МАТЭМАТЫКА

УДК 517.956.3

В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ МЕТОД КОРРЕКТИРОВКИ ПРОБНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ МИНИМАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ ПРАВОЙ ЧАСТИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ф.Е. Ломовцев

Белорусский государственный университет

Предложенный ранее автором метод корректировки пробных решений одномерного волнового уравнения обобщен с прямолинейной на криволинейную первую четверть плоскости. Этот метод заключается в вычислении поправок в виде обобщенных решений однородного волнового уравнения к пробным (испытуемым) решениям, требующим завышенной гладкости правой части уравнения, с помощью корректирующей задачи Гурса. Введены новые понятия локальных и глобальных классических решений. Вычислены локальные классические решения волнового уравнения с необходимой гладкостью его правой части в криволинейной четверти плоскости. Построены два общих интеграла этого уравнения.

Цель статьи – разработка метода корректировки пробных решений волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости.

Материал и методы. *Материалом исследования служит общее ($a_1 \neq a_2$) одномерное волновое уравнение с постоянными коэффициентами a_1 и a_2 в криволинейной первой четверти плоскости. Известен метод корректировки пробных решений этого волнового уравнения в прямолинейной первой четверти плоскости.*

Результаты и их обсуждение. *Введены новые понятия локальных решений, т.е. для каждой точки в отдельности, и глобальных решений, т.е. сразу на некотором множестве, одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости с криволинейными осями координат. Разработан метод корректировки его пробных решений до классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений в криволинейной первой четверти плоскости тоже с помощью корректирующей задачи Гурса, как и в случае линейной первой четверти плоскости. Корректирующая задача Гурса позволяет определить потребность корректировки, найти корректирующие обобщенные решения однородного уравнения и им осуществить корректировку пробного решения до классического решения. В результате корректировки полученные классические решения имеют минимальную (необходимую) гладкость правой части уравнения. Для нахождения в явном виде решений смешанных задач для волнового уравнения в криволинейных областях построены его два общих интеграла.*

Заключение. *Разработан метод корректировки пробных решений волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости, которым построены его два общих интеграла для классических решений.*

Ключевые слова: *криволинейная четверть плоскости, локальное решение, метод корректировки решений, корректирующая задача Гурса, пробное решение, корректирующее решение, скорректированное решение, необходимая гладкость правой части, общий интеграл уравнения.*

IN CURVILINEAR FIRST QUARTER OF THE PLANE THE CORRECTION METHOD FOR TEST SOLUTIONS FOR THE MINIMUM SMOOTHNESS OF THE RIGHT-HAND SIDE OF THE WAVE EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS

F.E. Lomovtsev
Belarusian State University

The correction method of test solutions of the one-dimensional wave equation, proposed earlier by the author, is generalized from a rectilinear to a curvilinear first quarter of the plane. This method consists in calculating corrections in the form of generalized solutions of a homogeneous wave equation to test solutions requiring overestimated smoothness of the right-hand side of the equation using the correcting Goursat problem. New concepts of local and global classical solutions are introduced. Local classical solutions of the wave equation with the necessary smoothness of its right-hand side in the curvilinear quarter of the plane are calculated. Two general integrals of this equation are constructed.

The aim of this work is to develop a correction method for test solutions of the wave equation in the curvilinear first quarter of the plane.

Material and methods. *The material of the work is the general ($a_1 \neq a_2$) one-dimensional wave equation with constant coefficients a_1 and a_2 in the curvilinear first quarter of the plane. The correction method of test solutions of this wave equation in the rectilinear first quarter of the plane is known.*

Findings and their discussion. *New concepts of local solutions are introduced, that is, for each point separately, and of global solutions, that is, immediately on a certain set, of a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with curvilinear coordinate axes. A method is developed for correcting its test solutions to classical (twice continuously differentiable) solutions in the curvilinear first quarter of the plane, also using the correcting Goursat problem, as in the case of the linear first quarter of the plane. The correcting Goursat problem makes it possible to determine the need for correction, find correcting generalized solutions of the homogeneous equation and use them to correct the test solution to the classical solution. As a result of the correction, the obtained classical solutions have the minimum (necessary) smoothness of the right-hand side of the equation. To find explicit solutions of mixed problems for the wave equation in curvilinear domains, its two general integrals are constructed.*

Conclusion. *The correction method for test solutions of the wave equation in the curvilinear first quarter of the plane has been developed, which is used to construct its two general integrals for classical solutions.*

Key words: *curvilinear quarter of the plane, local solution, solution correction method, correcting Goursat problem, test solution, corrective solution, corrected solution, necessary smoothness of right-hand side, general integral of the equation.*

Настоящая работа посвящена вычислению локальных частных классических решений с минимальными (необходимыми) требованиями гладкости на правую часть для волнового уравнения впервые в криволинейной четверти плоскости. Ранее в линейной первой четверти плоскости это было сделано предложенным автором в исследовании [1] методом корректировки. Проблема поиска классических решений этого уравнения в криволинейной четверти плоскости для явного решения и вывода критерия корректности по Адамару линейной смешанной задачи при нестационарных первых косых производных на границе возникла в [2; 3]. Знание частного классического решения неоднородного уравнения сразу во всей криволинейной четверти плоскости сводит нахождение его общего интеграла (множества всех классических решений) к известному вычислению общего интеграла однородного уравнения. В дальнейшем с помощью нового «метода вспомогательных смешанных задач для волнового уравнения на полупрямой» из [4] так же, как и в работах [5–11], можно будет находить формулы классических решений и критерии однозначной и устойчивой везде разрешимости смешанных задач для волнового уравнения и в криволинейных областях.

Цель статьи – разработка метода корректировки пробных решений волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости.

Материал и методы. В криволинейной первой четверти плоскости $G_\infty = \{]\sigma(t),+\infty[\times]\kappa(x),+\infty[: \ t>0, \ x>0\}$ ищутся локальные классические решения уравнения

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{tx}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t)= f(x,t), \ (x,t)\in G_\infty, \qquad (1)$$

где нижними индексами функции u обозначены вторые частные производные, $a_1 > 0,\ a_2 > 0$ и $t = \kappa(x)$, $x = \sigma(t)$ – заданные функции криволинейных осей координат первой четверти плоскости. Заменой независимых переменных x и t всегда можно добиться того, чтобы $\kappa(0) = \sigma(0) = 0$, т.е. эти оси пересекались в начале координат. Четверть G_∞ может содержать точки с отрицательными значениями x или t.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Определение 1. *Функция* $u = u(x,t)$ *называется классическим решением уравнения (1) на множестве* $\Omega \subset G_\infty = \{]\sigma(t), +\infty[\times]\kappa(x), +\infty[:\ t > 0,\ x > 0\}$, *если она* $u \in C^2(\Omega)$ *и удовлетворяет этому уравнению для всех* $(x,t) \in \Omega$.

Для уравнения (1) в каждой точке $(x,t) \in G_\infty$ требуется найти локальные классические решения $F = F(x,t)$ с минимальной гладкостью правой части $f = f(x,t)$. Во-первых, если существует классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$ неоднородного уравнения (1), то его правая часть необходима быть непрерывной $f \in C(G_\infty)$. Во-вторых, согласно определению 1 функция F должна быть дважды непрерывно дифференцируемой, т.е. $F \in C^2(G_\infty)$. В-третьих, если она не дважды непрерывно дифференцируемая, то проводится ее корректировка обобщенным решением $F_0 \notin C^2(G_\infty)$ однородного уравнения (1) так, чтобы функция $F_1(x,t) = F(x,t) - F_0(x,t)$ стала дважды непрерывно дифференцируемой, т.е. $F_1 \in C^2(G_\infty)$.

Корректировка локальных пробных решений проводится посредством корректирующей задачи Гурса. В процессе корректировки нами используются функции

$$\chi_i(x) = x + (-1)^i a_i \kappa(x),\ \sigma_i(t) = a_i t + (-1)^i \sigma(t),$$

в которых $\chi_i(0) = \sigma_i(0) = 0,\ i = 1, 2.$ Если криволинейные оси и их производные

$$\kappa(x),\ \sigma(t) \in C^2[0, +\infty[,\ -(1/a_2) < \kappa'(x) < (1/a_1),\ x \ge 0,\ -a_2 < \sigma'(t) < a_1,\ t \ge 0, \tag{2}$$

то существуют их дважды непрерывно дифференцируемые обратные функции χ_i^{-1}, $\sigma_i^{-1},\ i = 1, 2.$ Действительно, из неравенств в (2) вытекает их строгое возрастание $\chi_i\,'(x) = 1 + (-1)^i a_i \kappa'(x) > 0,\ x \ge 0,\ \sigma_i\,'(t) = a_i + (-1)^i \sigma'(t) > 0,\ t \ge 0,\ i = 1, 2,$ а из гладкости осей в (2) – дважды непрерывная дифференцируемость их обратных.

Если оси $\kappa(x) < x / a_1,\ x > 0,\ \sigma(x) < a_1 t,\ t > 0,$ то криволинейная первая четверть плоскости G_∞ делится характеристикой $x = a_1 t$ на два непустых множества $G_- = \{(x,t) \in G_\infty : x > a_1 t > a_1 \kappa(x),\ x > 0\}$ и $G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : \sigma(t) \le x \le a_1 t,\ t \ge 0\}$.

Для каждого фиксированного значения $t_0 \in [\max\limits_{x_1 \le s \le x_3} \kappa(s), t[$, где $x_1 = \chi_1^{-1}(x - a_1 t)$ и $x_3 = \chi_2^{-1}(x + a_2 t)$, рассмотрим характеристический треугольник $\Delta_0 MPQ$ с вершинами $M(x,t),\ P(x - a_1(t - t_0), t_0)$, $Q(x + a_2(t - t_0), t_0) \in G_-$. Непосредственной подстановкой в уравнение (1) легко убедиться в том, что в любой точке $(x,t) \in G_-$ для всех $f \in C^1(G_-)$ его локальными классическими решениями являются функции

$$F^{(0)}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \iint\limits_{\Delta_0 MPQ} f(x,t)\,dxdt = \frac{1}{a_1 + a_2} \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{x - a_1(t-\tau)}^{x + a_2(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau. \tag{3}$$

Эти решения (3) при $t_0 > 0$ еще не встречались в учебной и научной математической литературе даже в случае линейной первой четверти плоскости.

