

Министерство образования Республики Беларусь
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М.
МАШЕРОВА»
(ВГУ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА)

УДК 517.988
Рег. № 20160435

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
_____ Е.Я. Аршанский
" ____ " _____ 202_ г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Развитие аналитических методов исследования сложных динамических систем в рамках задания «Аналитические, топологические и аппроксимационные методы исследования математических моделей, возникающих в естественных науках и экономике»

Государственная программа научных исследований на 2016–2020 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция»).

Подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем»
Задание № 1.4.02

(заключительный)

Начальник
научно-исследовательского сектора,
кандидат геолого-минералогических наук,
доцент _____ И.А. Красовская

Научный руководитель НИР
доктор физ.-мат.н., профессор _____ Ю.В. Трубников

Витебск 2021

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы,
доктор физ.-мат. наук, профессор
кафедры геометрии и математического
анализа ВГУ имени П.М. Машерова

_____ Ю.В. Трубников
(введение, все разделы, заключение)

Исполнители темы
аспирант кафедры инженерной физики

_____ М.М. Чернявский
(все разделы)

Нормоконтроль

_____ Т.В. Харкевич

РЕФЕРАТ

Отчет 106 с., 1 кн., 49 источников, 5 прил.

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО, ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС, КОРНИ ПОЛИНОМОВ, РЯД ТЕЙЛОРА

Объектом исследования являются алгебраические и матричные уравнения.

Цель работы – разработка методов точного и приближенного нахождения решений алгебраических уравнений в терминах коэффициентов полинома, а также применение полученных формул к нелинейным матричным уравнениям.

Методы исследований: аналитические методы математического и функционального анализа; численные методы теории приближений.

В результате исследований за отчетный период решены следующие задачи:

1. Проведен анализ и уточнена схема решения системы нелинейных уравнений, точное или приближенное решение которой позволяет найти экстремальный полином произвольной степени для дифференцируемой функции, определенной на отрезке вещественной прямой.
2. Проведена модификация метода Ньютона-Канторовича для приближенного нахождения решений нелинейных матричных уравнений.
3. Найдены необходимые и достаточные условия представимости полиномов четвертой и шестой степени, а также более высоких степеней в виде суперпозиции полиномов второй и третьей степени.
4. Получен простой и эффективный алгоритм приближенного представления корней алгебраического полинома произвольной степени в виде рациональной функции от коэффициентов. Для практической реализации этого алгоритма используются возможности систем компьютерной математики.
5. Получены необходимые и достаточные условия представимости

полиномов четвёртой, шестой и более высоких степеней в виде суперпозиции полиномов меньших степеней.

6. Проведена классификация и доказаны теоремы о количестве и расположении действительных корней произвольного трёхчленного алгебраического уравнения.

7. Получены точные формулы для кратных корней произвольного алгебраического полинома в виде дробно-рациональных функций от коэффициентов полинома.

Степень внедрения: имеются акты внедрения в учебный процесс. По материалам исследований успешно защищены три магистерские диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1 РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ОСНОВНЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ РАБОТЫ	7
1.1 Модификация метода Бернулли.....	7
1.2 Точные и приближенные методы решений нелинейных матричных уравнений	8
1.3 Представление полиномов в виде суперпозиции полиномов меньших степеней.....	10
1.4 Теория тринomialных полиномов.....	17
1.5 Нахождение корней полиномов с известной мультипликативной структурой	19
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	22
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	24
ПРИЛОЖЕНИЕ А	34
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	47
ПРИЛОЖЕНИЕ В	55
ПРИЛОЖЕНИЕ Г.....	76
ПРИЛОЖЕНИЕ Д.....	83

ВВЕДЕНИЕ

Подзадание «Развитие аналитических методов исследования сложных динамических систем» посвящено развитию конструктивных методов (точных и приближенных) нахождения корней алгебраических и матричных уравнений. В частности, такая постановка задачи исследования охватывает многие проблемы теории приближений.

Актуальность этого круга вопросов подтверждают многочисленные приложения.

Цель работы – разработка методов точного и приближенного нахождения решений алгебраических уравнений в терминах коэффициентов полинома, а также применение полученных формул к нелинейным матричным уравнениям.

Использовались следующие методы исследований: аналитические методы математического и функционального анализа; численные методы теории приближений.

Получены новые результаты по следующим направлениям:

- 1) модификация метода Бернулли;
- 2) точные и приближенные методы решений нелинейных матричных уравнений;
- 3) представление полиномов в виде суперпозиции полиномов меньших степеней;
- 4) теория тринomialных полиномов;
- 5) нахождение корней полиномов с известной мультипликативной структурой.

