

Ю.В. Трубников, А.М. Воронов

**МЕТОД ЧЕБЫШЕВСКОЙ
АППРОКСИМАЦИИ
ПОТЕНЦИАЛА
В ЗАДАЧЕ МНОГИХ ТЕЛ**

Монография

УДК 521
ББК 22.62
Т77

Одобрено советом по научно-исследовательской и творческой работе учреждения образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова». Протокол № 8 от 14.10.2008 г.

Авторы: заведующий кафедрой общей и теоретической физики УО «ВГУ им. П.М. Машерова», доктор физико-математических наук, профессор **Ю.В. Трубников**; аспирант кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова» **А.М. Воронов**

Рецензенты:

профессор кафедры математических методов теории управления БГУ,
доктор физико-математических наук *А.В. Лебедев*; профессор кафедры физики УО «ВГТУ»,
доктор физико-математических наук *А.А. Корниенко*

В настоящей монографии авторы предложили и разработали метод чебышевской аппроксимации потенциала поля многих гравитирующих тел (что приводит к аппроксимации вторых производных от координат по времени) и соответствующей линеаризации уравнений. Разработанным методом получена система уравнений, описывающая движение планет Солнечной системы. Изложен ряд числовых примеров. Приведено сравнение с результатами наблюдений. Сформулированы и перспективы развития данного метода.

Монография окажется полезной для аспирантов и студентов механико-математических и физических факультетов, а также специалистов в области небесной механики, прикладной математики и численных методов астрономии.

УДК 521
ББК 22.62

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задача взаимодействия многих гравитирующих тел является классической задачей небесной механики. Эта задача приводит к необходимости исследования нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей в правых частях частные производные силовой функции (минус потенциала соответствующего силового поля). Такое исследование, преследующее разные цели, проводилось многими выдающимися математиками, начиная с работ Кеплера, Ньютона, Эйлера. Однако до настоящего времени не существовало приближенных формул координат движущихся тел в зависимости от времени, основанных не на разложении в ряды правых частей дифференциальных уравнений или различных модификаций метода малого параметра.

В настоящей монографии авторы предложили и разработали метод чебышевской аппроксимации потенциала поля многих гравитирующих тел (что приводит к аппроксимации вторых производных от координат по времени) и соответствующей линеаризации уравнений.

Разработанным методом получена система уравнений, описывающая движение планет Солнечной системы. Изложен ряд числовых примеров. Приведено сравнение с результатами наблюдений.

Сформулированы и перспективы развития данного метода. При расчетах движения ИСЗ в качестве потенциала Земли берутся сложные выражения, полученные в результате обработки многочисленных наблюдений. Однако в любом случае может быть найдена соответствующая чебышевская аппроксимация и построено соответствующее линейное дифференциальное уравнение. Ряд таких примеров рассмотрен авторами данной монографии.

Надеемся, что она окажется полезной для специалистов в области небесной механики, прикладной математики и численных методов астрономии, а также для аспирантов и студентов.

Г Л А В А 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ СФЕРИЧЕСКОЙ И ЭФЕМЕРИДНОЙ АСТРОНОМИИ

Изучение движения небесных объектов в Солнечной системе связано в той или иной степени с двумя проблемами астрономии – проблемой точного предвычисления положения небесного объекта в определенной *системе координат* на заданный момент времени и проблемой обработки наблюдений этого объекта. Для правильного решения подобных проблем необходимо знать не только закон движения небесного объекта, но и законы изменения ориентировки в пространстве систем координат, относительно которых происходит рассматриваемое движение, необходимо уметь найти путем подходящего *преобразования координат* такую систему отсчета, в которой уравнения движения имеют наиболее выгодную для поставленных целей форму.

С необходимостью учета изменений положения основных элементов координатных систем с временем связана также задача сравнения наблюдаемых положений объекта с теоретически предвычисленными, особенно при больших промежутках времени наблюдения. К ней тесно примыкают вопросы фиксации физических моментов наблюдений в различных *системах измерения* времени и перехода от одной системы к другой.

Наконец, совершенствование теории движения небесного объекта, сопутствующее повышению точности наблюдений, требует улучшения числовых значений параметров теории, к которым относятся *астрономические постоянные* – универсальные величины, соотношения между которыми следуют из основных законов механики неба.

1.1. Небесная сфера

Наблюдения и предвычисления положений небесных тел, а также изучение их движения всегда связаны с определенной *системой отсчета* (системой координат и системой измерения времени).

Все системы астрономических (и астродинамических) координат строятся по одному и тому же принципу: всегда выбирают *основную (фундаментальную) плоскость* и указывают на-

правление *основной (главной) оси* системы координат. Начало системы координат может быть помещено в точку наблюдения на земной поверхности, центр Земли, центр Солнца, планеты и т.д.

В основу сферической астрономии положено понятие *небесной сферы*, центр которой совпадает с началом рассматриваемой системой отсчета, а радиус может быть выбран совершенно произвольным (обычно его полагают равным единице). Таким образом, вводится понятие *топоцентрической* небесной сферы с центром в *точке наблюдения* (в *топоцентре*), *геоцентрической* небесной сферы с центром, совпадающим с *центром масс Земли*, *гелиоцентрической* небесной сферы с центром в *центре масс Солнца*, *планетоцентрической* небесной сферы с центром в *центре масс планеты*. Аналогично вводятся соответствующие различные системы координат: *топоцентрическая*, *геоцентрическая*, *гелиоцентрическая*, *планетоцентрическая* и т.д. Иногда вводят *барицентрическую* систему координат, начало которой совпадает с центром масс (барицентром) системы нескольких небесных тел (например, системы Солнце + внутренние планеты).

Необходимо всегда иметь в виду, что термином «планетоцентрическая (селено- или луноцентрическая) система координат» обозначается система, основная плоскость которой параллельна плоскости небесного экватора для Земли, и проводить ясное различие между этим термином и термином «*планетографическая (селенографическая) система координат*», относящимся к системам, основной плоскостью которых является плоскость экватора собственного осевого вращения планеты (Луны). В случае планетографических систем координат латинское название небесного тела заменяется в наименовании координат соответствующим греческим эквивалентом (например, юпитероцентрические координаты, но зенографические координаты, марсоцентрические координаты, но ареографические координаты и т.д.). Планетографические системы координат применяются большей частью для определения положений точек и деталей поверхности соответствующих планет [1].

1.2. Главнейшие круги, линии и точки небесной сферы

В любой точке земной поверхности существует основное направление, которое в *первом приближении* можно считать неизменным: это – направление *линии отвеса*, или *вертикали*, совпадающее с направлением *линии действия силы тяжести* в данном топоцентре.

Прямая, проведенная параллельно местной линии отвеса через центр T небесной сферы, пересекает небесную сферу в точке Z , расположенной над головой наблюдателя и называемой *зенитом* места наблюдения. Диаметрально противоположная точка пересечения Na называется *надиром* (рис. 1). Плоскость, проведенная перпендикулярно к вертикали ZNa через центр T , пересекает небесную сферу по большому кругу, называемому *математическим*, или *астрономическим горизонтом*. Прямая, проведенная через центр T параллельно оси суточного вращения Земли, называется *осью мира* и пересекает небесную сферу в *полюсах мира*. Полюс мира P_N , расположенный ближе всего к проекции Полярной звезды на небесной сфере, называется *северным полюсом мира*, а другой полюс мира P_S – *южным*.

Сечение небесной сферы плоскостью, проходящей через центр T перпендикулярно к оси мира $P_N P_S$, определяет большой круг AWA' – *небесный экватор*. Плоскость, проведенная через ось мира $P_N P_S$ и вертикаль ZNa , называется *плоскостью небесного меридиана* и в сечении с небесной сферой дает большой круг – *небесный меридиан*. Пересечение плоскостей небесного меридиана и астрономического горизонта определяет *полуденную линию* NS . Точкой *севера* N называется точка пересечения полуденной линии с небесной сферой, ближайшая к северному полюсу мира P_N ; диаметрально противоположная точка S есть *точка юга*. Линия пересечения (линия узлов) плоскостей математического горизонта и небесного экватора пересекает небесную сферу в *точке востока* E , расположенной слева для наблюдателя, обращенного лицом к точке юга S , и в *точке запада* W . Точки N, E, S, W определяют главные стороны (румбы) горизонта. Сечение небесной сферы любой плоскостью, проходящей через отвесную линию, определяет большой круг – *вертикал*. Вертикал, проходящий через точки востока E и запада W , называется *первым вертикалом*.

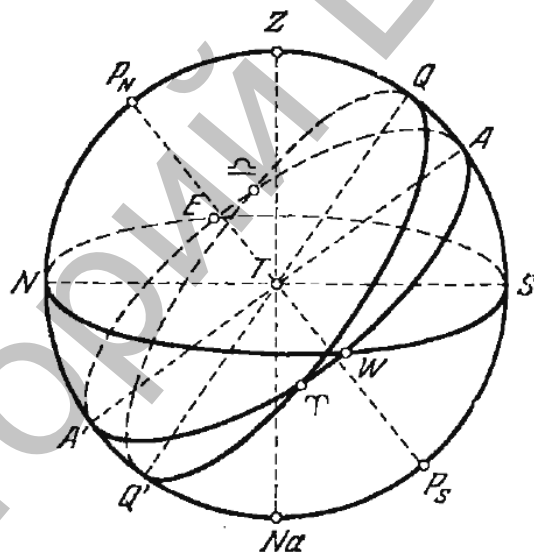


Рис. 1. Небесная сфера.