Роль пробных локальных обобщенных решений уравнения (1) играют функции

$$F^{(0)}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{t_0}^{t} \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f\left(\sigma(\tau) + |s - \sigma(\tau)|, \tau\right) ds d\tau, \tag{4}$$

в которых интервалы изменения параметра t_0 будут указаны в теоремах 1 и 3. На G_- функции (4) совпадают с функциями (3). Функции (4) при $\sigma \equiv 0,\ t_0 = 0$ равны функции (4) в [1]. Можно показать, что если $f(x,t) \in C^1(G_\infty)$, то функции $F^{(0)}(x,t) \in C^2(G_\infty)$ и удовлетворяют уравнению (1) с правой частью $f(x,t)$ на G_∞ (см. [6, с. 28–30]).

Как и в случае линейной четверти плоскости, мы могли бы не продолжать правую часть $f \in C(G_\infty)$ четно по x на примыкающую слева четверть плоскости, потому что ниже в теоремах 1–3 берутся значения правой части f только на G_∞ так же, как и в [1] на G_∞. Ради упрощения и прозрачности изложения мы продолжаем правую часть $f \in C(G_\infty)$ четно по x относительно оси $x = \sigma(t)$ с первой криволинейной четверти $G_\infty^{(1)} = G_\infty$ на вторую криволинейную четверть плоскости $G_\infty^{(2)}$. В результате имеем непрерывную в криволинейной снизу верхней полуплоскости $Q_\infty = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > \kappa(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ функцию $\overline{f}(x,t) = f\left(\sigma(t) + |x - \sigma(t)|, t\right)$, т.е. $\overline{f}(x,t) = f(x,t)$ на $G_\infty^{(1)}$ и $\overline{f}(x,t) = f\left(2\sigma(t) - x, t\right)$ на $G_\infty^{(2)}$. Важно сразу сказать, что в корректирующей задаче Гурса во множестве классических решений $u \in C^2(Q_\infty)$ нельзя привести уравнение (1) на всей полуплоскости Q_∞ к каноническому виду одной заменой $\xi = \sigma(t) + |x - \sigma(t)| + a_2 t,\ \eta = \sigma(t) + |x - \sigma(t)| - a_1 t,$ поскольку первые частные производные от этой замены терпят разрыв на оси $x = \sigma(t)$. Поэтому мы делаем указанную замену переменных по отдельности на G_+, где нижний предел интегрирования $x - a_1(t-\tau)$ меняет знак в (4) при $\tau = \sigma_1^{-1}(a_1 t - x)$ и на G_-, где знак этого предела интегрирования $x - a_1(t-\tau) \geq \sigma(t)$ не меняется. В доказательстве теоремы 1 мы увидим, что при $\sigma(t) \neq 0,\ a_1 \neq a_2$ функции (4) теряют минимальную гладкость для f на G_+ и поэтому функции (4) на G_+ подлежат корректировке.

Результаты и их обсуждение. Для каждой точки $(x,t) \in G_+$ построим локальные классические решения уравнения (1) с минимально возможной гладкостью на f, дополнительной к $f \in C(G_\infty)$.

Теорема 1. *Пусть* $\kappa(x) < x / a_1,\ x > 0,\ \sigma(t) < a_1 t,\ t > 0,$ *верны свойства (2) и*

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \kappa(x) = 0\ \forall x \in [0, \varepsilon_0],\ \sigma(t) = 0\ \forall t \in [0, \varepsilon_0]. \tag{5}$$

Тогда в G_+ *существуют локальные классические решения уравнения (1):*

$$F_1^{(0)}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[\int_{t_0}^{t} \int_{a_1 t - x - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0}^{x + a_2(t-\tau)} f(s,\tau) ds d\tau + \int_{t_1(x)+t_0}^{t} \int_{x - a_1(t-\tau)}^{a_1 t - x - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0} f(s,\tau) ds d\tau \right],\ (x,t) \in G_+, \tag{6}$$

где $t_1(x) = 2(a_1 t - x) / (a_1 + a_2)$, *в которых параметр* t_0 *имеет значения*

$$t_0 \in [\max_{x_2 \leq s \leq x_3} \kappa(s), t^*[\ \forall\, x > 0,\ t_0 \in]\kappa(x_3), t^*]\ \forall\, x \leq 0, \tag{7}$$

где $x_2 = \chi_2^{-1}(\sigma_2(\sigma_1^{-1}(a_1 t - x))),\ x_3 = \chi_2^{-1}(x + a_2 t)$ и $t^* = (x + a_2 t) / (a_1 + a_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предполагаем существование некоторого классического решения $u^{(0)} \in C^2(G_\infty)$ уравнения (1) в G_∞. Данное предположение оказывается верным, так как ниже мы построим его классические решения. Из существования этого решения $u^{(0)} \in C^2(G_\infty)$ очевидно следует непрерывность правой части $f \in C(G_\infty)$.

Любая внутренняя точка $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in G_+$ находится строго внутри различных параллелограммов $G_0 \subset G_+$, сторонами которых служат отрезки характеристик

$$x - a_1 t = C_1,\ x + a_2 t = C_2,\ \forall\, C_1, C_2 \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[. \tag{8}$$

В этих параллелограммах G_0 уравнение (1) линейной невырожденной заменой

$$\xi = x + a_2 t, \quad \eta = x - a_1 t \tag{9}$$

с якобианом $J_1 = -(a_1 + a_2) \neq 0$ приводится к каноническому виду

$$-(a_1 + a_2)^2 \tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi, \eta) = f\left(\frac{a_1\xi + a_2\eta}{a_1 + a_2}, \frac{\xi - \eta}{a_1 + a_2}\right),\ (\xi, \eta) \in G_0, \tag{10}$$

в различных прямоугольниках $G_0 = \{(\xi, \eta) : \xi_0 \le \xi \le \xi_1,\ \eta_0 \le \eta \le \eta_1\}$.

Если непрерывна функция $f(x,t) \in C(G_\infty)$, то в силу невырожденности линейной замены (9) непрерывна функция $\tilde{f}(\xi, \eta) \in C(G_\infty)$ на образе $G_\infty = \{(\xi, \eta) : \xi > \chi_2((a_1\xi + a_2\eta)/(a_1 + a_2)),$ $\eta > -\sigma_1((\xi - \eta)/(a_1 + a_2)),\ \ -(a_1/a_2)\xi < \eta < \xi\}$ криволинейной четверти G_∞ преобразованием (9). Из существования классического решения $u^{(0)}(x,t) \in C^2(G_\infty)$ уравнения (1) и невырожденности линейной замены (9) заключаем, что уравнение (10) на образе G_+ множества G_+ имеет классическое решение

$$\tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta) = u^{(0)}\left(\frac{a_1\xi + a_2\eta}{a_1 + a_2}, \frac{\xi - \eta}{a_1 + a_2}\right) \in C^2(G_+). \tag{11}$$

Для любой непрерывной функции $\tilde{f}(\xi, \eta) \in C(G_\infty)$ существует последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\tilde{f}_n(\xi, \eta) \in C^1(G_\infty)$, равномерно сходящаяся к $\tilde{f}$ на каждом компакте $\overline{G_0}$ при $n \to \infty$. В различных прямоугольниках G_0 методом характеристик решаем задачу Гурса

$$-(a_1 + a_2)^2 (\tilde{u}_n)_{\xi,\eta}(\xi, \eta) = \tilde{f}_n(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in G_0, \tag{12}$$

$$\tilde{u}_n(\xi_0, \eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi_0, \eta),\ \eta \in [\eta_0, \eta_1],\ \ \tilde{u}_n(\xi, \eta_0) = \tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta_0),\ \xi \in [\xi_0, \xi_1],\ n = 2, 3, .. \tag{13}$$

Общие интегралы уравнений (12) – это непрерывно дифференцируемые функции

$$\tilde{u}_n(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta) + \overset{(0)}{F_n}(\xi, \eta),\ n = 2, 3, .., \tag{14}$$

где g, h – любые непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов ξ, η и функции $F_n^{(0)}$ получаются из функции $F_n^{(0)}$ вида (4) с подынтегральными функциями $f_n(\sigma(\tau)+|s-\sigma(\tau)|,\tau)$ вместо $f(\sigma(\tau)+|s-\sigma(\tau)|,\tau)$ в результате замены (9). Выше мы говорили, что для $f_n(x,t)\in C^1(G_\infty)$ решения $F_n^{(0)}(x,t)\in C^2(G_+)$ являются классическими и, следовательно, такими же будут решения $F_n^{(0)}(\xi,\eta)\in C^2(G_+)$ уравнения (12). Подставив общие интегралы (14) в согласованные условия Гурса (13), ввиду $u^{(0)}\in C^2(G_\infty)$, равенства (11), линейности и невырожденности замены (9) для этой задачи Гурса находим единственные классические решения из $C^2(G_0)$:

$$\begin{gathered}\tilde{u}_n(\xi,\eta)=\tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta_0)+\tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta)-\tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta_0)-\\ -F_n^{(0)}(\xi,\eta_0)+F_n^{(0)}(\xi_0,\eta_0)+F_n^{(0)}(\xi,\eta)-F_n^{(0)}(\xi_0,\eta)\in C^2(G_0),\ n=2,3,..\end{gathered}\tag{15}$$

Определение 2. *Задача Гурса (12), (13) называется корректирующей краевой задачей обобщенных решений уравнения (1) для минимальной гладкости его правой части f, а функции $F^{(0)}$ вида* (4) *– пробными.*

Тогда функции $\tilde{v}_n(\xi,\eta)=\tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta)-\tilde{u}_n(\xi,\eta)$, как разность классических решений, являются классическими решениями задачи Гурса:

$$-(a_1+a_2)^2(\tilde{v}_n)_{\xi\eta}(\xi,\eta)=\tilde{f}(\xi,\eta)-\tilde{f}_n(\xi,\eta),\ (\xi,\eta)\in G_0,\tag{16}$$

$$\tilde{v}_n(\xi_0,\eta)=0,\ \eta\in[\eta_0,\eta_1],\ \tilde{v}_n(\xi,\eta_0)=0,\ \xi\in[\xi_0,\xi_1],\ n=2,3,...\tag{17}$$