Результаты исследований опубликованы в 9-ти статьях в журналах, входящих в перечень ВАК Республики Беларусь, 39 публикаций в материалах международных и региональных научных конференций; в том числе 5 работ за рубежом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Трубников, Ю.В. Расходящиеся степенные ряды и формулы приближенного аналитического нахождения решений алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзярж. ўніверсітэта. – 2018. – № 4(101). – С. 5–17.

2. Трубников, Ю.В. Роль расходящихся степенных рядов в некоторых алгоритмах приближенного аналитического решения алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский, А.М. Воронов // Веснік Віцебскага дзярж. ўніверсітэта. – 2017. – № 4(97). – С. 29–33.

3. Чернявский, М.М. Об одном алгоритме приближённого нахождения решения алгебраического уравнения пятой степени / М.М. Чернявский, К.Л. Якуто // XI Машеровские чтения: матер. междунар. науч.-практ. конф. студ. аспирантов и молодых учёных, Витебск, 18 октября 2017 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2017. – С. 40–41.

4. Трубников, Ю.В. Применение расходящихся степенных рядов для получения формул приближенного нахождения решений алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский, А.М. Воронов // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXIII (70) Региональной науч.-практ. конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 15 февраля 2018 г. : в 2 т. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2018. – Т. 1. – С. 27–29.

5. Трубников, Ю.В. Метод приближенного аналитического нахождения корней полинома и его применение к решению краевых задач / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2018): матер. Междунар. науч. конф., Гродно, 15–18 мая 2018 г. Часть 2. – Мн. : Институт математики НАН Беларуси, 2018. – С. 109–111.

6. Якуто, К.Л. О целом положительном решении матричного уравнения

$X^n = A$ для матриц второго порядка в случае натуральных n / К.Л. Якуто // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 109–119.

7. Чернявский, М.М. Особенности метода Ньютона-Канторовича приближенного нахождения решений квадратных матричных уравнений / М.М. Чернявский // Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы IV междунар. науч.-практ. конф. студ. и магистр., Витебск, 29 апреля 2016 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – С. 23–24.

8. Якуто, К.Л. О положительном решении матричного уравнения $X^2=A$ для матриц второго порядка / К.Л. Якуто // Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы IV междунар. науч.-практ. конф. студ. и магистр., Витебск, 29 апреля 2016 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – С. 24–25.

9. Трубников, Ю.В. Применение метода Ньютона-Канторовича для численного решения квадратных матричных уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // XII Белорусская математическая конференция: материалы междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сентября 2016 г.: в 5 ч. / Институт математики НАН Беларуси; ред. С.Г. Красовский. – Минск, 2016. – Ч. 1. – С. 25–26.

10. Чернявский, М.М. Особенности метода Ньютона-Канторовича приближенного нахождения корней n -й степени из матриц / М.М. Чернявский // X Машеровские чтения: материалы Междунар. науч.-практ. конф. студ., аспирантов и молодых ученых, Витебск, 14 октября 2016. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа [и др.]. – Витебск, 2016. – С. 29–30.

11. Трубников, Ю.В. О спектре оператора $F(X)=AX+XB$ / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXII(69) Региональной науч.-практ. конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 9–10

февраля 2017 г. : в 2 т. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2017. – Т. 1 – С. 39–40.

12. Якуто, К. Л. Уравнение $X^n=A$ для матриц третьего порядка / К.Л. Якуто // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXII(69) Региональной науч.-практ. конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 9–10 февраля 2017 г. : в 2 т. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2017. – Т. 1 – С. 45–47.

13. Чернявский, М.М. Модифицированный метод Ньютона-Канторовича приближенного нахождения корней матричного полиномиального уравнения / М.М. Чернявский // Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы V междунар. науч.-практ. конф. студ. и магистр., Витебск, 21 апреля 2017 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – С. 55–56.

14. Чернявский, М.М. Метод мажорантных уравнений Л.В. Канторовича для решения матричных нелинейных уравнений / М.М. Чернявский // XI Машеровские чтения: матер. междунар. науч.-практ. конф. студ. аспирантов и молодых учёных, Витебск, 18 октября 2017 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2017. – С. 38–39.

15. Якуто, К.Л. О решении нелинейного матричного уравнения $X^2=A$ / К.Л. Якуто // XI Машеровские чтения: матер. междунар. науч.-практ. конф. студ. аспирантов и молодых учёных, Витебск, 18 октября 2017 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2017. – С. 43–45.

16. Якуто, К.Л. О целом положительном симметричном решении матричного уравнения $X^n=A$ для матриц третьего порядка / К.Л. Якуто // XI Машеровские чтения: матер. междунар. науч.-практ. конф. студ. аспирантов и молодых учёных, Витебск, 18 октября 2017 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2017. – С. 45–47.