Пересечение небесной сферы с плоскостью, параллельной плоскости годового движения Солнца и проходящей через центр

T , представляет собой большой круг QQ' – эклиптику, пересекающую небесный экватор в двух *равноденственных* точках. *Равноденственная* точка, в которой Солнце при своем движении по эклиптике переходит из южного полушария в северное (относительно экватора), называется *точкой весеннего равноденствия* (*точкой весны*) и обозначается знаком зодиакального созвездия Овна Υ . Вторая равноденственная точка, в которой Солнце переходит из северного полушария небесной сферы в южное, называется *точкой осеннего равноденствия* (*точкой осени*) и обозначается знаком зодиакального созвездия Весов Ω .

Небесный меридиан пересекается с эклиптикой в *точке летнего солнцестояния* (*точке лета*), отстоящей от точки весны Υ на 90° по эклиптике в направлении движения Солнца, и в диаметрально противоположной ей *точке зимнего солнцестояния* (*точке зимы*). В своем годовом движении Солнце проходит точку весеннего равноденствия 20–22 марта, точку летнего солнцестояния 21–23 июня, точку осеннего равноденствия 23–24 сентября, точку зимнего солнцестояния 21–22 декабря.

Большой круг небесной сферы, проходящий через полюсы мира P_N и P_S и точки весны Υ и осени Ω , называется *колуром равноденствий*; большой круг, проведенный через полюсы мира и точки лета и зимы, называется *колуром солнцестояний*.

Острый угол, под которым пересекаются плоскости эклиптики и экватора, называется *наклоном эклиптики к экватору* и обозначается символом ε ; приближенно он равен $23^\circ 26'$.

Ось, проходящая через начало координат и перпендикулярная к плоскости эклиптики, пересекает небесную сферу в полюсах эклиптики. Полюс эклиптики, расположенный в северном полушарии, называется *северным*, а противоположный полюс – *южным*.

1.3. Горизонтальная система координат

Основная плоскость – плоскость астрономического горизонта, *основное направление* – направление, параллельное отвесной линии (вертикали).

Направление $T\Sigma$ на светило Σ из точки наблюдения T определяется дугой горизонта $S\Sigma' = A$, измеряемой двугранным углом между плоскостями небесного меридиана и вертикала, проходящего через Σ , и дугой вертикала $\Sigma'\Sigma = h$, измеряемой от горизонта до малого круга, проведенного параллельно плоскости горизонта через Σ и называемого *альмукантаратом*, или *кругом равных высот* (рис. 2).

Основные координаты, определяющие положение светила Σ на небесной сфере: *азимут* A , отсчитываемый от точки юга S в сторону точки запада W по дуге горизонта до вертикала светила Σ , и *высота* h (угол возвышения, угол места), отсчитываемая по дуге вертикала Σ .

Азимут A отсчитывается от 0° до 360° , высота h – от 0° до $\pm 90^\circ$ (высота зенита Z равна $+90^\circ$, высота надира Na равна -90°).

Вместо высоты h можно ввести ее дополнение до 90° , называемое *зенитным расстоянием* z и отсчитываемое по дуге вертикала Σ от точки зенита Z до альмукунтарата Σ . Зенитное расстояние z меняется от 0° до 180° , так что всегда

$$z + h = 90^\circ. \quad (1)$$

Иногда азимут A отсчитывается от точки юга S в обе стороны от 0° до $\pm 180^\circ$; тогда различают *западные* (положительные) и *восточные* (отрицательные) азимуты. При решении геодезических и навигационных задач принято вести отсчеты азимутов A от точки севера N . Расстояние от наблюдателя T до объекта Σ по прямой $T\Sigma$ называют *наклонной дальностью* и обозначают символом ρ (иногда ρ_h).

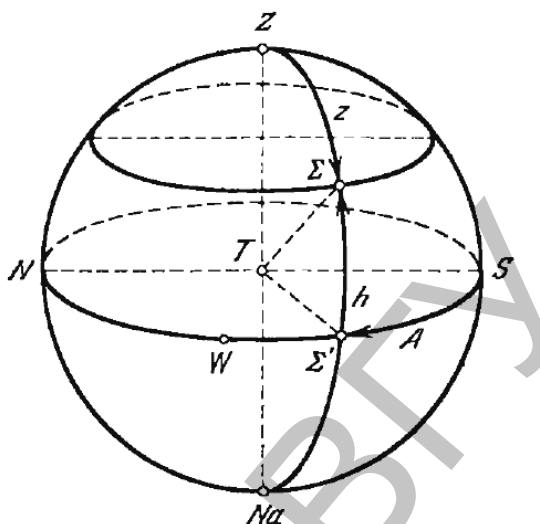


Рис. 2. Горизонтальная система сферических координат.

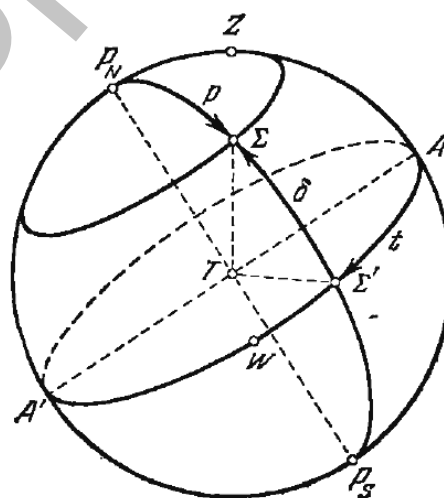


Рис. 3. Первая экваториальная система сферических координат.

1.4. Экваториальные системы координат

1) Первая экваториальная система координат.

Основная плоскость – плоскость небесного экватора (положение в пространстве плоскости экватора с течением времени изменяется; поэтому всегда указывается *эпоха* – момент времени, которому соответствует принятое в системе координат положение

ние плоскости экватора, например, широко распространена система координат с экватором и равноденствием эпохи 1950), *основное направление* – направление оси, проведенной из начала координат в южную точку экватора. Большой круг, проходящий через ось мира $P_N P_S$ и светило Σ , называется *часовым кругом*, или *кругом склонений*. Направление $T\Sigma$ из точки T – центра небесной сферы, например, топоцентрической – на Σ определяется дугой $A\Sigma' = t$ экватора, измеряемой двугранным углом между плоскостями небесного меридиана и круга склонений, и дугой $\Sigma\Sigma' = \delta$ круга склонений, измеряемой от экватора до малого круга, проведенного через Σ параллельно плоскости небесного экватора и называемого *суточной (небесной) параллелью* светила Σ (рис. 3).

Таким образом, светило Σ на небесной сфере определяется часовым углом t , отсчитываемым от южной точки экватора A в сторону точки запада W по дуге экватора до круга склонений светила Σ , и склонением δ , отсчитываемым по дуге круга склонений от экватора до суточной параллели.

Часовой угол t отсчитывается от 0^h до 24^h (т.е. от 0° до 360°).

Наряду с радианной и градусной мерой дуг и углов в астрономии принята временная (часовая) мера, т.е. некоторые угловые величины измеряются в часах (h), минутах (m), секундах времени (s). Указанные системы измерения углов и дуг связаны между собой следующими числовыми соотношениями:

$$\begin{aligned} 24^h &= 360^\circ = 2\pi \text{ рад.}, \\ 1^h &= 15^\circ = \pi/12, \quad 1^\circ = 4^m = \pi/180, \\ 1^m &= 15' = \pi/720, \quad 1' = 4^s = \pi/10800, \\ 1^s &= 15'' = \pi/43200, \quad 1'' = 0^s,666\dots = \pi/648000. \end{aligned}$$

Кроме того, можно встретить десятичное подразделение полной окружности на 400 равных частей, каждая из которых носит название *града* (g). Каждый градус в свою очередь подразделяется на 100 *десятичных минут* ($'$ или s), каждая десятичная минута – на 100 десятичных секунд ($''$ или ss).

В некоторых работах углы выражаются в долях полной окружности – в *оборотах* (r), т.е. $1^r = 360^\circ$.

Склонение δ – от 0° до $\pm 90^\circ$; склонение северного полюса мира P_N равно $+90^\circ$, склонение южного полюса мира P_S равно -90° . Вместо склонения δ иногда вводят его дополнение до 90° , называемое *полярным расстоянием* p , отсчитываемое по дуге круга склонений от северного полюса мира P_N до суточной па-

раллели светила Σ . Полярное расстояние p изменяется от 0° до 180° , так что всегда

$$p + \delta = 90^\circ. \quad (2)$$

Угловые величины $t, \delta(t, p)$ составляют *первую экваториальную* систему координат. Расстояние по прямой $T\Sigma$ от начала координат T до объекта Σ называется радиусом-вектором объекта Σ и обозначается через r . В топоцентрической системе координат радиус-вектор и наклонная дальность совпадают.

В старой астрономической литературе можно встретить также обозначение NPD, относящееся к этой же величине p и означающее *северное полярное расстояние* (North Polar Distance).

2) Вторая экваториальная система координат.