Умножаем уравнение (16) на сумму первых частных производных $(\tilde{v}_n)_\xi+(\tilde{v}_n)_\eta$, интегрируем результат по области $]\xi_0,\tau_1[\times]\eta_0,\tau_2[$ с помощью однородных условий Гурса (17), применяем элементарные оценки, берем супремум по $(\tau_1,\tau_2)\in[\xi_0,\xi_1]\times[\eta_0,\eta_1]$ и так же, как в [12, неравенство (2.5), с. 1020], выводим априорную оценку

$$\begin{gathered}\sup_{\eta_0<\eta<\eta_1}\int_{\xi_0}^{\xi_1}\left(\left|(\tilde{v}_n)_\xi(\xi,\eta)\right|^2+\left|\tilde{v}_n(\xi,\eta)\right|^2\right)d\xi+\\ +\sup_{\xi_0<\xi<\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\left(\left|(\tilde{v}_n)_\eta(\xi,\eta)\right|^2+\left|\tilde{v}_n(\xi,\eta)\right|^2\right)d\eta\le c_0\iint_{G_0}\left|\tilde{f}_n(\xi,\eta)-\tilde{f}(\xi,\eta)\right|^2d\xi d\eta,\end{gathered}\tag{18}$$

где постоянная $c_0>0$ не зависит от $\tilde{v}_n$, ξ, η и $n=2,3,...$

Поскольку в (18) правая часть сходится к нулю при $n\to\infty$, то левая часть тоже сходится к нулю при $n\to\infty$ и, следовательно, в силу известных непрерывных вложений пространств Соболева: $W_2^1(\xi_0,\xi_1)\subset C[\xi_0,\xi_1]$, $W_2^1(\eta_0,\eta_1)\subset C[\eta_0,\eta_1]$ последовательность $\tilde{v}_n$ равномерно сходится к нулю на G_0 при $n\to\infty$. Последнее означает равномерную сходимость $\tilde{u}_n$ к $\tilde{u}^{(0)}$ на прямоугольниках G_0 при $n\to\infty$. Поэтому из решений (15) предельным переходом при $n\to\infty$ получаем тождество

$$\begin{gathered}\tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta)=\tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta_0)+\tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta)-\tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta_0)-\\ -F^{(0)}(\xi,\eta_0)+F^{(0)}(\xi_0,\eta_0)+F^{(0)}(\xi,\eta)-F^{(0)}(\xi_0,\eta),\ (\xi,\eta)\in G_0,\end{gathered}\tag{19}$$

где функции $F^{(0)}(\xi,\eta) = F^{(0)}\big((a_1\xi + a_2\eta)/(a_1+a_2), (\xi-\eta)/(a_1+a_2)\big)$ получены из функций (4) заменой (9). Слагаемые $\tilde{u}^{(0)}(\xi,\eta_0)$ и $\tilde{u}^{(0)}(\xi_0,\eta)$ дважды непрерывно дифференцируемы соответственно по ξ и η, так как $\tilde{u}^{(0)} \in C^2(G_0)$.

1. Пусть у точки $(x,t) \in G_+$ переменная $x > 0$. Для выявления гладкости остальных слагаемых в (19) применим геометрическое представление функции (4):

$$F^{(0)}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2} \iint\limits_{MQL_0L_1} f(x,t)dxdt + \frac{1}{a_1+a_2} \iint\limits_{\Delta_0 PL_0L_1} f\big(2\sigma(t) - x, t\big)dxdt, \tag{20}$$

где криволинейные четырехугольник MQL_0L_1 и треугольник $\Delta_0 PL_0L_1$ имеют вершинами точки $M(x,t)$, $P(x-a_1(t-t_0),t_0)$, $Q(x+a_2(t-t_0),t_0)$, $L_0(\sigma(t_0),t_0)$, $L_1(\sigma(\sigma_1^{-1}(a_1t-x)),\ \sigma_1^{-1}(a_1t-x))$ для $x>0$ в плоскости $Os\tau$ (рис. 1, а).

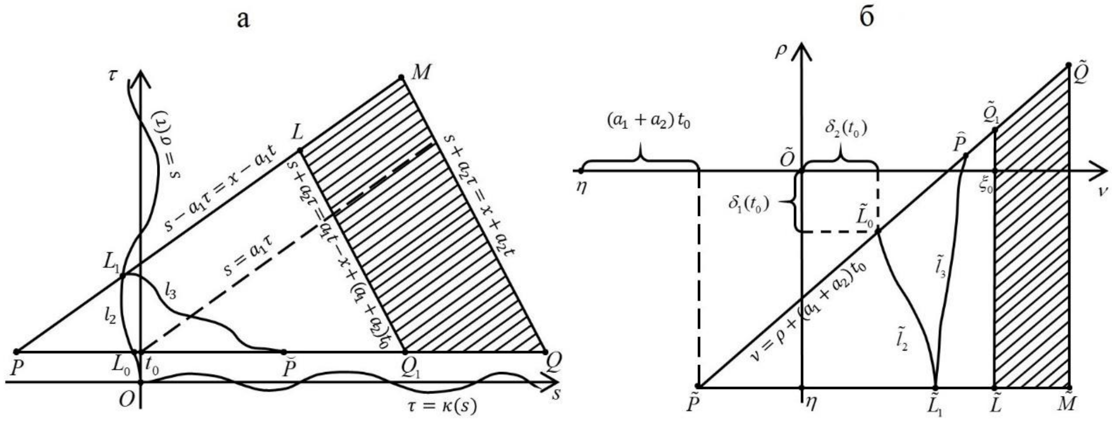

Рис. 1. **Область интегрирования при $x > 0$: а – в решении $F_1^{(0)}$ на G_+; б – в решении $F_1^{(0)}$ на G_+**

В первом двойном интеграле из (20), который обозначим через $H_1^{(0)}(x,t)$, переходим к новым переменным (9) и имеем его интегральное представление

$$H_1^{(0)}(\xi,\eta) = H_1^{(0)}\left(\frac{a_1\xi + a_2\eta}{a_1+a_2}, \frac{\xi-\eta}{a_1+a_2}\right) = \frac{-1}{(a_1+a_2)^2} \iint\limits_{MQL_0L_1} \tilde{f}(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{21}$$

где точки $O(0,0)$, $M(\xi,\eta)$, $P(\eta+(a_1+a_2)t_0,\eta)$, $Q(\xi,\xi-(a_1+a_2)t_0)$, $L_0(\sigma_2(t_0),-\sigma_1(t_0))$ и $L_1(-\sigma_2(\sigma_1^{-1}(\eta)),\eta)$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$ (рис. 1, б) являются соответственно образами указанных выше точек O, M, P, Q, L_0 и L_1 плоскости $Os\tau$ для преобразования (9).

В двойном интеграле (21) применяем уравнение канонического вида (10), двойные интегралы выражаем через повторные интегралы и получаем функцию

$$H_1^{(0)}(\xi,\eta) = \int\limits_{\eta}^{-\sigma_1(t_0)} \int\limits_{\nu_1(\rho)}^{\xi} \tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu,\rho)d\nu d\rho + \int\limits_{-\sigma_1(t_0)}^{\xi-(a_1+a_2)t_0} \int\limits_{\nu_1(\rho)}^{\xi} \tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu,\rho)d\nu d\rho, \tag{22}$$

где $\nu_1(\rho) = \rho + (a_1+a_2)t_0$ – уравнение прямой l_1. Вычисляем первые частные производные от нее и исследуем их гладкость

$$\frac{\partial H_1^{(0)}(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \tilde{u}_\xi^{(0)}(\xi,\rho)\Big|_{\rho=\xi-(a_1+a_2)t_0} - \tilde{u}_\xi^{(0)}(\xi,\eta) \in C^1(G_0),$$

$$\frac{\partial H_1^{(0)}(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \tilde{u}_\eta^{(0)}(\nu,\eta)\Big|_{\nu=\nu_1(\eta)} - \tilde{u}_\eta^{(0)}(\xi,\eta) \in C^1(G_0),$$

потому что $\tilde{u}^{(0)} \in C^2(G_0)$ ввиду (11). Таким образом, в (20) первый двойной интеграл $H_1^{(0)} \in C^2(G_0)$, так как функции $H_1^{(0)}$ и $H_1^{(0)}$ дважды непрерывно дифференцируемы одновременно ввиду невырожденности и линейности замены (9).

Изучим гладкость второго двойного интеграла в (20), который обозначим через $H_2^{(0)}(x,t)$. Если в нем перейти к новым переменным

$$y = 2\sigma(t) - x,\ z = t \tag{23}$$

с якобианом $J_2 = -1 \neq 0,$ то будем иметь некоторое классическое решение $\hat{u}^{(0)}(y,z) \in C^2(\overset{(1)}{G_\infty})$ уравнения с той же правой частью

$$u_{zz}(y,z) + (a_1 - a_2)u_{zy}(y,z) - a_1 a_2 u_{yy}(y,z) = f(y,z),\ (y,z) \in \overset{(1)}{G_\infty} = G_\infty, \tag{24}$$

потому что для $x \le \sigma(t)$ переменные $y = \sigma(t) + \sigma(t) - x \ge \sigma(t)$ и $z = t \ge \kappa(x)$ изменяются точно так же, как переменные x и t в первой криволинейной четверти G_∞. Из существования классического решения $u^{(0)} \in C^2(G_\infty)$ уравнения (1) в G_∞ следует существование классического решения $\hat{u}^{(0)} \in C^2(\overset{(1)}{G_\infty})$ уравнения (24) в $\overset{(1)}{G_\infty}$.

