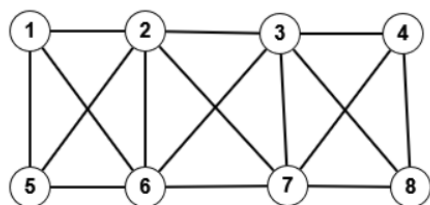
Вариант 1



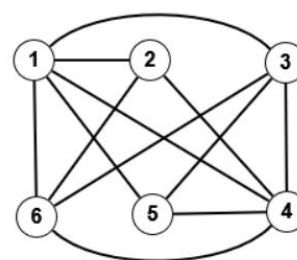
Вариант 2



Вариант 3

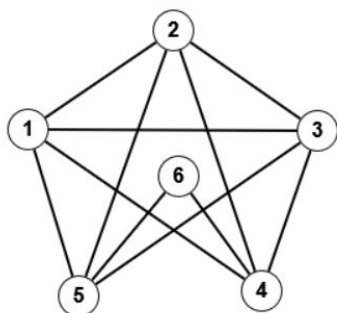


Вариант 4

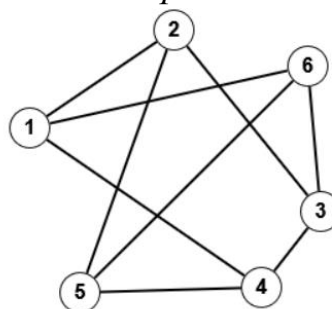


2. В заданном непланарном графе  $G$  выделите все подграфы, гомеоморфные графам типов  $K_5$  или  $K_{3,3}$ , и найдите все рёбра, удаление каждого из которых преобразует его в планарный граф:

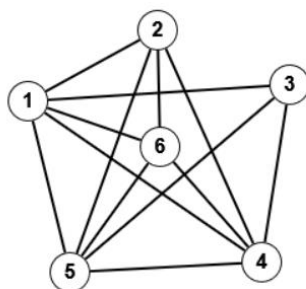
Вариант 1



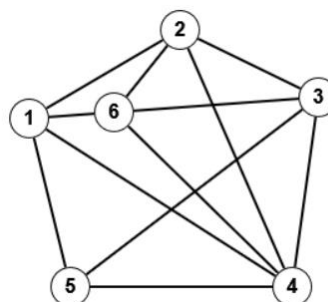
Вариант 2



Вариант 3



Вариант 4





## 11. РАСКРАСКА ГРАФОВ

Задачи раскраски вершин графа занимают важное место в теории графов. К построению раскрасок сводится целый ряд практических задач. Характерной особенностью этих задач является существование объектов, которые по каким-либо причинам не могут быть объединены в одну группу.

**Раскраска графа** – функция, которая каждой вершине ставит в соответствие некоторое натуральное число (цвет). Раскраска называется **правильной**, если смежные вершины имеют разные цвета.

**Хроматическое число**  $\chi(G)$  – минимально возможное число цветов в раскраске графа. Заметим, что для  $\chi(G)$  выполняется следующее соотношение:

$$\chi(G) \leq \max_{v \in V(G)} \{d(v)\} + 1.$$

Справедливы следующие утверждения:

1. Хроматическое число полного графа равно числу его вершин.
2. Хроматическое число графа равно двум тогда и только тогда, когда он является двудольным.
3. Хроматическое число дерева равно двум.

**Теорема о пяти красках.** Хроматическое число планарного графа не более пяти.

**Алгоритм последовательной раскраски вершин графа.**

Пусть  $G = (V, E)$  – неориентированный граф без петель и  $|V(G)| = n$ . На начальном этапе, для каждой их вершин  $v$  графа  $G$  определяем множество допустимых цветов  $S(v) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Последовательно красим вершины одну за другой, начиная с вершины  $v_1$ . При этом, из множества  $S(v)$  выбираем минимальный допустимый цвет и удаляем его из множества допустимых цветов вершин, смежных с окрашенной.