17. Yakuto, K. On the positive integer Solution of nonlinear Equations $X^2+AX=B$ and $X^3+AX^2+BX=C$ for the second Order Matrices / K. Yakuto // The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations : Proceedings of IV

International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 6, 2017 / Vitebsk State University ; Editorial Board: I.M. Prishchepa (Editor in Chief) [and others]. – Vitebsk : Vitebsk State P.M. Masherov University, 2017. – P. 19–22.

18. Якуто, К.Л. О целых положительных решениях матричных уравнений четвертой степени для матриц второго порядка / К.Л. Якуто // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXIII (70) Региональной науч.-практ. конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 15 февраля 2018 г. : в 2 т. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2018. – Т. 1. – С. 35–37.

19. Чернявский, М.М. О справедливости неравенства между арифметическим и геометрическим средними в матричном случае / М.М. Чернявский // XII Машеровские чтения : матер. междунар. науч.-практ. конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 19 октября 2018 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2018. – С. 31–33.

20. Chernyavsky, M. Analytical solution of cubic matrix equations with commutative matrix factors of size $[2 \times 2]$ / M. Chernyavsky // The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations : Proceedings of V International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 12, 2018 / Vitebsk State University ; Editorial Board: I.M. Prishchepa (Editor in Chief) [and others]. – Vitebsk : Vitebsk State P.M. Masherov University, 2018. – P. 8–10.

21. Трубников, Ю.В. Применение аналитических методов для нахождения решений матричных полиномиальных уравнений четвертой степени с перестановочными матричными коэффициентами второго порядка / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXIV(71) регион. науч.-практ. конф. преп., научн. сотр. и аспирантов, Витебск, 14 февраля 2019 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.:

И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. – Т. 1. – С. 28–30.

22. Ашыров, А.А. Об одном классе диофантовых уравнений / А.А. Ашыров, Е.В. Шилько // Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы VII междунар. науч.-практ. конф. студ. и магистр., Витебск, 18 апреля 2019 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. – С. 3–4.

23. Чернявский, М.М. Об аналитическом нахождении корней третьей степени из матрицы второго порядка, содержащей нулевой элемент / М.М. Чернявский // XIII Машеровские чтения : матер. междунар. науч.-практ. конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 18 октября 2019 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. – С. 41–43.

24. Трубников, Ю.В. Об условиях представимости полиномов четвертой и шестой степени в виде суперпозиции полиномов второй и третьей степени / Ю.В. Трубников, В.В. Юргелас // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 1(102). – С. 17–24.

25. Zhgirov, V. On solvability of some classes of algebraic equations in radicals / V. Zhgirov // The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations : Proceedings of V International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 12, 2018 / Vitebsk State University ; Editorial Board: I.M. Prishchepa (Editor in Chief) [and others]. – Vitebsk : Vitebsk State P.M. Masherov University, 2018. – P. 25–27.

26. Жгиров, В.С. Об условиях представимости полинома восьмой степени в виде суперпозиции трех квадратичных полиномов / В.С. Жгиров // Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы VII междунар. науч.-практ. конф. студ. и магистр., Витебск, 18 апреля 2019 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. – С. 15–16.

27. Чернявский, М.М. О разрешимости в радикалах одного класса

алгебраических уравнений / М.М. Чернявский, В.С. Жгиров // Современные проблемы математики и вычислительной техники: сборник матер. XI Респ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест, 21–22 ноября 2019 г. / Брестский гос. техн. ун-т ; редкол.: В.А. Головки (гл. ред.) [и др.]. – Брест : БрГТУ, 2019. – С. 98–100.

28. Zhgirov, V. About the conditions of representability of the polynomial ninth degree in the form of superposition of the cubic polynomial from the cubic polynomial / V. Zhgirov // The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations : Proceedings of VI International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 12, 2019 / Vitebsk State University ; Editorial Board: I.M. Prishchepa (Editor in Chief) [and others]. – Vitebsk : Vitebsk State University named after P.M. Masherov, 2019. – P. 32–34.

29. Жгиров, В.С. Класс полиномов, представимых в виде суперпозиции полиномов меньших степеней / В.С. Жгиров // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях : тези доповідей XV Міжнародної наукової конференції для студентів та молодих вчених, Харків, 13–14 березня 2020 р. – Харків : ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2020. – С. 6–7.

30. Трубников, Ю.В. Локализация и нахождение решений трёхчленных алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2(54). – С. 65–85.

31. Трубников, Ю.В. О распределении корней трехчленных алгебраических уравнений произвольной степени / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2020. – № 1(106). – С. 21–33.

32. Трубников, Ю.В. О связи между корнями алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2020. – № 2(107). – С. 11–17.

33. Трубников, Ю.В. Локализация и приближенные аналитические формулы для корней алгебраического уравнения пятой степени /

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике : материалы 72-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 20 февраля 2020 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – С. 30–33.