Основная плоскость – плоскость небесного экватора, *основное направление* – направление оси, проведенной из начала координат в точку весеннего равноденствия Υ (следует иметь в виду, что положения плоскости экватора и точки весеннего равноденствия Υ с течением времени меняются, поэтому для определенности всегда указывают *эпоху*, т.е. момент времени, которой соответствуют принятые положения плоскости экватора и точки весеннего равноденствия; например, экватор и равноденствие эпохи 2000); таким образом, точка весны Υ является началом отсчета углов по дуге экватора. Направление $T\Sigma$ определяется дугой экватора $\Upsilon\Sigma'$, отсчитываемой от точки весны Υ до круга склонений светила Σ в направлении, противоположном суточному вращению небесной сферы, и дугой круга склонений $\Sigma\Sigma'$, т.е. склонением δ светила Σ . Дуга экватора $\Upsilon\Sigma'$ называется *прямым восхождением* светила Σ и обозначается α (рис. 4).

Прямое восхождение α измеряется двугранным углом между плоскостями кругов склонений точки весны Υ и светила Σ и отсчитывается по дуге экватора против часовой стрелки, если смотреть на небесную сферу с северного полюса от 0^h до 24^h .

Угловые величины $\alpha, \delta(\alpha, p)$ составляют вторую экваториальную систему координат, которая не зависит от суточного вращения небесной сферы.

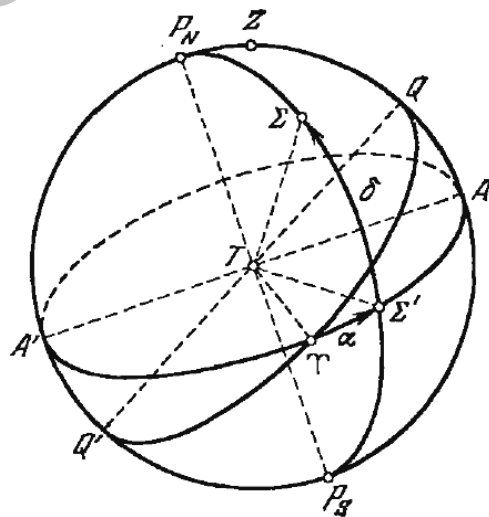


Рис. 4. Вторая экваториальная система сферических координат.

Расстояние по прямой $T\Sigma$ от начала координат T до светила Σ называется *радиусом-вектором* объекта Σ и обозначается r . В топоцентрической системе координат радиус-вектор совпадает с наклонной дальностью.

1.5. Эклиптическая система координат

Основная плоскость – плоскость эклиптики, *основная ось* отсчета – прямая, проведенная из начала координат в точку весеннего равноденствия Υ (положение плоскости эклиптики и точки весеннего равноденствия Υ с течением времени меняется, поэтому всегда указывают *эпоху*, которой соответствуют принятые положения эклиптики и точки весны, например, эклиптика и равноденствие эпохи 2000). Начало эклиптической системы координат обычно помещают в центре масс Солнца S или в центре масс земли T (рис. 5).

Большой круг, проведенный через полюсы эклиптики Π и Π' и светило Σ , называется *кругом широт*.

Направление SE в эклиптической системе координат определяется дугой эклиптики $\Upsilon\Sigma' = \lambda$, отсчитываемой от точки весны Υ против часовой стрелки (для наблюдателя на северном полюсе эклиптики Π) до круга широт светила Σ , и дугой круга широт $\Sigma'\Sigma = \beta$, отсчитываемой от эклиптики до Σ . Дуга эклиптики $\Upsilon\Sigma'$ определяет *долготу*, или *эклиптическую долготу* λ светила Σ , отсчитываемую в указанном направлении от 0° до 360° (иногда обозначается L, l); дуга круга широт $\Sigma'\Sigma$ определяет *эклиптическую широту*, или *широту* β , отсчитываемую от 0° до $\pm 90^\circ$ (положительна в сторону северного полюса эклиптики Π), обозначаемую иногда B, b . Расстояние $S\Sigma$ называется *радиусом-вектором* объекта Σ (*гелиоцентрическим* или *геоцентрическим* в зависимости от того, принят ли в качестве начала координат центр масс Солнца или центр масс Земли).

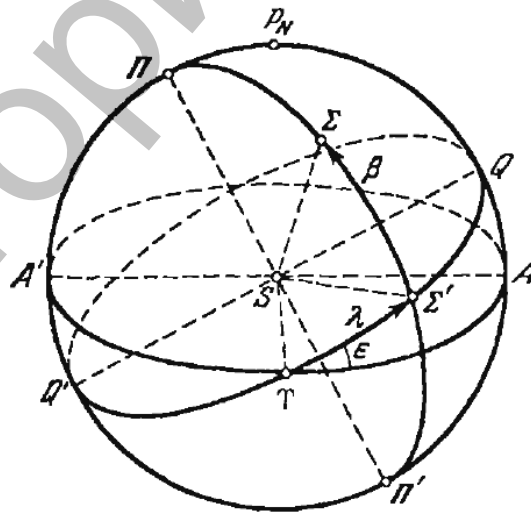


Рис. 5. Эклиптическая система сферических координат.

Эклиптическая система координат удобна при рассмотрении движения тел Солнечной системы. Геоцентрические эклиптические координаты применяются в настоящее время для Солнца и Луны.

1.6. Галактическая система координат

Основная плоскость – плоскость Галактики (Млечного Пути), называемая *плоскостью галактического экватора*. Положение галактического экватора (на рис. 6 он обозначен через MM') определяется долготой восходящего узла N и наклоном к экватору I и известно лишь приближенно; поэтому галактические координаты светил определяются с точностью до $\pm 0^{\circ},01$.

Одной координатой при этом является галактическая широта b , а другой – галактическая долгота l .

Галактической широтой b светила называется дуга круга галактической широты от эклиптики до светила, или угол между плоскостью галактического экватора и направлением на светило. Галактические широты отсчитываются в пределах от 0° до $+90^{\circ}$ к северному галактическому полюсу и от 0° до -90° к южному галактическому полюсу (рис. 6).

Галактической долготой l светила называется дуга галактического экватора от точки начала отсчета C до круга галактической широты светила, или угол между направлением на точку начала отсчета C и плоскостью круга галактической широты светила. Галактические долготы отсчитываются против часовой стрелки, если смотреть с северного галактического полюса, то есть к востоку от точки начала отсчета C в пределах от 0° до 360° .

Рассмотрим две эпохи: 1950 и 2000.

За основную точку отсчета галактических долгот l в эпоху 1950 принимают точку с координатами

$$\alpha = 18^h 40^m, \quad \delta = 0^{\circ}$$

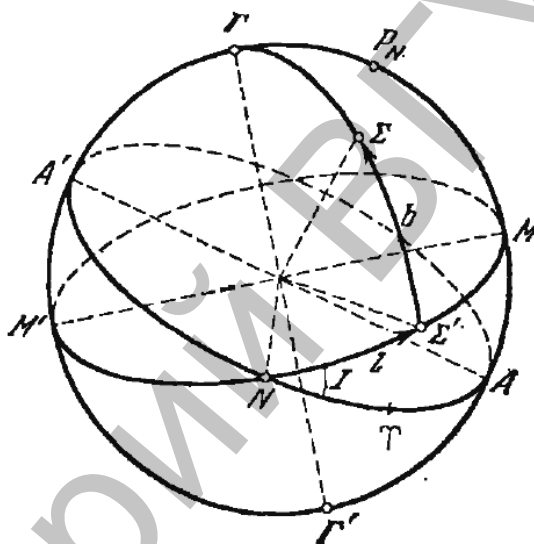


Рис. 6. Галактическая система сферических координат.

в созвездии Орла. Координаты *северного полюса Галактики*, т.е. точки небесной сферы, отстоящей от галактического экватора на 90° , равны [2], [3]

$$1950 \begin{cases} \alpha_0 = 12^h 49^m, \\ \delta_0 = +27^\circ, 4. \end{cases} \quad (3)$$

На эпоху 2000 точка начала отсчета C находится вблизи направления на галактический центр, но не совпадает с ним, поскольку последний, вследствие небольшой приподнятости Солнечной системы над плоскостью галактического диска, лежит примерно на 1° к югу от галактического экватора. Точку начала отсчета C выбирают таким образом, чтобы точка пересечения галактического и небесного экваторов с прямым восхождением 280° имела галактическую долготу $32,93192^\circ$.

Координаты точки начала отсчета C на эпоху 2000 в экваториальной системе координат составляют:

$$\begin{cases} \alpha_{2000}^C = 17^h 45^m, 6 \\ \delta_{2000}^C = -28^\circ 56', 2. \end{cases}$$

1.7. Основные формулы сферической тригонометрии

Сферический треугольник – часть поверхности небесной сферы, ограниченная тремя дугами больших кругов (рис. 7).

Дуги, образующие сферический треугольник, пересекают друг друга только в его вершинах, и называются *сторонами сферического треугольника*; они измеряются соответствующими центральными углами. Углы сферического треугольника измеряются двугранными углами, образованными плоскостями соответствующих больших кругов; они равны углам между касательными в вершинах, проведенными к соответствующим сторонам сферического треугольника. Обычно углы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, \dots , стороны – строчными буквами a, b, c, \dots , причем сторона a всегда лежит против угла (вершины) A и т.д.

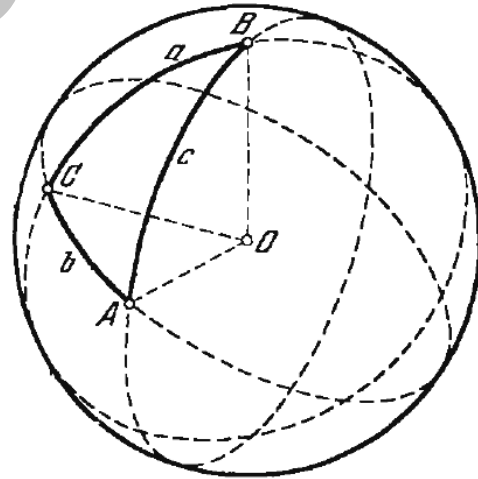


Рис. 7. Сферический треугольник.