**Шаг 1.** Вершине  $v_1$  ставим в соответствие цвет 1 и удаляем его из множеств допустимых цветов вершин смежных с  $v_1$ :

$$\varphi(v_1) = 1, \forall v_i \in \Gamma(v_1) \ S(v_i) = \{2, \dots, n\}.$$

**Шаг 2.** Вершине  $v_2$  ставим в соответствие минимальный цвет 2 из  $S(v_2)$  и удаляем его из множеств допустимых цветов вершин смежных с  $v_2$ :

$$\varphi(v_2) = \min_{s \in S(v_2)} s, \forall v_i \in \Gamma(v_2) \ S(v_i) = S(v_i) \setminus \{\varphi(v_2)\}.$$

**Шаг  $k$ .** Вершине  $v_k$  ставим в соответствие минимальный цвет из  $S(v_k)$  и удаляем его из множеств допустимых цветов вершин смежных с  $v_k$ :

$$\varphi(v_k) = \min_{s \in S(v_k)} s, \forall v_i \in \Gamma(v_k) \ S(v_i) = S(v_i) \setminus \{\varphi(v_k)\}.$$

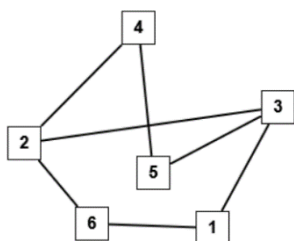
**Шаг  $n$ .** Вершине  $v_n$  ставим в соответствие минимальный цвет из  $S(v_n)$ :

$$\varphi(v_n) = \min_{s \in S(v_n)} s.$$

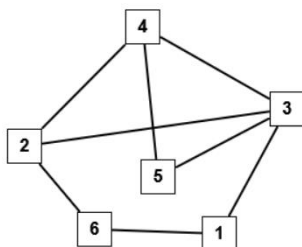
### Задачи для самостоятельного решения

1. Задать правильную раскраску вершин графа, используя алгоритм последовательного раскрашивания.

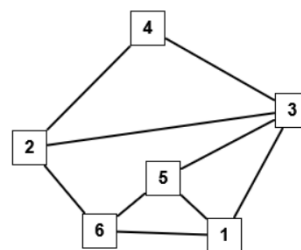
*Вариант 1*



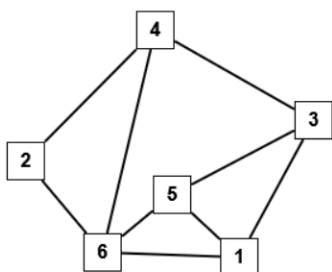
*Вариант 2*



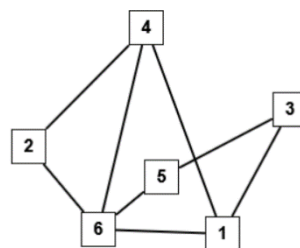
*Вариант 3*



*Вариант 4*



*Вариант 5*



## ЛИТЕРАТУРА

1. Тишин, В.В. Дискретная математика в примерах и задачах / В.В. Тишин. – Самара, 2007. – 326 с.
2. Игошин, В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов / В.И. Игошин. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 305 с.
3. Плотников, А.Д. Дискретная математика: учебное пособие / А.Д. Плотников. – 3-е издание, исправленное и дополненное – Минск: Новое знание, 2008. – 320 с.
4. Галушкина, Ю.И. Конспект лекций по дискретной математике / Ю.И. Галушкина, А.Н. Марьямов. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 176 с.
5. Андерсон, Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.
6. Носов, В.И. Элементы теории графов: учебное пособие / В.И. Носов, Т.В. Бернштейн, Н.В. Носкова, Т.В. Храмова. – Новосибирск, 2008. – 107 с.
7. Касьянов, В.Н. графы в программировании: обработка, визуализация и применение / В.Н. Касьянов, В.А. Естигнеев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
8. Зыков, А.А. Основы теории графов / А.А. Зыков. – М.: Вузовская книга, 2004. – 664 с.
9. Березина, Л.Ю. Графы и их применение: пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1979. – 143 с.
10. Домнин, Л.Н. Элементы теории графов: учеб. пособие / Л.Н. Домнин. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. – 144 с.
11. Храмова, Т.В. Лекции по теории графов. Учебное пособие / Т.В. Храмова. – Новосибирск: Сиб ГУТИ, 2011. – 98 с.
12. Мельников, О.И. Занимательные задачи по теории графов: учеб.-метод. пособие / О.И. Мельников. – Минск: Тетра Системс, 2001. – 144 с.

Учебное издание

**ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА  
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА**

Методические рекомендации

Составители:

**АЛЕКСАНДРОВИЧ** Татьяна Алиевна

**КАРАУЛОВА** Татьяна Борисовна

Технический редактор

*Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн

*В.Л. Пугач*

Подписано в печать . Формат 60х84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 1,32. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования  
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования  
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».  
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.