Замена (23) переводит треугольник $\Delta_0 PL_0L_1$ второй четверти $\overset{(2)}{G_\infty}$ плоскости $Os\tau$ переменных x и t в треугольник $\Delta_0 \breve{P}\breve{L}_0\breve{L}_1$ первой четверти G_∞ плоскости $\breve{O}\delta\zeta$ переменных y и z с вершинами $\breve{P}\big(y + a_1 z - 2\sigma(z) + \sigma(t_0) - \sigma_1(t_0),\ t_0\big),\ \breve{L}_0\big(\sigma(t_0),\ t_0\big),\ \breve{L}_1\big(\sigma(\sigma_1^{-1}(y + a_1 z - 2\sigma(z))),\ \sigma_1^{-1}(y + a_1 z - 2\sigma(z))\big).$ Эта замена переводит отрезок прямой $\tau = t_0$ для $s \in [x - a_1(t - t_0), \sigma(t_0)]$ в отрезок прямой $\zeta = t_0$ для $\delta \in [\sigma(t_0), y + a_1 z - 2\sigma(z) + \sigma(t_0) - \sigma_1(t_0)],$ кривую $s = \sigma(\tau)$ в кривую $l_2 : \delta = \sigma(\zeta)$ и прямую $s = x - a_1(t - \tau)$ в кривую $l_3 : \delta + a_1\zeta - 2\sigma(\zeta) = y + a_1 z - 2\sigma(z).$ Отметим, что ввиду четности продолжения $\overline{f}$ у точки $\breve{P}$ первая координата $y + a_1 z - 2\sigma(z) + \sigma(t_0) - \sigma_1(t_0) \ge \sigma(t_0),$ т.е. справедливо неравенство

$$y + a_1 z - 2\sigma(z) \ge \sigma_1(t_0). \tag{25}$$

Более того, из предположения $\sigma(t) < a_1 t$ для всех $t > 0$ теоремы 1 имеем, что функция $\sigma_1(t) \ge 0$ для всех $t \ge 0.$ Согласно замене (23) верны равенство и оценка

$$y + a_1 z - 2\sigma(z) = a_1 t - x \ge 0,\ (y,z) \in \overset{(1)}{G_\infty}. \tag{26}$$

Точка $\breve{L}_1$ лежит не ниже точки $\breve{L}_0$, так как для строго возрастающей функции σ_1^{-1} из неравенства (25) следует неравенство $\sigma_1^{-1}(y + a_1 z - 2\sigma(z)) \ge t_0$ для вторых координат этих точек. Неравенство (25) для первых координат точек $\breve{P}$ и $\breve{L}_0$ указывает на то, что точка $\breve{P}$ не может находиться слева от точки $\breve{L}_0.$ Из доказанного выше неравенства $\sigma_1^{-1}(y + a_1 z - 2\sigma(z)) \ge t_0$ следует, что если функция σ возрастает в окрестности точки $t_0,$ то $\sigma(\sigma_1^{-1}(y + a_1 z - 2\sigma(z))) \ge \sigma(t_0),$ т.е. точка $\breve{L}_1$ находится не левее точки $\breve{L}_0$. Если же функция σ убывает в окрестности точки t_0, то $\sigma(\sigma_1^{-1}(y+a_1z-2\sigma(z)))\le\sigma(t_0)$, т.е. точка $\breve{L}_1$ находится не правее точки $\breve{L}_0$. Треугольник $\Delta_0\breve{P}\breve{L}_0\breve{L}_1$ в плоскости $\breve{O}\delta\zeta$ переменных y,z является аналогом треугольника $\Delta OP'Q'$ в плоскости $Os\tau$ переменных x,t из [1]. Поэтому мы сочли возможным поместить треугольник $\Delta_0\breve{P}\breve{L}_0\breve{L}_1$ вместе с треугольником $\Delta_0 MPQ$ на рис. 1, а. На этом рисунке соответственно точки $\breve{L}_0, \breve{L}_1$ и L_0, L_1 совпадают. Таким образом, на рис. 1, а возможное расположение точек $\breve{P}, \breve{L}_0, \breve{L}_1$ правильное.

В результате замены (23) для второго двойного интеграла из (20) имеем

$$\breve{H}_2^{(0)}(y,z)=H_2^{(0)}\left(2\sigma(z)-y,z\right)=\frac{-1}{a_1+a_2}\iint\limits_{\Delta_0\breve{P}\breve{L}_0\breve{L}_1}f(y,z)dydz. \tag{27}$$

Теперь в этом интеграле делаем замену (9), которым уравнение (24) приводится к уравнению вида (10). При этом интеграл (27) становится интегралом

$$\overset{(0)}{H}_2(\xi,\eta)=\breve{H}_2^{(0)}\left(\frac{a_1\xi+a_2\eta}{a_1+a_2},\frac{\xi-\eta}{a_1+a_2}\right)=\frac{1}{(a_1+a_2)^2}\iint\limits_{\Delta_0 PL_0L_1}\tilde{f}(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{28}$$

где новые вершины $P\left(\frac{2a_1\xi+(a_2-a_1)\eta}{a_1+a_2}-2\sigma\left(\frac{\xi-\eta}{a_1+a_2}\right)+\sigma_2(t_0)-\sigma_1(t_0),\ \frac{2a_1\xi+(a_2-a_1)\eta}{a_1+a_2}-\right.$ $\left.-2\sigma\left(\frac{\xi-\eta}{a_1+a_2}\right)-2\sigma_1(t_0)\right)$, $L_0(\sigma_2(t_0),-\sigma_1(t_0))$ и $L_1\left(\sigma_2\left(\sigma_1^{-1}\left[\frac{2a_1\xi+(a_2-a_1)\eta}{a_1+a_2}-2\sigma\left(\frac{\xi-\eta}{a_1+a_2}\right)\right]\right),\right.$ $\left.2\sigma\left(\frac{\xi-\eta}{a_1+a_2}\right)-\frac{2a_1\xi+(a_2-a_1)\eta}{a_1+a_2}\right)$ в плоскости $O\nu\rho$ переменных ξ,η – образы вершин $\breve{P}, \breve{L}_0$ и $\breve{L}_1$ при отображении (9) (рис. 1, б). Вершины P, L_0, L_1 являются точками пересечения отрезка прямой $\tilde{l}_1:\nu_1(\rho)=\rho+(a_1+a_2)t_0$, $\nu\in[\sigma(t_0),y+a_1z-2\sigma(z)+\sigma(t_0)-\sigma_1(t_0)]=[\sigma(t_0),(2a_1\xi+(a_2-a_1)\eta)/(a_1+a_2)-2\sigma((\xi-\eta)/(a_1+a_2))+\sigma(t_0)-\sigma_1(t_0)]$ и кривых $\tilde{l}_2:\tilde{\nu}_2(\rho)$ уравнения $(a_1\nu+a_2\rho)/(a_1+a_2)=$ $=\sigma((\nu-\rho)/(a_1+a_2))$ и $\tilde{l}_3:\tilde{\nu}_3(\rho,\xi,\eta)$ уравнения $(2a_1\nu+(a_2-a_1)\rho)/(a_1+a_2)-2\sigma((\nu-\rho)/(a_1+a_2))=$ $=(2a_1\xi+(a_2-a_1)\eta)/(a_1+a_2)-2\sigma((\xi-\eta)/(a_1+a_2))$. Треугольник $\Delta_0 PL_0L_1$ в плоскости $O\nu\rho$ переменных ξ,η – аналог треугольника $\Delta OP'Q'$ из [1]. Точки L_0, L_1 совпадают соответственно с точками L_0, L_1.

Из равенства (28) с помощью уравнения (10) выводим повторные интегралы

$$\overset{(0)}{H}_2(\xi,\eta)=-\int\limits_{\varphi(\xi,\eta)}^{-\sigma_1(t_0)}\int\limits_{\nu_2(\rho)}^{\nu_3(\rho,\xi,\eta)}\tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu,\rho)d\nu d\rho-\int\limits_{-\sigma_1(t_0)}^{\psi(\xi,\eta)}\int\limits_{\nu_1(\rho)}^{\nu_3(\rho,\xi,\eta)}\tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu,\rho)d\nu d\rho, \tag{29}$$

где пределы интегрирования $\varphi(\xi,\eta)=2\sigma((\xi-\eta)/(a_1+a_2))-(2a_1\xi+(a_2-a_1)\eta)/(a_1+a_2)$, $\psi(\xi,\eta)=-\varphi(\xi,\eta)-2\sigma_1(t_0)$ и первые их частные производные $\varphi'_\xi=-\psi'_\xi$, $\varphi'_\eta=-\psi'_\eta$. Находим первые частные производные от (29) и изучаем их гладкость

$$\frac{\partial \overset{(0)}{H_2}(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \Big[\tilde{u}_{\rho}^{(0)}(\nu,\rho)\Big|_{\nu=\nu_2(\rho)}^{\nu=\nu_3(\rho,\xi,\eta)}\Big|_{\rho=\varphi(\xi,\eta)} + \tilde{u}_{\rho}^{(0)}(\nu,\rho)\Big|_{\nu=\nu_1(\rho)}^{\nu=\nu_3(\rho,\xi,\eta)}\Big|_{\rho=\psi(\xi,\eta)}\Big]\varphi'_{\xi}(\xi,\eta) - \\ - \int\limits_{\varphi(\xi,\eta)}^{\psi(\xi,\eta)} \tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu,\rho)\Big|_{\nu=\nu_3(\rho,\xi,\eta)} \frac{\partial \nu_3(\rho,\xi,\eta)}{\partial \xi} d\rho \in C(G_0), \tag{30}$$

$$\frac{\partial \overset{(0)}{H_2}(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \Big[\tilde{u}_{\rho}^{(0)}(\nu,\rho)\Big|_{\nu=\nu_2(\rho)}^{\nu=\nu_3(\rho,\xi,\eta)}\Big|_{\rho=\varphi(\xi,\eta)} + \tilde{u}_{\rho}^{(0)}(\nu,\rho)\Big|_{\nu=\nu_1(\rho)}^{\nu=\nu_3(\rho,\xi,\eta)}\Big|_{\rho=\psi(\xi,\eta)}\Big]\varphi'_{\eta}(\xi,\eta) - \\ - \int\limits_{\varphi(\xi,\eta)}^{\psi(\xi,\eta)} \tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu,\rho)\Big|_{\nu=\nu_3(\rho,\xi,\eta)} \frac{\partial \nu_3(\rho,\xi,\eta)}{\partial \eta} d\rho \in C(G_0). \tag{31}$$

Когда функция ν_3 не зависит от ρ, например, при $a_1 = a_2$ и $\sigma(t) \equiv 0$, тогда интегралы в первых производных (30) и (31) допускают интегрирование по ρ, которое потом обеспечивает еще их однократное дифференцирование по ξ и η. Если $a_1 = a_2$ и $\sigma(t) \equiv 0$, то кривая $\tilde{l}_3$ становится прямой $\nu_3 = \xi$, для которой $\partial\nu_3 / \partial\eta = 0$, интеграл в (31) даже обращается в ноль и поэтому, тем более $\partial \overset{(0)}{H_2} / \partial\eta \in C^1(G_0)$. В случаях $a_1 \neq a_2$ или $\sigma(t) \neq 0$ пробные решения $\overset{(0)}{F} \notin C^2(G_0)$ требуют корректировки. Эту корректировку функции $\overset{(0)}{F}$ в (19) можно проводить так же, как в [1].