Сферический треугольник, все стороны которого меньше 180° , называется *простым*.

Сферический треугольник называется *прямоугольным*, если один из углов его – *прямой*, и *четвертным* (*квадрантным*), если одна из его сторон заключает 90° .

Назовем *полюсом* большого круга точку на поверхности сферы, лежащую на угловом расстоянии 90° от любой точки окружности этого большого круга. Тогда сферический треугольник, образованный полюсами больших кругов, дуги которых ограничивают данный сферический треугольник ABC (при условии расположения полюсов сторон этого треугольника в направлении соответствующих вершин), называется *полярным* данному.

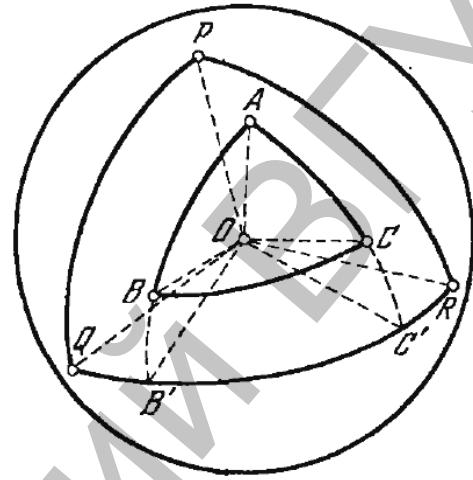


Рис. 8. Полярный треугольник.

Связь между элементами сферического треугольника ABC и полярного ему PQR (рис. 8) дается следующими соотношениями:

$$\begin{cases} p = 180^\circ - A, & P = 180^\circ - a, \\ q = 180^\circ - B, & Q = 180^\circ - b, \\ r = 180^\circ - C, & R = 180^\circ - c. \end{cases} \quad (4)$$

Если дано соотношение вида

$$f(A, B, C; a, b, c) = 0,$$

то для сферического треугольника, полярного данному, имеем

$$f(P, Q, R; p, q, r) = 0,$$

т.е. выполняется соотношение

$$f\left(\begin{matrix} 180^\circ - a, & 180^\circ - b, & 180^\circ - c, \\ 180^\circ - A, & 180^\circ - B, & 180^\circ - C \end{matrix}\right) = 0.$$

Такое преобразование называется *корреляцией* [4].

1) Основные системы соотношений, связывающих различные элементы сферического треугольника.

Система I. Соотношения между тремя сторонами и одним углом (*теорема косинусов*):

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{cases} \quad (5)$$

Система II. Соотношения между двумя сторонами и двумя противолежащими углами (*теорема синусов*):

$$\begin{cases} \sin a \sin B = \sin b \sin A, \\ \sin b \sin C = \sin c \sin B, \\ \sin c \sin A = \sin a \sin C, \end{cases} \quad (6)$$

или

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (7)$$

Система III. Соотношения между тремя сторонами и двумя углами (*формулы пяти элементов*):

$$\begin{cases} \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ \sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A, \\ \sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B, \\ \sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B, \\ \sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \\ \sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C. \end{cases} \quad (8)$$

Система IV. Соотношения между двумя сторонами и двумя углами:

$$\begin{cases} \cos a \cos B = \sin a \operatorname{ctg} c - \sin B \operatorname{ctg} C, \\ \cos a \cos C = \sin a \operatorname{ctg} b - \sin C \operatorname{ctg} B, \\ \cos b \cos C = \sin b \operatorname{ctg} a - \sin C \operatorname{ctg} A, \\ \cos b \cos A = \sin b \operatorname{ctg} c - \sin A \operatorname{ctg} C, \\ \cos c \cos A = \sin c \operatorname{ctg} b - \sin A \operatorname{ctg} B, \\ \cos c \cos B = \sin c \operatorname{ctg} a - \sin B \operatorname{ctg} A. \end{cases} \quad (9)$$

Корреляция соотношений (5) дает:

$$\begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{cases} \quad (10)$$

Каждое из соотношений (10) связывает три угла и одну сторону.

При помощи корреляции соотношений (8) получаем соотношения между тремя углами и двумя сторонами:

$$\begin{cases} \sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a, \\ \sin A \cos c = \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a, \\ \sin B \cos c = \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b, \\ \sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b, \\ \sin C \cos a = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c, \\ \sin C \cos b = \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c. \end{cases} \quad (11)$$

Система V. Соотношения между шестью элементами (формулы Каньоли):

$$\begin{cases} \sin a \sin c + \cos a \cos c \cos B = \sin A \sin C - \cos A \cos C \cos b, \\ \sin b \sin a + \cos b \cos a \cos C = \sin B \sin A - \cos B \cos A \cos c, \\ \sin c \sin b + \cos c \cos b \cos A = \sin C \sin B - \cos C \cos B \cos a. \end{cases} \quad (12)$$

В случае прямоугольного сферического треугольника ($A = 90^\circ$) справедливы соотношения (рис. 9):

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C, \\ \sin b = \sin a \sin B = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C, \\ \sin c = \sin a \sin C = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B, \\ \cos B = \cos b \sin C = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} a, \\ \cos C = \cos c \sin B = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} a. \end{cases} \quad (13)$$

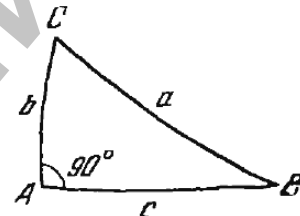


Рис. 9.

Прямоугольный сферический треугольник.

Формулы (13) можно получить, воспользовавшись *правилом Непера*, основанном на *пятиугольнике Непера* (рис. 10) при указанном порядке обозначения сторон этого пятиугольника:

косинус стороны пятиугольника Непера равен: 1) произведению синусов противолежащих сторон; 2) произведению котангенсов прилежащих сторон [4].

Квадрантный (четвертной) сферический треугольник.

При помощи корреляции формул (13) получают формулы для квадрантного сферического треугольника ($a = 90^\circ$):

$$\begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c, \\ \sin B = \sin A \sin b = \operatorname{tg} C \operatorname{ctg} c, \\ \sin C = \sin A \sin c = \operatorname{tg} B \operatorname{ctg} b, \\ \cos b = \cos B \sin c = -\operatorname{tg} C \operatorname{ctg} A, \\ \cos c = \cos C \sin b = -\operatorname{tg} B \operatorname{ctg} A. \end{cases} \quad (14)$$

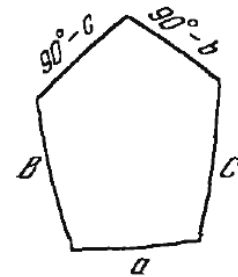


Рис. 10. Первая схема для правила Непера.

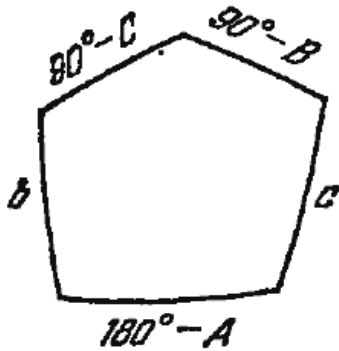


Рис. 11. Вторая схема для правила Непера.

Формулы (14) можно вывести из общих соотношений, полагая в них $a = 90^\circ$, или по правилу Непера (рис. 11).

С четвертным сферическим треугольником ABC можно связать *присоединенный* сферический треугольник $AA'C$ (рис. 12), сторона c' которого является продолжением стороны c и дополняет ее до 90° . Тогда в сферическом треугольнике $BA'C$ две стороны равны по 90° , угол $A = 90^\circ$. В присоединенном сферическом треугольнике $AA'C$:

$$B' = 180^\circ - A, \quad a' = b, \quad c' = 90^\circ - c, \quad C' = 90^\circ - C, \quad b' = B,$$

поэтому применение к нему формул (13) немедленно дает формулы (14).

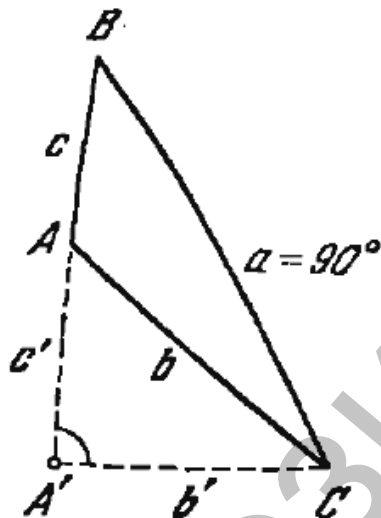


Рис. 12. Четвертной (квандрантный) сферический треугольник и присоединенный сферический треугольник.

Кроме того, имеют место:

а) формулы Борда:

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}}, \end{aligned} \right. \quad (15)$$

где $a + b + c = 2p$.