34. Кадырова, О.С. О связи между модулем и аргументом комплексных корней трехчленных алгебраических уравнений / О.С. Кадырова // Молодость. Интеллект. Инициатива : материалы VIII Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов, Витебск, 22 апреля 2020 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – С. 16–18.

35. Чернявский, М.М. О новом методе определения числа действительных корней у трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами / М.М. Чернявский // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях : тези доповідей XV Міжнародної наукової конференції для студентів та молодих вчених, Харків, 13–14 березня 2020 р. – Харків : ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2020. – С. 10–11.

36. Чернявский, М.М. Сравнительный анализ критериев устойчивости полиномов / М.М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 3(55). – С. 31–54.

37. Жгиров, В.С. О представлении корней полинома четвертой степени в виде сумм корней квадратных полиномов / В.С. Жгиров // XIII Машеровские чтения : матер. междунар. науч.-практ. конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 18 октября 2019 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. – С. 41–43.

38. Chernyavsky, M. On the application of the Chirnhaus transform for an algebraic equation of the third degree / M. Chernyavsky // The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations : Proceedings of VI International

Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 12, 2019 / Vitebsk State University ; Editorial Board: I.M. Prishchepa (Editor in Chief) [and others]. – Vitebsk : Vitebsk State University named after P.M. Masherov, 2019. – P. 10–12.

39. Трубников, Ю.В. О линейной связи между корнями полиномов шестой и третьей степеней / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : матер. IV междунар. науч. конф., посвящ. 95-лет. со дня рожд. чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Евгения Алексеевича (Респ. Беларусь, Гродно, 17–20 дек. 2019 г.) / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: В.И. Корзюк (гл. ред.) [и др.]. Гродно : ГрГУ, 2019. – С. 122–124.

40. Чернявский, М.М. Об одном типе нелинейной связи между корнями алгебраических полиномов шестой и четвертой степеней / М.М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике : материалы 72-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 20 февраля 2020 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – С. 34–37.

41. Чернявский, М.М. Аналитическое выражение коэффициентов полинома четвертой степени через коэффициенты полинома шестой степени при наличии линейной связи между корнями данных полиномов / М.М. Чернявский // Информационные технологии : материалы 84-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 3–15 февраля 2020 г. / отв. за издание И.В. Войтов; УО БГТУ. – Минск : БГТУ, 2020. – С. 206–208.

42. Чернявский, М.М. Об одном виде факторизации алгебраических полиномов шестой и седьмой степеней / М.М. Чернявский // XIV Машеровские чтения : матер. междунар. науч.-практ. конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 21 октября 2020 г. /

Витеб. гос. ун-т ; редкол.: Е.Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – С. 64–66.

43. Кадырова, О.С. Об одном типе алгебраических уравнений шестой степени, разрешимых в радикалах / О.С. Кадырова // XIV Машеровские чтения : матер. междунар. науч.-практ. конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 21 октября 2020 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: Е.Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – С. 33–35.

44. Трубников, Ю.В. О неполной факторизации полиномов седьмой степени в случае наличия кратных корней / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Математическое и компьютерное моделирование [Электронный ресурс] : сборник материалов VIII Международной научной конференции, посвященной памяти А.Л. Иозефера (Омск, 20 ноября 2020 г.) / [отв. за вып. И.П. Бесценный]. – Электрон. дан. (3 Мб). – Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2020. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) ; 12 см. – С. 24–26.

45. Трубников, Ю.В. Точные константы в неравенствах эквивалентности для некоторых норм / Ю.В. Трубников, К.Л. Якуто // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2016. – № 4(93). – С. 5–11.

46. Трубников, Ю.В. Построение полинома наилучшего приближения для суммы функций независимых аргументов / Ю.В. Трубников, К.Л. Якуто // Веснік Віцебскага дзярж. ўніверсітэта. – 2017. – № 3(96). – С. 5–11.

47. Трубников, Ю.В. Точные константы в неравенствах эквивалентности для некоторых норм / Ю.В. Трубников, К.Л. Якуто // XII Белорусская математическая конференция: материалы междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сентября 2016 г.: в 5 ч. / Институт математики НАН Беларуси; ред. С.Г. Красовский. – Минск, 2016. – Ч. 1. – С. 26–27.

48. Трубников, Ю.В. Дифференциальный аналог итерационного процесса Вейерштрасса / Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко // XII Белорусская математическая конференция: материалы междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сентября 2016 г.: в 5 ч. / Институт математики НАН Беларуси; ред.

С.Г. Красовский. – Минск, 2016. – Ч. 1. – С. 24–25.

49. Трубников, Ю.В. Аппроксимативный метод анализа задачи двух тел / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2019): матер. Междунар. науч. конф., Могилев, 14–17 мая 2019 г. – Часть 2. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2019. – С. 97–99.