Чтобы оценить сверху численное значение первой координаты точки P, на основании замены (23) воспользуемся равенством (26) и будем иметь величину

$$y + a_1 z - 2\sigma(z) + \sigma_2(t_0) - \sigma_1(t_0) = a_1 t - x + \sigma_2(t_0) - \sigma_1(t_0) = -\eta + \sigma_2(t_0) - \sigma_1(t_0),$$

которая не превосходит величины $-\eta + (a_1 + a_2)t_0$ ввиду неравенства $\sigma_2(t_0) - \sigma_1(t_0) \le (a_1 + a_2)t_0$, равносильного неравенству $\sigma_1(t_0) \ge 0$, так как $\sigma(t) < a_1 t,\ t > 0$. Отсюда точка P находится слева от прямой $\xi_0 = -\eta + (a_1 + a_2)t_0$. Поэтому, чтобы убедиться в том, что отрезок LQ_1 прямой $\xi_0 = -\eta + (a_1 + a_2)t_0$, где $L(-\eta + (a_1 + a_2)t_0, \eta)$, $Q_1(-\eta + (a_1 + a_2)t_0, -\eta)$, лежит справа от $\Delta_0 PL_0L_1$, достаточно показать возрастание кривой $\tilde{l}_3$ от точки L_1 до точки P (рис. 1, б). Согласно формулам частных производных неявной функции $\Phi(\nu,\rho,\xi,\eta) = 0$ кривой $\tilde{l}_3$ находим производные:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \frac{2a_1}{a_1 + a_2} - \frac{2}{a_1 + a_2}\sigma'\left(\frac{\nu - \rho}{a_1 + a_2}\right),\ \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2} + \frac{2}{a_1 + a_2}\sigma'\left(\frac{\nu - \rho}{a_1 + a_2}\right),$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\nu} = -\frac{\partial\Phi / \partial\nu}{\partial\Phi / \partial\rho} = \frac{2a_1 - 2\sigma'((\nu - \rho)/(a_1 + a_2))}{a_1 - a_2 - 2\sigma'((\nu - \rho)/(a_1 + a_2))} > 0,$$

так как производная $-a_2 < \sigma'(t) < a_1,\ t \ge 0$, по предположениям теоремы 1.

В тождестве (19) функции $\overset{(0)}{F}(\xi,\eta)$ выражаются двойными интегралами вида (21) от продолжения $\bar{\bar{f}}(\xi,\eta) = \bar{f}\big((a_1\xi + a_2\eta)/(a_1 + a_2), (\xi - \eta)/(a_1 + a_2)\big)$, но по треугольникам $\Delta_0 MPQ$, вершинами которых служат точки пересечения прямых $\nu = \xi$, $\rho = \eta$ и $\nu = \rho + (a_1 + a_2)t_0$ (рис. 1, б). Поэтому если переместить прямую $\rho = \eta$ вверх до точки Q, то треугольники $\Delta_0 MPQ$ выродятся в точку Q и, значит, в тождестве (19) при $\eta_0 = \xi - (a_1 + a_2)t_0$ и $\xi_0 = -\eta + (a_1 + a_2)t_0$ мы будем иметь

$$F^{(0)}(\xi,\eta_0)=0,\quad F^{(0)}(\xi,\eta)-F^{(0)}(\xi_0,\eta)=\frac{-1}{(a_1+a_2)^2}\iint\limits_{MLQ_1Q} f(\xi,\eta)d\xi d\eta\in C^2(G_0). \tag{32}$$

В этом двойном интеграле (32) по трапеции MLQ_1Q от $f(\xi,\eta)$ проводим обратную замену переменных к (9) и приходим к двойному интегралу по трапеции MLQ_1Q от $f(x,t)$ с новыми вершинами $L\big((a_1-a_2)(a_1t-x)/(a_1+a_2)+a_1t_0,\ 2(a_1t-x)/(a_1+a_2)+t_0\big)$ и $Q_1(a_1t-x+a_1t_0,\ t_0)$, через которые проходит прямая $s+a_2\tau=a_1t-x+(a_1+a_2)t_0$ в плоскости $Os\tau$ переменных x и t (рис. 1, а). Этот последний двойной интеграл по трапеции MLQ_1Q сводится к повторным интегралам и из (32) получаются скорректированные классические решения $F_1^{(0)}(x,t)$ вида (6) неоднородного уравнения (1) для $x>0$ в силу (11) при $u^{(0)}=\hat{u}^{(0)}\in C^2(G_\infty)$. Оценки на производные из (2) гарантируют то, что для любой точки $M(x,t)\in G_+$ характеристики $s-a_1\tau=x-a_1t,$ $s+a_2\tau=\sigma_2(\sigma_1^{-1}(a_1t-x)),$ $s+a_2\tau=x+a_2t$ пересекаются с осями $s=\sigma(\tau),$ $\tau=\kappa(s)$ лишь в одной точке. Этой же цели служат предположения (5) для точек $M(x,t)\in G_+,$ близких к началу координат.

Возможные значения параметра t_0 для каждой фиксированной точки $M(x,t)\in G_+$ с $x>0$ указаны интервалами в (7). Максимально возможным значением $t_0<t^*$ является $t^*=(x+a_2t)/(a_1+a_2)$ – значение временной координаты точки пересечения характеристик $s+a_2\tau=x+a_2t$ и $s=a_1\tau.$ Чтобы найти минимально возможные значения этого параметра, сначала проводим характеристику $s+a_2\tau=\sigma_2(\sigma_1^{-1}(a_1t-x))$ через точку L_1 до пересечения с осью $\tau=\kappa(s)$ в точке $L_2(\chi_2^{-1}(\sigma_2(\sigma_1^{-1}(a_1t-x))),\ \ \kappa(\chi_2^{-1}(\sigma_2(\sigma_1^{-1}(a_1t-x))))).$ Затем проводим характеристику $s+a_2\tau=x+a_2t$ через точку M до пересечения с осью $\tau=\kappa(s)$ в точке $L_3\big(\chi_2^{-1}(x+a_2t),\ \kappa(\chi_2^{-1}(x+a_2t))\big).$ Отсюда находим минимальное $t_0\geq t_\kappa,$ где $t_\kappa=\max\limits_{x_2\leq s\leq x_3}\kappa(s)$, $x_2=\chi_2^{-1}(\sigma_2(\sigma_1^{-1}(a_1t-x))),$ $x_3=\chi_2^{-1}(x+a_2t).$

Из вышеизложенного можно заключить, что при каждом $n=2,3,\dots$ верны тождества

$$(F_n^{(0)})_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)(F_n^{(0)})_{tx}(x,t)-a_1a_2(F_n^{(0)})_{xx}(x,t)=f_n(x,t),\ \ (x,t)\in\tilde{G}_0,$$

так как очевидно функция $F_n^{(0)}(x,t)\in C^2(G_+)$ и удовлетворяет поточечно уравнению (1) с правой частью $f_n(x,t).$ В них переходим к пределу $f_n\to f$ при $n\to\infty$ равномерно на каждом компакте $\bar{\tilde{G}}_0,$ содержащем произвольную точку $(x^{(0)},t^{(0)})\in\tilde{G}_+,$ и для $x>0$ получаем тождество

$$(F_1^{(0)})_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)(F_1^{(0)})_{tx}(x,t)-a_1a_2(F_1^{(0)})_{xx}(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\tilde{G}_+, \tag{33}$$

означающее, что функция $F_1^{(0)}$ вида (6) удовлетворяет поточечно неоднородному уравнению (1) в $\tilde{G}_+.$ Здесь $\bar{\tilde{G}}_0$ – замыкание криволинейных четырехугольников $\tilde{G}_0$ в плоскости $Oxt.$ После проведенной выше корректировки функций $F^{(0)}$ вида (4) на G_+ вместо реализованной только что подстановки (в пределе) функций $F_1^{(0)}$ вида (6) в уравнение (1) на G_+ уже можно и проще (без предела) подставить соответствующие функции $F_1^{(0)}(\xi,\eta)$ из (32) в канонический вид (10) на G_+.

2. Пусть у точки $M(x,t)\in G_+$ переменная $x\leq 0.$ Используя четное продолжение $\bar{f}$ правой части f уравнения (1) с G_∞ на верхнюю криволинейную полуплоскость Q_∞, можно существенно упростить реализованную выше (и также в работе [1]) процедуру корректировки пробных решений (4) в $G_+.$ Например, в случае $x\leq 0$ для точки $M(x,t)\in G_+$ очевидно справедливы преобразования (20)–(24), (27)–(32), проделанные выше для $x>0$ (рис. 2, а). Поскольку для правильности корректировки фактически важно только одно, чтобы прямая $\xi_0=-\eta+(a_1+a_2)t_0$ проходила справа от кривой $\tilde{l}_2,$ а не кривой $\tilde{l}_3$ (рис. 1, б) и прямой MQ (рис. 2, б).