Определяя сферический избыток σ следующей формулой:

$$\sigma = A + B + C - 180^\circ \quad (16)$$

и применяя корреляцию к формулам (15), находим формулы Борда:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma}{2} \sin \left(A - \frac{\sigma}{2} \right)}{\sin \left(B - \frac{\sigma}{2} \right) \sin \left(C - \frac{\sigma}{2} \right)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma}{2} \sin \left(B - \frac{\sigma}{2} \right)}{\sin \left(A - \frac{\sigma}{2} \right) \sin \left(C - \frac{\sigma}{2} \right)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma}{2} \sin \left(C - \frac{\sigma}{2} \right)}{\sin \left(A - \frac{\sigma}{2} \right) \sin \left(B - \frac{\sigma}{2} \right)}}; \end{array} \right. \quad (17)$$

б) формулы Деламбра:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \frac{b+c}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, \quad \frac{\cos \frac{b+c}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \frac{\cos \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, \\ \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, \quad \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}. \end{array} \right. \quad (18)$$

Восемь аналогичных соотношений получаются круговой перестановкой букв a, b, c, A, B, C ;

в) аналогии Непера:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{b+c}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{b-c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{b+c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}}. \end{array} \right. \quad (19)$$

Другие восемь аналогий Непера получаются круговой перестановкой букв;

г) формула Льюйе:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\sigma}{4} = \operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}. \quad (20)$$

Приведенные формулы позволяют определить любые три элемента сферического треугольника, если известны остальные три.

Основные практические приемы вычисления, а также приближенные формулы в случае малых углов могут быть найдены в руководствах по сферической астрономии [1], [4]–[9].

Значения тригонометрических функций для аргументов – углов, выраженных в различных мерах, берутся из соответствующих таблиц [10]–[20].

Полные сведения о таблицах натуральных значений (и логарифмов) тригонометрических функций и других математических таблицах, которые могут оказаться полезными вычислителю, содержатся в специальных справочных руководствах [21–23].

1.8. Формулы перехода в различных астрономических системах координат

1) *Формулы связи между горизонтальной и первой экваториальной системами координат.*

Рассмотрим *астрономический* или *параллактический* треугольник $P_N Z \Sigma$ (рис. 13). Применение к нему основных соотношений сферической тригонометрии дает формулы

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos h \sin A = \cos \delta \sin t = \sin z \sin A, \\ \cos h \cos A = -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t = \\ = \sin z \cos A, \\ \sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t = \cos z, \\ \cos \delta \sin t = \cos h \sin A = \sin z \sin A, \\ \cos \delta \cos t = \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos A = \\ = \cos z \cos \varphi + \sin z \sin \varphi \cos A, \\ \sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A = \\ = \cos z \sin \varphi - \sin z \cos \varphi \cos A, \end{array} \right. \quad (21)$$

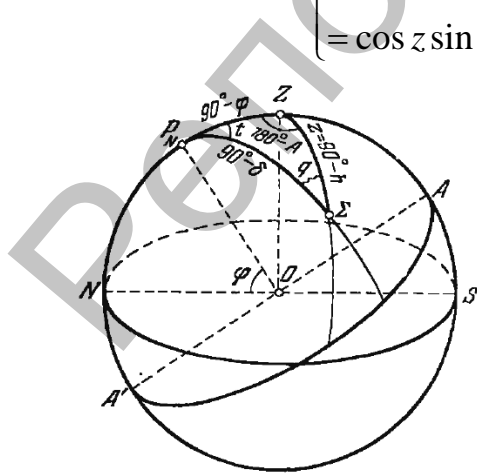


Рис. 13. Параллактический треугольник.

где φ – астрономическая широта места наблюдения, A – азимут, отсчитываемый от точки юга к западу от 0° до 360° .

2) *Формулы связи между первой и второй экваториальными системами координат.*

Обе системы координат отличаются друг от друга только началом отсчета и направлением отсчета часовых углов t и прямых восхождений α . Угловые величины t и α связаны

соотношением (рис. 14)

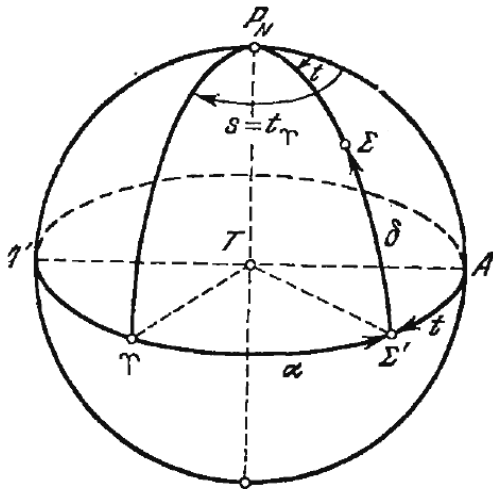


Рис. 14. Связь между экваториальными системами сферических координат.

и светилом Σ (рис. 15), находим

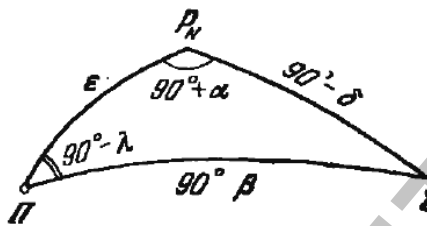


Рис. 15. Связь между второй экваториальной и эклиптической системами сферических координат.

$$\alpha + t = s, \quad (22)$$

где s – местное звездное время, измеряемое часовым углом t_{Υ} точки весеннего равноденствия Υ относительно местного меридиана.

Координата δ является общей для обеих систем координат.

3) *Формулы связи между второй экваториальной и эклиптической системами координат.*

Из сферического треугольника, образованного полюсом мира P_N , полюсом эклиптики Π

$$\begin{cases} \cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda, \\ \cos \delta \sin \alpha = \cos \beta \sin \lambda \cos \epsilon - \sin \beta \sin \epsilon, \\ \sin \delta = \cos \beta \sin \lambda \sin \epsilon + \sin \beta \cos \epsilon, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda = \cos \delta \sin \alpha \cos \epsilon + \\ + \sin \delta \sin \epsilon, \\ \sin \beta = -\cos \delta \sin \alpha \sin \epsilon + \\ + \sin \delta \cos \epsilon, \end{cases} \quad (24)$$

где ϵ – наклон эклиптики к экватору, отнесенный к осям координат той же эпохи, что и $\alpha, \delta; \lambda, \beta$.

4) *Формулы связи между второй экваториальной и галактической системами координат.*

Вывод формул связи основан на применении основных соотношений сферической тригонометрии к сферическому треугольнику, образованному полюсом мира P_N , северным полюсом галактики Γ и светилом Σ (рис. 16):

$$\begin{cases} \sin b = \sin \delta_0 \sin \delta + \cos \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0), \\ \cos b \cos l = \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0), \\ \cos b \sin l = \cos \delta_0 \sin \delta - \sin \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0), \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \sin \delta = \sin b \sin \delta_0 + \cos b \cos \delta_0 \sin l, \\ \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0) = \cos b \cos l, \\ \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0) = \sin b \cos \delta_0 - \cos b \sin \delta_0 \sin l. \end{cases} \quad (26)$$

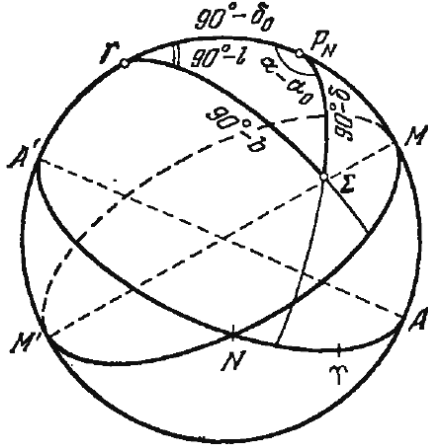


Рис. 16. Связь между второй экваториальной и галактической системами сферических координат.

Здесь α_0, δ_0 обозначают прямое восхождение и склонение полюса галактики Γ (см. формулу (3)).

На практике перевод экваториальных координат α, δ в галактические l, b выполняется при помощи *сетки Вульфа* или специальных таблиц [3], [24].

1.9. Прямоугольные системы координат

За основную координатную плоскость берется плоскость эклиптики или экватора, основная ось отсчета OX направлена из начала O координат в точку весеннего равноденствия Υ , ось OY — под углом 90° к оси OX , ось OZ дополняет систему до правой (рис. 17).

1) *Формула связи между экваториальной и эклиптической прямоугольными системами координат.*

Если основная плоскость XOY — плоскость экватора, а начало O выбрано в центре небесной сферы, то прямоугольная система координат $OXYZ$ называется *экваториальной*.

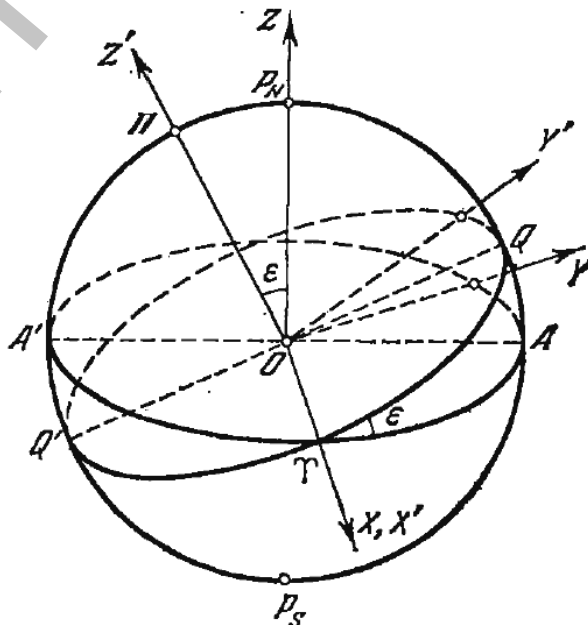


Рис. 17. Связь между экваториальной и эклиптической системами прямоугольных координат.

Экваториальные сферические координаты r, α, δ любой точки P связаны с экваториальными прямоугольными координатами этой же точки x, y, z соотношениями

$$\begin{cases} x = r \cos \delta \cos \alpha, \\ y = r \cos \delta \sin \alpha, \\ z = r \sin \delta. \end{cases} \quad (27)$$

Если основная плоскость эклиптической системы сферических координат – плоскость эклиптики – совпадает с плоскостью $X'OY'$ прямоугольной системы координат $OX'Y'Z'$, начало которой, как и прежде, лежит в центре небесной сферы, а ось OX' направлена в точку весеннего равноденствия Υ' , то система координат $OX'Y'Z'$ называется *эклиптической* (рис. 17).

Эклиптические сферические координаты r, λ, β точки P выражаются через эклиптические прямоугольные координаты этой же точки x', y', z' посредством формул

$$\begin{cases} x' = r \cos \beta \cos \lambda, \\ y' = r \cos \beta \sin \lambda, \\ z' = r \sin \beta. \end{cases} \quad (28)$$

Переход от прямоугольных экваториальных координат x, y, z точки P к эклиптическим прямоугольным координатам x', y', z' этой же точки выполняется по следующим формулам преобразования экваториальных прямоугольных координат в эклиптические:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = z \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon, \\ z' = z \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon. \end{cases} \quad (29)$$

Формулы обратного преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y' \cos \varepsilon - z' \sin \varepsilon, \\ z = y' \sin \varepsilon + z' \cos \varepsilon. \end{cases} \quad (30)$$

Формулы перехода от сферических эклиптических координат к прямоугольным экваториальным координатам (с тем же началом) записываются в виде

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \cos \lambda, \\ y = r \cos \beta (\cos \varepsilon \sin \lambda - \sin \varepsilon \operatorname{tg} \beta), \\ z = r \cos \beta (\sin \varepsilon \sin \lambda + \cos \varepsilon \operatorname{tg} \beta). \end{cases} \quad (31)$$

Формулы перехода от сферических экваториальных координат к прямоугольным эклиптическим имеют вид

$$\begin{cases} x' = r \cos \delta \cos \alpha, \\ y' = r \cos \delta (\sin \varepsilon \operatorname{tg} \delta + \cos \varepsilon \sin \alpha), \\ z' = r \cos \delta (\cos \varepsilon \operatorname{tg} \delta - \sin \varepsilon \sin \alpha). \end{cases} \quad (32)$$

2) *Формулы связи между гелиоцентрической и геоцентрической системами координат.*

Если начало одной системы координат не совпадает с началом другой, то для преобразования координат, кроме возможных поворотов осей координат, необходим еще и *параллельный перенос осей координат в новое начало отсчета* (рис. 18).

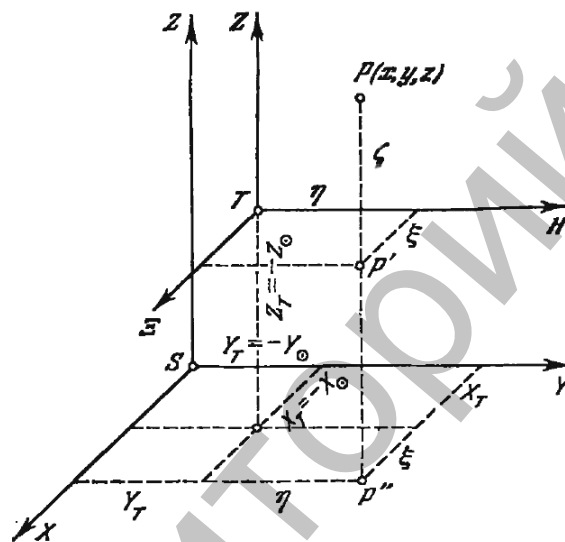


Рис. 18. Переход от гелиоцентрической системы координат к геоцентрической системе координат.

Если x, y, z – координаты точки P в гелиоцентрической прямоугольной экваториальной системе координат $SXYZ$; $X_{\square}, Y_{\square}, Z_{\square}$ – координаты Солнца в геоцентрической экваториальной прямоугольной системе координат $T\Xi\eta Z$, то прямоугольные координаты ξ, η, ζ точки P в системе $T\Xi\eta Z$ определяются формулами

$$\begin{cases} \xi = x + X_{\square}, \\ \eta = y + Y_{\square}, \\ \zeta = z + Z_{\square}. \end{cases} \quad (33)$$

Если ввести геоцентрические экваториальные сферические координаты ρ, α, δ точки P (геоцентрическое расстояние ρ обозначается иногда символом Δ), то будем иметь

$$\begin{cases} \rho \cos \delta \cos \alpha = x + X_{\square}, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha = y + Y_{\square}, \\ \rho \sin \delta = z + Z_{\square}. \end{cases} \quad (34)$$

Замечание. Очевидно, гелиоцентрические прямоугольные экваториальные координаты Земли X_T, Y_T, Z_T равны геоцентрическим прямоугольным экваториальным координатам Солнца, взятым с обратными знаками, т.е. $-X_{\square}, -Y_{\square}, -Z_{\square}$.

Для перехода от *гелиоцентрических эклиптических сферических координат* r, l, b к *геоцентрическим эклиптическим сферическим координатам* ρ, λ, β можно применить формулы

$$\begin{cases} \rho \cos \beta \cos \lambda = R_{\square} \cos \beta_{\square} \cos \lambda_{\square} + r \cos b \cos l, \\ \rho \cos \beta \sin \lambda = R_{\square} \cos \beta_{\square} \sin \lambda_{\square} + r \cos b \sin l, \\ \rho \sin \beta = R_{\square} \sin \beta_{\square} + r \sin b, \end{cases} \quad (35)$$

где $R_{\square}, \lambda_{\square}, \beta_{\square}$ – геоцентрические эклиптические координаты (радиус-вектор, долгота и широта) Солнца.

Нередко широтой Солнца β_{\square} можно пренебречь и положить $\sin \beta_{\square} = 0, \cos \beta_{\square} = 1$. Тогда формулы (35) принимают вид

$$\begin{cases} \rho \cos \beta \cos \lambda \approx R_{\square} \cos \lambda_{\square} + r \cos b \cos l, \\ \rho \cos \beta \sin \lambda \approx R_{\square} \sin \lambda_{\square} + r \cos b \sin l, \\ \rho \sin \beta \approx r \sin b. \end{cases} \quad (36)$$

Преобразование *гелиоцентрических эклиптических сферических координат* r, l, b точки P в *геоцентрические экваториальные сферические координаты* ρ, α, δ осуществляется по формулам

$$\begin{cases} \rho \cos \delta \cos \alpha = r \cos b \cos l + X_{\square}, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha = r \cos b (\sin l \cos \varepsilon - \operatorname{tg} b \sin \varepsilon) + Y_{\square}, \\ \rho \sin \delta = r \cos b (\sin l \sin \varepsilon + \operatorname{tg} b \cos \varepsilon) + Z_{\square}. \end{cases} \quad (37)$$

Если вместо прямоугольных экваториальных координат Солнца $X_{\square}, Y_{\square}, Z_{\square}$ заданы его эклиптические координаты $R_{\square}, \lambda_{\square}, \beta_{\square}$, то геоцентрические экваториальные координаты ρ, α, δ небесного объекта вычисляют по таким формулам:

$$\begin{cases} \rho \cos \delta \cos \alpha = r \cos b \cos l + R_{\square} \cos \beta_{\square} \cos \lambda_{\square}, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha = r \cos b (\sin l \cos \varepsilon - \operatorname{tg} b \sin \varepsilon) + \\ + R_{\square} \cos \beta_{\square} (\sin \lambda_{\square} \cos \varepsilon - \operatorname{tg} \beta_{\square} \sin \varepsilon), \\ \rho \sin \delta = r \cos b (\sin l \sin \varepsilon + \operatorname{tg} b \cos \varepsilon) + \\ + R_{\square} \cos \beta_{\square} (\sin \lambda_{\square} \sin \varepsilon + \operatorname{tg} \beta_{\square} \cos \varepsilon). \end{cases} \quad (38)$$

Наклон эклиптики к экватору ε должен быть отнесен к системе координат той же эпохи, что и величины $r, l, b, R_{\square}, \lambda_{\square}, \beta_{\square}$.

3) Относительные координаты.

В экваториальной геоцентрической системе координат α, δ находят применение также две другие координаты (рис. 19):

1) *угловое расстояние* s объекта Σ относительно *опорного* объекта Σ_0 , измеряемое дугой большого круга $\Sigma_0\Sigma$ на небесной сфере;

2) *позиционный угол*, или *угол положения* p , отсчитываемый от круга склонений опорного объекта Σ_0 до дуги $s = \Sigma_0\Sigma$ против часовой стрелки, если смотреть на небесную сферу *снаружи*.

Координаты s, p называются *относительными координатами*; их можно выразить через экваториальные координаты α_0, δ_0 опорного объекта Σ_0 и α, δ объекта Σ следующими формулами (см. треугольник $P_N\Sigma\Sigma_0$ на рис. 19):

$$\begin{cases} \cos p \sin s = \cos \delta_0 \sin \delta - \sin \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0), \\ \sin p \sin s = \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0), \\ \cos s = \sin \delta_0 \sin \delta + \cos \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0). \end{cases} \quad (39)$$

На практике часто можно пренебречь величинами порядка $(\Delta\alpha)^2$ и $(\Delta\delta)^3$ и применять *приближенные* формулы

$$\begin{cases} s \cos p = \delta - \delta_0 = \Delta\delta, \\ s \sin p = (\alpha - \alpha_0) \cos \delta = \Delta\alpha \cos \delta. \end{cases} \quad (40)$$

4) Дифференциальные координаты.