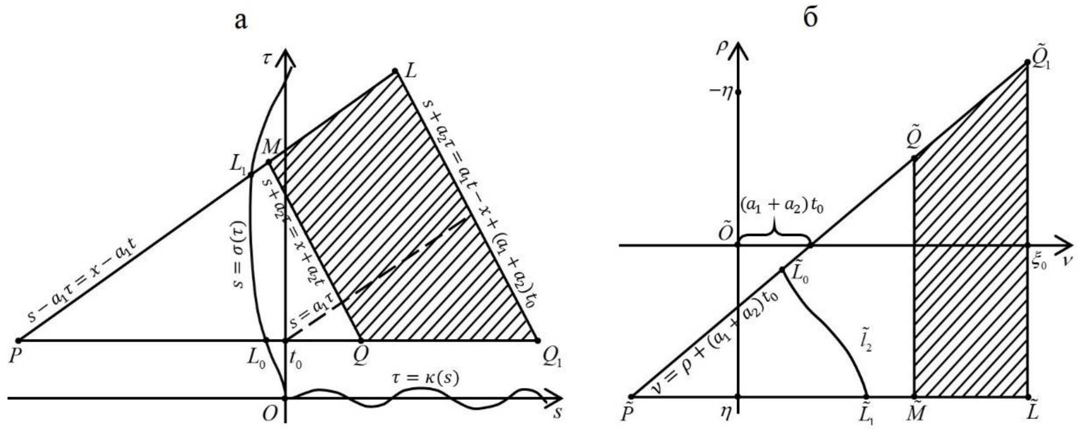

Рис. 2. **Область интегрирования при** $x \le 0$: **а – в решении** $F_1^{(0)}$ **на** G_+; **б – в решении** $F_1^{(0)}$ **на** G_+

На этом основании без детального анализа расположения треугольника $\Delta_0\, \breve{P}\breve{L}_0\breve{L}_1$ на рис. 1, а и $\Delta_0\, PL_0L_1$ на рис. 1, б, а также на рис. 2, а и рис. 2, б из (19) при $\eta_0 = \xi - (a_1 + a_2)t_0$ и $\xi_0 = -\eta + (a_1 + a_2)t_0$ для $x \le 0$ имеем корректировку (см. рис. 2, б):

$$F_1^{(0)}(\xi,\eta) = \frac{-1}{(a_1 + a_2)^2} \iint\limits_{MLQ_1Q} \tilde{f}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \in C^2(G_0).$$

Так же, как и выше, из нее обратной заменой к (9) и сведением к повторным интегралам находим классические решения (6) уравнения (1) для $x \le 0$ и аналогично выводим уравнение (33) в $\tilde{G}_+$.

Точка L находится справа от точки M в любом месте характеристики $s - a_1\tau = x - a_1 t$. Поэтому в (6) для $x \le 0$ минимальная величина параметра t_0 должна быть больше $\kappa(x_3)$, где $x_3 = \chi_2^{-1}(x + a_2 t)$ – значение пространственной переменной точки пересечения характеристики $s + a_2\tau = x + a_2 t$ с осью $\tau = \kappa(s)$. Ясно, что максимально возможная величина t_0 равна t^* из (7). Теорема 1 доказана.

Аналогично доказательству теоремы 1 в (19) берем $\eta_0 = \xi - (a_1 + a_2)t_0$, $\xi_0 = -(a_2 / a_1)\eta + (a_1 + a_2)t_0$ и получаем следующие новые классические решения уравнения (1).

Следствие 1. *Если выполняются предположения теоремы 1, то в каждой точке* $M(x,t) \in G_+$ *уравнение (1) имеет локальные классические решения*

$$F_2^{(0)}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\left[\int\limits_{t_0}^{t_2(x)+t_0} \int\limits_{a_2(t_2(x)-\tau)+(a_1+a_2)t_0}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds d\tau + \int\limits_{t_2(x)+t_0}^{t} \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds d\tau\right],\ t_2(x) = t - \frac{x}{a_1}. \qquad (34)$$

З а м е ч а н и е 1. Эти решения использовались в материалах конференции [2]. Решения (34) при $t_0 = 0$ становятся классическим решением (3) из теоремы 1 в [1].

Дополним установленную выше непрерывность $f \in C(G_\infty)$ необходимыми требованиями для дважды непрерывной дифференцируемости $F_1^{(0)}$ вида (6) в G_+.

Теорема 2. *Пусть верны предположения теоремы 1. Тогда функции (6) являются классическими решениями уравнения (1) в* G_+ *при необходимой гладкости*

$$f \in C(G_\infty), \quad \int\limits_{t_0}^{t} f\left(x + a_2(t-\tau), \tau\right) d\tau \in C^1(G_+), \qquad (35)$$

$$-\int_{t_0}^{t_1(x)+t_0} f\left(a_1 t - x - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0, \tau\right)d\tau + \int_{t_1(x)+t_0}^{t} f\left(x - a_1(t-\tau), \tau\right)d\tau \in C^1(G_+). \qquad (36)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегральные требования гладкости из (35) и (36) выводятся аналогично доказательству теоремы 2 в [1], как производные вдоль характеристик (8) уравнения (1) от функций $F_1^{(0)} \in C^2(G_+)$. Дважды непрерывно дифференцируемые, согласно теореме 1, функции (6) на G_+ должны иметь на G_+ непрерывно дифференцируемые производные вдоль этих характеристик:

$$\frac{\partial F_1^{(0)}(x,t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial F_1^{(0)}(x,t)}{\partial x} = \int_{t_0}^{t} f(x + a_2(t-\tau), \tau)d\tau,$$

$$\frac{\partial F_1^{(0)}(x,t)}{\partial t} - a_2 \frac{\partial F_1^{(0)}(x,t)}{\partial x} = \int_{t_1(x)+t_0}^{t_0} f\left(a_1 t - x - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0, \tau\right)d\tau + \int_{t_1(x)+t_0}^{t} f\left(x - a_1(t-\tau), \tau\right)d\tau.$$

Поскольку первые частные производные равны

$$\frac{\partial F_1^{(0)}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{a_1+a_2}\left[a_2\int_{t_0}^{t} f\left(x + a_2(t-\tau), \tau\right)d\tau + \right.$$

$$\left. + a_1 \int_{t_1(x)+t_0}^{t_0} f\left(a_1 t - x - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0, \tau\right)d\tau + a_1 \int_{t_1(x)+t_0}^{t} f\left(x - a_1(t-\tau), \tau\right)d\tau \right],$$

$$\frac{\partial F_1^{(0)}(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{a_1+a_2}\left[\int_{t_0}^{t} f\left(x + a_2(t-\tau), \tau\right)d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{t_1(x)+t_0}^{t_0} f\left(a_1 t - x - a_2\tau + (a_1+a_2)t_0, \tau\right)d\tau - \int_{t_1(x)+t_0}^{t} f\left(x - a_1(t-\tau), \tau\right)d\tau \right].$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

Аналогичное утверждение справедливо и для решений (34).

Следствие 2. *Пусть верны предположения теоремы 1. Тогда для классических решений (34) уравнения (1) в G_+ необходимы требования гладкости (35) и*

$$-\frac{a_2}{a_1}\int_{t_0}^{t_2(x)+t_0} f(a_2(t_2(x)-\tau) + (a_1+a_2)t_0, \tau)d\tau + \int_{t_2(x)+t_0}^{t} f(x - a_1(t-\tau), \tau)d\tau \in C^1(G_+),\ t_2(x) = t - \frac{x}{a_1}. \qquad (37)$$

З а м е ч а н и е 2. Необходимость требований (35) и (37) для решений (34) использовалась как локальных (при $t_0 \neq 0$) в [2] и как глобальных (при $t_0 = 0$) – в [6].

В теоремах 1 и 2 найдены классические решения и необходимые требования их гладкости в $G_+ \subset G_\infty$. Для построения общего интеграла уравнения (1) в G_∞ не хватает классических решений и их необходимых требований гладкости в G_-.

Теорема 3. *Пусть верны предположения теоремы 1. Тогда в каждой точке* $M(x,t)\in G_-$ *для уравнения (1) существуют локальные классические решения:*

$$F_k^{(0)}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[\int\limits_{t_0}^{t^{(k)}(x)+t_0}\int\limits_{k(x-a_1t)-a_2\tau+(a_1+a_2)t_0}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau+\int\limits_{t^{(k)}(x)+t_0}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\right],\ k\geq 1, \tag{38}$$

где $t^{(k)}(x)=(k-1)(x-a_1t)/(a_1+a_2)$, *в которых параметр* t_0 *принимает значения*

$$t_0\in[\max_{x_0\leq s\leq x_3}\kappa(s),t_k^*[,\ k>1, \tag{39}$$

где $x_0=\chi_2^{-1}(k(x-a_1t))$, $x_3=\chi_2^{-1}(x+a_2t)$, $t_k^*=[(ka_1+a_2)t-(k-1)x)]/(a_1+a_2)$. *Для этих классических решений необходима гладкость*

$$f\in C(G_-),\quad \int\limits_{t_0}^{t} f\left(x+a_2(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C^1(G_-), \tag{40}$$

$$k\int\limits_{t_0}^{t^{(k)}(x)+t_0} f\left(k(x-a_1t)-a_2\tau+(a_1+a_2)t_0,\tau\right)d\tau+\int\limits_{t^{(k)}(x)+t_0}^{t} f\left(x-a_1(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C^1(G_-). \tag{41}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В параллелограммах G_0, как окрестностях точек $(x^{(0)},t^{(0)})\in G_-$, пробные решения (4) после замены (9) становятся функциями

$$F^{(0)}(\xi,\eta)=\frac{-1}{(a_1+a_2)^2}\iint\limits_{\Delta_0 MPQ} f(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int\limits_{\eta}^{\xi-(a_1+a_2)t_0}\int\limits_{\rho+(a_1+a_2)t_0}^{\xi}\tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu,\rho)d\nu d\rho,$$

которые имеют в G_- непрерывно дифференцируемые первые частные производные:

$$\frac{\partial F^{(0)}(\xi,\eta)}{\partial\xi}=u_\xi^{(0)}(\xi,\rho)\Big|_{\rho=\xi-(a_1+a_2)t_0}-\tilde{u}_\xi^{(0)}(\xi,\eta)\in C^1(G_0),$$
$$\frac{\partial F^{(0)}(\xi,\eta)}{\partial\eta}=\tilde{u}_\eta^{(0)}(\nu,\eta)\Big|_{\nu=\eta+(a_1+a_2)t_0}-\tilde{u}_\eta^{(0)}(\xi,\eta)\in C^1(G_0).$$