Положение объекта Σ относительно объекта Σ_0 в экваториальной системе координат определяется разностями $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$ и $\Delta\delta = \delta - \delta_0$; эти разности выражаются через относительные координаты s и p при помощи равенства (40)

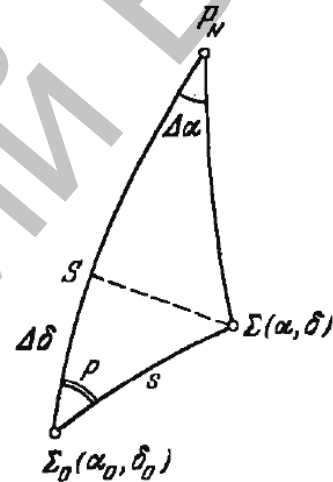


Рис. 19. Относительные сферические координаты.

$$\begin{cases} \alpha - \alpha_0 = s \sin p \sec \delta, \\ \delta - \delta_0 = s \cos p. \end{cases} \quad (41)$$

Разности $\alpha - \alpha_0, \delta - \delta_0$ называются *дифференциальными экваториальными координатами*.

Величины x, y , определяемые равенствами (рис. 20)

$$\begin{cases} x = s \sin p, \\ y = s \cos p, \end{cases} \quad (42)$$

называются *прямоугольными координатами Σ относительно Σ_0* .

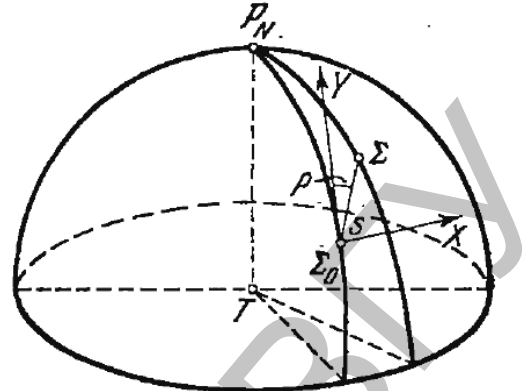


Рис. 20. Относительные прямоугольные координаты.

Разности прямых восхождений $\Delta\alpha$ и склонений $\Delta\delta$ можно выразить через разности эклиптических долгот $\Delta\lambda$ и широт $\Delta\beta$ (*дифференциальные эклиптические координаты*) и, наоборот, при помощи следующих формул:

$$\begin{cases} \Delta\alpha \cos \delta = \cos \eta \cos \beta \Delta\lambda - \sin \eta \Delta\beta - \sin \delta \cos \alpha \Delta\varepsilon, \\ \Delta\delta = \sin \eta \cos \beta \Delta\lambda + \cos \eta \Delta\beta + \sin \alpha \Delta\varepsilon, \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \Delta\lambda \cos \beta = \cos \eta \cos \delta \Delta\alpha + \sin \eta \Delta\delta + \sin \beta \cos \lambda \Delta\varepsilon, \\ \Delta\beta = -\sin \eta \cos \delta \Delta\alpha + \cos \eta \Delta\delta - \sin \lambda \Delta\varepsilon. \end{cases} \quad (44)$$

Вспомогательный угол η вычисляется по формулам

$$\sin \eta = \cos \lambda \sec \delta \sin \varepsilon = \cos \alpha \sec \beta \sin \varepsilon, \quad (45)$$

причем

$$-90^\circ \leq \eta \leq +90^\circ.$$

5) Дифференциальные изменения координат.

Малые изменения координат объекта на небесной сфере с достаточной степенью точности могут быть выражены дифференциальными формулами, которые выводятся из основных соотношений, связывающих сферические координаты с положением объекта в пространстве. Формулы (27) дают:

$$\begin{cases} dx = \frac{x}{r} dr - z \cos \alpha d\delta - y d\alpha, \\ dy = \frac{y}{r} dr - z \sin \alpha d\delta + x d\alpha, \\ dz = \frac{z}{r} dr + r \cos \delta d\delta, \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} \cos \delta d\alpha = \cos \alpha \frac{dy}{r} - \sin \alpha \frac{dx}{r}, \\ d\delta = -\sin \delta \cos \alpha \frac{dx}{r} - \sin \delta \sin \alpha \frac{dy}{r} + \cos \delta \frac{dz}{r}, \\ dr = \cos \delta \cos \alpha dx + \cos \delta \sin \alpha dy + \sin \delta dz. \end{cases} \quad (47)$$

Заменой α на λ и δ на β получим формулы дифференциальных изменений координат в эклиптической системе:

$$\begin{cases} dx' = \frac{x'}{r} dr - z' \cos \lambda d\beta - y' d\lambda, \\ dy' = \frac{y'}{r} dr - z' \sin \lambda d\beta + x' d\lambda, \\ dz' = \frac{z'}{r} dr + r \cos \beta d\beta; \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} \cos \beta d\lambda = \frac{1}{r} (\cos \lambda dy' - \sin \lambda dx'), \\ d\beta = \frac{1}{r} (-\sin \beta \cos \lambda dx' - \sin \beta \sin \lambda dy' + \cos \beta dz'), \\ dr = \cos \beta \cos \lambda dx' + \cos \beta \sin \lambda dy' + \sin \beta dz'. \end{cases} \quad (49)$$

б) *Основная операция.*

Если в прямоугольной экваториальной системе координат $TXYZ$ (ось TX направлена в точку весеннего равноденствия Υ') объект Σ из положения, определяемого радиусом-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{r}(r_x, r_y, r_z)$, сместился на $\Delta \mathbf{r}$ и занял положение Σ' , определяемое радиусом-вектором $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(x', y', z') = \mathbf{r}'(r'_x, r'_y, r'_z)$, то (рис. 21)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, & r' &= r + \Delta r, \\ r'_x &= r_x + \Delta r_x, & \alpha' &= \alpha + \Delta \alpha, \\ r'_y &= r_y + \Delta r_y, & \delta' &= \delta + \Delta \delta, \\ r'_z &= r_z + \Delta r_z. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{cases} \Delta r_x = \Delta r \cos \alpha \cos \delta - r \sin \alpha \cos \delta \Delta \alpha - r \cos \alpha \sin \delta \Delta \delta, \\ \Delta r_y = \Delta r \sin \alpha \cos \delta + r \cos \alpha \cos \delta \Delta \alpha - r \sin \alpha \sin \delta \Delta \delta, \\ \Delta r_z = \Delta r \sin \delta + r \cos \delta \Delta \delta; \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} \Delta \alpha = -\sec \delta \sin \alpha \frac{\Delta r_x}{r} + \sec \delta \cos \alpha \frac{\Delta r_y}{r}, \\ \Delta \delta = -\sin \delta \cos \alpha \frac{\Delta r_x}{r} - \sin \delta \sin \alpha \frac{\Delta r_y}{r} + \cos \delta \frac{\Delta r_z}{r}, \end{cases} \quad (51)$$

ИЛИ

$$\begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sec\delta \sin\alpha, & +\sec\delta \cos\alpha, & 0 \\ -\sin\delta \cos\alpha, & -\sin\delta \sin\alpha, & \cos\alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r^{-1}\Delta r_x \\ r^{-1}\Delta r_y \\ r^{-1}\Delta r_z \end{Bmatrix}.$$

Соотношения (51) для приращений $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$, обусловленных малым перемещением объекта на Δr , определяют основную операцию [15].

Если

$$r' = r + v\Delta t,$$

где v – вектор скорости объекта Σ , $v = v(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = v(v_x, v_y, v_z)$, то при $\Delta t \rightarrow 0$ основная операция (51) дает

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{d\delta}{dt} \end{Bmatrix} = \mathbf{K}(\alpha, \delta) \begin{Bmatrix} r^{-1}v_x \\ r^{-1}v_y \\ r^{-1}v_z \end{Bmatrix},$$

(52)

где матрица $\mathbf{K}(\alpha, \delta)$ – оператор основной операции

$$\mathbf{K}(\alpha, \delta) = \begin{Bmatrix} -\sec\delta \sin\alpha, & +\sec\delta \cos\alpha, & 0 \\ -\sin\delta \cos\alpha, & -\sin\delta \sin\alpha, & \cos\delta \end{Bmatrix}. \quad (53)$$

Основную операцию можно выполнить и в других системах координат при помощи соответствующей оператор-матрицы \mathbf{K} (например, $\mathbf{K}(\lambda, \beta)$).

1.10. Системы географических координат

Положения точек на поверхности Земли могут быть отнесены к двум системам координат: либо к системе *астрономических*, или *небесных*, координат, не зависящей ни от формы, ни от размеров Земли и полностью определяемой направлением силы тяжести в данной точке, т.е. зависящим от него направлением *астрономической вертикали*, или *отвесной линии*, либо к системе *геодезических координат*, вычисляемых на основе определенной математической поверхности (например, эллипсоида вращения), аппроксимирующей реальную физическую поверхность Земли и называемой *фундаментальной поверхностью относимости* (см. ниже *общий земной эллипсоид*, или *сфероид*, и *референц-эллипсоид*).