Если же их корректировать, положив $\eta_0=\xi-(a_1+a_2)t_0$ и $\xi_0=k\eta+(a_1+a_2)t_0$ в (19), то получим для уравнения (10) при $k\geq 1$ новые классические решения

$$F_k^{(0)}(\xi,\eta)=F^{(0)}(\xi,\eta)-F^{(0)}(k\eta+(a_1+a_2)t_0,\eta)=\frac{-1}{(a_1+a_2)^2}\left[\iint\limits_{\Delta_0 MPQ} f(\xi,\eta)d\xi d\eta-\right.$$
$$\left.-\iint\limits_{\Delta_0 M_0P_0Q_0} f(\xi,\eta)d\xi d\eta\right]=\frac{-1}{(a_1+a_2)^2}\iint\limits_{MM_0Q_0Q} f(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int\limits_{k\eta+(a_1+a_2)t_0}^{\xi}\int\limits_{\eta}^{\nu-(a_1+a_2)t_0}\tilde{u}_{\nu\rho}^{(0)}(\nu,\rho)d\nu d\rho,\ k\geq 1, \tag{42}$$

с вершинами $M(\xi,\eta)$, $P(\eta+(a_1+a_2)t_0,\eta)$, $Q(\xi,\xi-(a_1+a_2)t_0)$, $M_0(k\eta+(a_1+a_2)t_0,\eta)$, $Q_0(k\eta+(a_1+a_2)t_0,k\eta)$ (см. рис. 3, а).

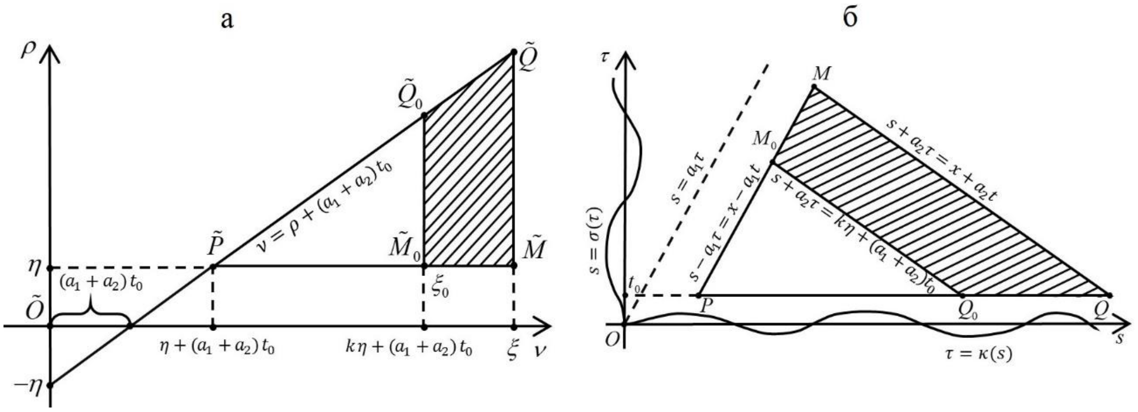

Рис. 3. **Области интегрирования решений: а – в $\tilde{F}{}^{(0)}_{k}$ на G_{-}; б – в $F_k^{(0)}$ на G_{-}**

Первые частные производные от функций (42):

$$\frac{\partial \tilde{F}^{(0)}_{k}(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \tilde{u}^{(0)}_{\xi}(\xi,\rho)\Big|_{\rho=\xi-(a_1+a_2)t_0} - \tilde{u}^{(0)}_{\xi}(\xi,\eta) \in C^1(G_0),$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^{(0)}_{k}(\xi,\eta)}{\partial \eta} = k[\tilde{u}^{(0)}_{\nu}(\nu,\eta) - \tilde{u}^{(0)}_{\nu}(\nu,k\eta)]\Big|_{\nu=k\eta+(a_1+a_2)t_0} + \tilde{u}^{(0)}_{\eta}(\nu,\eta)\Big|_{\nu=k\eta+(a_1+a_2)t_0} - \tilde{u}^{(0)}_{\eta}(\xi,\eta) \in C^1(G_0)$$

непрерывно дифференцируемы на G_{-}. Обратной невырожденной заменой к (9) из функций (42) находим двойной интеграл от f по трапеции MM_0Q_0Q с коэффициентом $1/(a_1+a_2)$, равный повторным интегралам (38). Треугольник и трапеция имеют вершины $M(x,t)$, $P(x-a_1(t-t_0),t_0)$, $M_0((a_1k+a_2)(x-a_1t)/(a_1+a_2)+a_1t_0,\, t^{(k)}(x)+t_0)$, $Q_0(k(x-a_1t)+a_1t_0,t_0)$, $Q(x+a_2(t-t_0),t_0)$ (рис. 3, б).

Первой координатой точки пересечения характеристики $s+a_2\tau=k(x-a_1t)$ с осью $\tau=\kappa(s)$ является $x_0=\chi_2^{-1}(k(x-a_1t)),\, k>1.$ Известна первая координата $x_3=\chi_2^{-1}(x+a_2t)$ точки пересечения характеристики $s+a_2\tau=x+a_2t$ с осью $\tau=\kappa(s)$. Поэтому минимально возможное значение t_0 не может превосходить максимума от функции $\kappa(s)$, указанного в (39). Максимально возможная грань t_k^* параметра t_0 из (39) является решением неравенства $k(x-a_1t)+(a_1+a_2)t_0<x+a_2t$ относительно t_0, которое обеспечивает ненулевую площадь трапеции MM_0Q_0Q (рис. 3, б).

Необходимость требования $f\in C(G_{-})$ следует из уравнения (1). Для $f\in C(G_{-})$ от решений (38) вычисляем непрерывные первые частные производные

$$\frac{\partial F_k^{(0)}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{a_1+a_2}\left[a_2\int_{t_0}^{t} f\left(x+a_2(t-\tau),\tau\right)d\tau + \right.$$

$$\left. +ka_1\int_{t_0}^{t^{(k)}(x)+t_0} f\left(k(x-a_1t)-a_2\tau+(a_1+a_2)t_0,\tau\right)d\tau + a_1\int_{t^{(k)}(x)+t_0}^{t} f\left(x-a_1(t-\tau),\tau\right)d\tau\right],$$

$$\frac{\partial F_k^{(0)}(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{a_1+a_2}\left[\int_{t_0}^{t} f\left(x+a_2(t-\tau),\tau\right)d\tau - \right.$$

$$-k\int\limits_{t_0}^{t^{(k)}(x)+t_0} f\left(k(x-a_1t)-a_2\tau+(a_1+a_2)t_0,\tau\right)d\tau-\int\limits_{t^{(k)}(x)+t_0}^{t} f\left(x-a_1(t-\tau),\tau\right)d\tau\Bigg].$$

Гладкость интегралов в (40), (41) дают производные вдоль характеристик (8):

$$\frac{\partial F_k^{(0)}(x,t)}{\partial t}+a_1\frac{\partial F_k^{(0)}(x,t)}{\partial x}=\int\limits_{t_0}^{t} f\left(x+a_2(t-\tau),\tau\right)d\tau,$$

$$\frac{\partial F_k^{(0)}(x,t)}{\partial t}-a_2\frac{\partial F_k^{(0)}(x,t)}{\partial x}=k\int\limits_{t_0}^{t^{(k)}(x)+t_0} f\left(k(x-a_1t)-a_2\tau+(a_1+a_2)t_0,\tau\right)d\tau+\int\limits_{t^{(k)}(x)+t_0}^{t} f\left(x-a_1(t-\tau),\tau\right)d\tau.$$

Обоснование теоремы 3 завершено.

Поскольку в силу доказательства теоремы 3 функции (4) и (38) одновременно являются классическими решениями уравнения (1) в G_-, то справедливо

Следствие 3. *В предположениях теоремы 1 для* $f\in C(G_-)$ *необходимые интегральные требования в (40) и (41) на* G_- *равносильны интегральным требованиям*

$$\int\limits_{t_0}^{t} f(x+(-1)^p a_p(t-\tau),\tau)d\tau\in C^1(G_-),\ p=1,\,2. \tag{43}$$

Ниже в следствии 6 нам поможет написать один общий интеграл из (46) уравнения (1) в G_∞

Следствие 4. *Пусть выполняются предположения теоремы 1. Тогда для всех* $f\in C^1(G_\infty)$ *классические решения (6) и (38) при* $k=3$ *уравнения (1) дважды непрерывно дифференцируемы на характеристике* $x=a_1t$*, т.е.*

$$\begin{gathered}\left(1-(-1)^i2\right)\int\limits_{t_0}^{\tilde t_i(x)+t_0} f\left([1-(-1)^i2](x-a_1t)-a_2\tau+(a_1+a_2)t_0,\tau\right)d\tau+\\ +\int\limits_{\tilde t_i(x)+t_0}^{t} f\left(x-a_1(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C^1(G_\infty),\ i=1,\,2,\ \tilde t_i(x)=(-1)^i\frac{2(a_1t-x)}{a_1+a_2}.\end{gathered} \tag{44}$$

В следствии 6 другой общий интеграл из (46) уравнения (1) в четверти плоскости G_∞ дает

Следствие 5. *Пусть верны предположения теоремы 1. Тогда для* $f\in C^1(G_\infty)$ *классические решения (34) и (38) при* $k=k_0=(a_2/a_1)+2$ *уравнения (1) дважды непрерывно дифференцируемы на характеристике* $x=a_1t$*, т.е.*

$$\begin{gathered}\left[1-(-1)^i(k_0-1)\right]\int\limits_{t_0}^{\hat t_i(x)+t_0} f\left(\left[1-(-1)^i(k_0-1)\right](x-a_1t)-a_2\tau+(a_1+a_2)t_0,\tau\right)d\tau+\\ +\int\limits_{\hat t_i(x)+t_0}^{t} f(x-a_1(t-\tau),\tau)d\tau\in C^1(G_\infty),\ i=1,\,2,\ \hat t_i(x)=(-1)^i\left(t-\frac{x}{a_1}\right).\end{gathered} \tag{45}$$

З а м е ч а н и е 3. Как производные вдоль характеристик $x-a_1t=C_1,\forall C_1\in\mathbb{R},$ от функций (6), (34) и (38) требования для f из (35) на G_+ и (40) на G_- сохраняют свой вид. Отсюда заключаем, что в следствиях 4 и 5 для $f\in C^1(G_\infty)$ эти требования автоматически выполняются и на $x=a_1t.$

З а м е ч а н и е 4. Требования гладкости (44) для классических решений (6) и (38) при $k=3$ и требования гладкости (45) для классических решений (34) и (38) при $k=k_0=(a_2/a_1)+2$ уравнения (1) распространяются предельным переходом по f с $f\in C^1(G_\infty)$ на непрерывные $f\in C(G_\infty)$

соответственно с необходимой гладкостью (36), (41) вида (44) при $k=3$ и (37), (41) вида (45) при $k=k_0$. Согласно следствию 3 для $f\in C(G_-)$ гладкость (40), (41) при всех $k\geq 1$ на G_- равносильна гладкости (43) на G_-. Но интегральные гладкости (44) и (45) на G_∞ не равносильны соответственно интегральным гладкостям (36) с (43) при $p=1$ и (37) с (43) при $p=1$ сразу на всем G_∞, т.е. на характеристике $x=a_1t$.

На основании вышесказанного мы имеем два множества общих интегралов уравнения (1) на G_∞.

С л е д с т в и е 6. *Пусть выполняются предположения теоремы 1, $f\in C(G_\infty)$ и верны интегральные требования гладкости (40) на G_∞ вместо G_- и (44) или (45). Тогда общим интегралом уравнения (1) в криволинейной первой четверти плоскости G_∞ во множестве классических (дважды непрерывно дифференцируемых на G_∞) решений являются соответственно функции*

$$u(x,t)=\tilde{g}(x-a_1t)+\tilde{h}(x+a_2t)+F(x,t),\quad (x,t)\in G_\infty, \tag{46}$$

где функция F равна (6) на G_+ и (38) при $k=3$ на G_- или (34) на G_+ и (38) при $k=k_0$ на G_-, а $\tilde{g}$ и $\tilde{h}$ – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции переменных ξ,η вида

$$\tilde{g}(\xi)=g(\xi)-g(0),\quad \tilde{h}(\eta)=h(\eta)+g(0)\in C^2(\mathbb{R}). \tag{47}$$

З а м е ч а н и е 5. Для упрощения решений систем дифференциальных уравнений функции (47) получены методом погружения в решения с фиксированными значениями из [9]. Функции $\tilde{g}$ и $\tilde{h}$ очевидно дважды непрерывно дифференцируемы одновременно с функциями g и h.

Заключение. Введены новые понятия локальных, т.е. для каждой точки в отдельности, и глобальных, т.е. сразу на некотором множестве, решений одномерного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости. Разработан метод корректировки его пробных решений до классических решений в криволинейной первой четверти плоскости. Метод состоит в вычислении поправки в виде обобщенных решений однородного волнового уравнения к пробным (испытуемым) решениям, требующим завышенной гладкости правой части уравнения, с помощью корректирующей задачи Гурса. В криволинейной первой четверти плоскости впервые найдены локальные классические решения одномерного волнового уравнения с постоянными коэффициентами. Эти решения имеют минимальную (необходимую) гладкость правой части уравнения. Они позволили нам построить два общих интеграла этого волнового уравнения для множества классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений с минимальной гладкостью правой части.

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ № 11, «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР 1.2.02.3.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ломовцев, Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф.Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
2. Ломовцев, Ф.Е. В криволинейной четверти плоскости смешанная задача для неоднородного волнового уравнения колебаний струны при нехарактеристической и нестационарной первой косой производной на конце / Ф.Е. Ломовцев // XXXII Воронежс. весен. матем. школа «Понтрягинские чтения – XXX»: материалы междунар. конф., Воронеж, 3–9 мая 2019 г. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. – С. 190–192.
3. Ломовцев, Ф.Е. Решение и корректность по Адамару смешанной задачи в криволинейной четверти плоскости для волнового уравнения при нехарактеристической и нестационарной первой косой производной в граничном режиме / Ф.Е. Ломовцев // Еругинские чтения – 2019: материалы XIX Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Могилев, 14–17 мая 2019 г.: в 2 ч. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 2019. – Ч. 2. – С. 25–27.
4. Ломовцев, Ф.Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны / Ф.Е. Ломовцев // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: материалы междунар. науч. конф., Минск, 7–10 дек. 2015 г.: в 2 ч. / Белорус. гос. ун-т. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.
5. Lomovtsev, F.E. Solution of a Mixed Problem with Oblique Derivatives in the Boundary Conditions for the Inhomogeneous String Vibration Equation without Continuing the Data / F.E. Lomovtsev // Differential Equation. – 2016. – Vol. 52, № 8. – Pp. 1093–1097.
6. Новиков, Е.Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косой производными: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Е.Н. Новиков; Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2017. – 25 с.

7. Ломовцев, Ф.Е. Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.В. Устилко // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2018. – № 4(101). – С. 18–28.
8. Ломовцев, Ф.Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах / Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко // Весн. Гродзенс. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 56–75.
9. Ломовцев, Ф.Е. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных / Ф.Е. Ломовцев, В.В. Лысенко // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 5–17.
10. Ломовцев, Ф.Е. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения при характеристической первой косой производной в нестационарном граничном режиме для гладких решений / Ф.Е. Ломовцев, Е.В. Устилко // Весн. Магілёўс. дзярж. ун-та імя А.А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2020. – № 2(56). – С. 21–36.
11. Ломовцев, Ф.Е. Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости / Ф.Е. Ломовцев // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2021. – Т. 11, № 1. – С. 68–82.
12. Бриш, Н.И. Задача Гурса для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка / Н.И. Бриш, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1971. – Т. 7, № 6. – С. 1017–1030.

REFERENCES

1. Lomovtsev F.E. *Zhurnal Belorus. gos. un-ta. Matematika i informatika.* [Journal of the Belarusian State University. Mathematics and information Science], 2017, 3, pp. 38–52.
2. Lomovtsev F.E. *Materialy Mezhdunar. konf.: XXXII Voronezhskaya vesenniaya metamat. shkola, Voronezh, 3–9 maya 2019 g.* [Proceedings of the Intern. conf.: XXXII Voronezh spring math. school “Pontryagin Readings-XXX”,Voronezh, May 3–9, 2019], Voronezh: Voronezh State University Publishing House, 2019, pp. 190–192.
3. Lomovtsev F.E. *Materialy XIX Mezhdunar. nauch. konf. po differnetsialnym uravneniyam, Mogilev 14–17 maya 2019 g.* [Proceedings of the XIX Intern. scientific. conf. on Differential Equations (ERUGINSKIE READING – 2019), Mogilev, May 14–17, 2019], Minsk: IM NAS Belarus, 2019, 2, pp. 25–27.
4. Lomovtsev F.E. *Materialy Mezhdunar. nauch. konf. “Shestiye bogdanovskiye cjteniya po obyknovennym differentsialnym uravneniyam, BGU 7–10 dekabria 2015 g.],* [Proceedings of the Intern. Scientific Conf. “Sixth Bogdanov Readings on Ordinary Differential Equations”, BSU, December 7–10, 2015], Minsk: IM NAS Belarus, 2015, 2, pp. 74–75.
5. Lomovtsev F.E. Solution of a Mixed Problem with Oblique Derivatives in the Boundary Conditions for the Inhomogeneous String Vibration Equation without Continuing the Data / F.E. Lomovtsev // Differential Equation, 2016, Vol. 52, № 8, pp. 1093–1097.
6. Novikov E.N. *Smeshanniye zadachi dlia uravneniya vynuzhdennykh kolebani ogranichennoi struny pri nestatsionarnykh granichnykh usloviyakh s pervoi i vtoroi kosoi proizvodnymi: avtoref. dis. … kan-ta fiz.-mat. nauk* [Mixed problems for the forced oscillation equation of a bounded string in the unsteady boundary conditions with the first and second oblique derivatives. PhD (Physics and Mathematics) Dissertation Abstract], Minsk. Institute of Mathematic of National Academy of Sciences of Belarus, 2017, 25 p.
7. Lomovtsev F.E. Ustilko E.V. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga university* [Journal of Vitebsk State University], 2018, 4(101), pp. 18–28.
8. Lomovtsev F.E., Tochko T.S. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaunaga universiteta imya Yanki Kupala, Seriya 2. Matematika. Fizika. Inpharmatika, Vylichalnaya Tekhnika i Kiravanne* [Journal of Grodno State Yanka Kupala University, 2, Mathematics. Physics. Information Science. Calculation Technology and Management], 2019, 9(2), pp. 56–75.
9. Lomovtsev F.E., Lysenko V.V. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga university* [Journal of Vitebsk State University], 2019, 3(104), pp. 5–17.
10. Lomovtsev F.E., Ustilko E.V. *Vesnik Magileuskaga dzyarzhanaga universiteta imia A.A. Kulyashova, Seriya B. Pryrodaznauchiya navuki* [Journal of Mogilev State A.A. Kuleshov University, B, Natural Sciences], 2(56), 2020, pp. 21–36.
11. Lomovtsev F.E *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaunaga universiteta imya Yanki Kupala, Seriya 2. Matematika. Fizika. Inpharmatika, Vylichalnaya Tekhnika i Kiravanne* [Journal of Grodno State Yanka Kupala University, 2, Mathematics. Physics. Information Science. Calculation Technology and Management], 2021, 11(1), pp. 68–82.
12. Brish N.I., Yurchuk N.I. *Differents. uravneniya* [Differential Equations], 1971, 7(6), pp. 1017–1030.

Поступила в редакцию 23.06.2021
Адрес для корреспонденции: e-mail: lomovcev@bsu.by – Ломовцев Ф.Е.