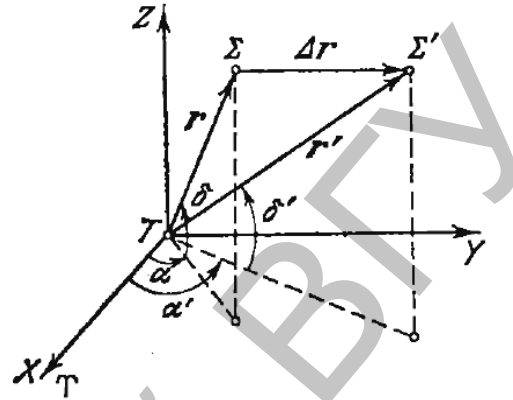


Рис. 21. Связь между приращениями радиуса-вектора объекта и приращениями сферических координат.

Обе эти системы и представляют системы географических координат; положение точки земной поверхности, отнесенное к любой из них, называется *географическим положением* этой точки. Обычно географические координаты точки в этих двух различных системах не отличаются более, чем на несколько секунд дуги, однако всегда следует точно указывать, о какой системе географических координат идет речь.

1) *Астрономические координаты.*

В системе астрономических координат, к которой относятся положения точек земной поверхности, полюсы Земли определяются как точки пересечения поверхности Земли осью вращения и называются *географическими полюсами*. Плоскость, проведенная перпендикулярно к земной оси вращения через центр масс Земли, пересекает земную поверхность по *географическому экватору*.

Так как реальная форма Земли отклоняется от сферической, то астрономические координаты не могут быть выражены через угловые расстояния точек, измеренные на поверхности и отнесенные непосредственно к географическим полюсам и экватору, как это было в случае экваториальной системы на небесной сфере. Необходимо определить систему астрономических координат через углы в пространстве, фиксирующие направление *местной* астрономической вертикали относительно основных наблюдаемых направлений, измерив, например, астрономическими способами угол между направлением вертикали и направлением на северный полюс мира. Этот угол определит положение вертикали в плоскости *местного* меридиана, т.е. в направлении *север – юг*.

Установив далее положение плоскости местного небесного меридиана относительно общепринятого *основного*, или *нулевого*, меридиана, мы фиксируем положение вертикали в направлении *восток – запад*.

При определении системы координат точек земной поверхности через углы, фиксирующие направление вертикали, необходимо учитывать влияние местных аномалий на направление силы тяжести, определяющей астрономическую вертикаль. Так как местная вертикаль вообще не пересекает ось вращения Земли, плоскость небесного меридиана, проходящая через вертикаль и ось небесной сферы, направленную от наблюдателя к северному полюсу мира, не проходит через ось вращения Земли, а параллельна ей и пересекает поверхность Земли по кривой, не проходящей, вообще говоря, через географические полюсы.

Тем не менее, в обычном геометрическом смысле с углом между вертикалью и осью вращения Земли отождествляют угол в плоскости местного меридиана, заключенный между вертикалью

и осью небесной сферы в данной точке земной поверхности. Таким образом, положение этой точки фиксируется относительно точки, в которой этот угол равен нулю, т.е. полюс мира находится в зените, и измеряется дугой небесного меридиана, заключенной между полюсом и зенитом.

Дополнение до 90° *острого* угла между астрономической вертикалью и осью вращения Земли называется *астрономической широтой* φ_a . Геометрическое место точек на поверхности Земли с астрономической широтой, равной 0° , называется *астрономическим экватором*, геометрические места точек с другими фиксированными частными значениями астрономической широты называются *параллелями*. Принято считать широты точек в северном полушарии положительными, в южном – отрицательными. Экватор и параллели являются кривыми двойкой кривизны, мало отличающимися от плоских кривых. Астрономический экватор не совпадает с географическим экватором – экватором вращения, но все вертикали в точках астрономического экватора перпендикулярны к оси вращения Земли и, следовательно, параллельны плоскости географического экватора и пересекают небесную сферу по небесному экватору. Широты географических полюсов необязательно равны точно 90° , однако можно считать, что точки с астрономической широтой в 90° являются *астрономически определенными* географическими полюсами.

Двугранный угол, заключенный между плоскостями меридиана данной точки и местного меридиана общепринятой точки отсчета на поверхности Земли, называется *астрономической долготой* данной точки λ_a .

За основную плоскость отсчета принята плоскость меридиана, проходящего через Гриничскую обсерваторию. Астрономические долготы отсчитываются к западу (положительные) и к востоку (отрицательные) от Гринича от 0° до 180° (или в часовой мере от 0^h до 12^h).

Геометрическое место точек земной поверхности с одной и той же астрономической долготой называется *астрономическим меридианом*. Вследствие отклонений в направлении вертикали от точки к точке поверхности Земли плоскости местных меридианов в различных точках с одинаковой астрономической долготой, вообще говоря, не совпадают, а параллельны друг другу. Таким образом, астрономические меридианы на поверхности Земли являются кривыми двойкой кривизны. Пересечение поверхности Земли плоскостью местного небесного меридиана определяет кривую, не проходящую через географические полюсы; она совпадает с астрономическим местным меридианом только в данной точке.

Таким образом, из-за влияния аномалий силы тяжести на положение астрономической вертикали и на вид и свойства меридианов и параллелей *астрономическая* система географических координат непригодна для точного выражения геометрических соотношений на поверхности Земли; поэтому обращаются к географической системе *геодезических* координат.

2) *Геодезические координаты.*

Основу географической системы геодезических координат составляет поверхность эллипсоида вращения, аппроксимирующая реальную поверхность Земли. Параметры этой фундаментальной поверхности относимости являются частью системы астрономических постоянных. Необходимо иметь в виду, что непосредственные результаты астрономо-геодезических измерений на местности всегда дают куски уровенной поверхности, которые нельзя точно «расстелить» на эллипсоиде вращения. Поэтому за математическую поверхность Земли принимают уровенную поверхность, совпадающую при определенных условиях со средней поверхностью воды спокойного океана. Эта поверхность называется *геоидом*. Наиболее близкий к геоиду эллипсоид, наилучшим образом представляющий фигуру и гравитационное поле всей Земли в целом, называется *общим земным эллипсоидом*, или *сфероидом*; однако используемые в различных странах для обработки отдельных рядов геодезических измерений *референц-эллипсоиды* не совпадают, как правило, с общим земным сфероидом. В систему астрономо-геодезических постоянных включают параметры (экваториальный радиус a_e и сжатие α) общего земного сфероида, принятого во всем мире для астрономических и геодезических работ. Положение любой точки поверхности Земли относительно такого стандартного сфероида определяется расстоянием по нормали от поверхности сфероида и положением основания этой нормали на поверхности сфероида.

Геодезическими полюсами называются точки пересечения оси вращения сфероида с его поверхностью; плоскость, образуемая большой полуосью производящего эллипса, называется *плоскостью геодезического экватора*. *Геодезическая вертикаль* в любой точке земной поверхности совпадает с нормалью к стандартному сфероиду, проходящей через эту точку; таким образом, *геодезический зенит* представляет точку Z_g пересечения небесной сферы с геодезической вертикалью.

Систему *геодезических меридианов* образуют эллипсы, по которым плоскости, проведенные через ось вращения сфероида, пересекают его поверхность, *геодезические параллели* – это круги

пересечения плоскостей, перпендикулярных к оси вращения, с поверхностью сфероида. Геодезическая вертикаль любой точки лежит в плоскости геодезического меридиана и пересекает, следовательно, ось вращения сфероида; однако, геодезическая вертикаль вообще не проходит через центр сфероида.

Геодезическая широта φ_g измеряется углом между геодезической вертикалью и плоскостью геодезического экватора. *Геодезическая широта λ_g* измеряется двугранным углом между плоскостями геодезических меридианов, проходящих через данную точку и общепринятую начальную точку отсчета.

Геодезические координаты определяются относительно направления геодезической вертикали, которое нельзя получить непосредственно из наблюдений. Поэтому геодезические координаты *непосредственно измерить нельзя* – их можно *вычислить* по измерениям расстояний и углов на поверхности Земли, т.е. по результатам геодезических съемок. Эти вычисления производятся на основе определенного общепринятого земного сфероида – *стандартного референц-эллипсоида*, определяемыми конкретными числовыми значениями большой полуоси производящего эллипса и сжатия – параметра, характеризующего отклонение от сферы. Поэтому координаты в геодезической системе относятся, как правило, к этому принятому земному сфероиду.

Положение стандартного сфероида относимости фиксируется относительно Земли принятыми значениями геодезической широты и долготы определенного исходного пункта, на котором определены астрономические долгота и широта, а также *принятым* значением геодезического азимута геодезической линии избранного направления, проходящей через этот пункт. Эта система принятых параметров называется *геодезической системой данных* (системой исходных геодезических дат), а пункт, для которого приняты определенные значения геодезических координат, называется *начальным*.

Линия кратчайшего расстояния, лежащая всеми своими точками на стандартном сфероиде относимости, называется *геодезической линией*, или просто геодезической. *Геодезический азимут* есть угол между геодезическим меридианом наблюдателя и касательной к геодезической в точке наблюдения, измеряемый в плоскости, касательной к сфероиду в точке наблюдателя. *Геодезический горизонт* определяется плоскостью, проведенной перпендикулярно к геодезической вертикали в точке наблюдения.

1.11. Соотношения между астрономическими и геодезическими координатами

Астрономическая и геодезическая системы географических координат не зависят друг от друга; разности между соответствующими координатами λ_a, φ_a и λ_g, φ_g одной и той же точки можно обнаружить только из наблюдений (рис. 22). Эти разности обусловлены главным образом неправильными изменениями в направлении си-

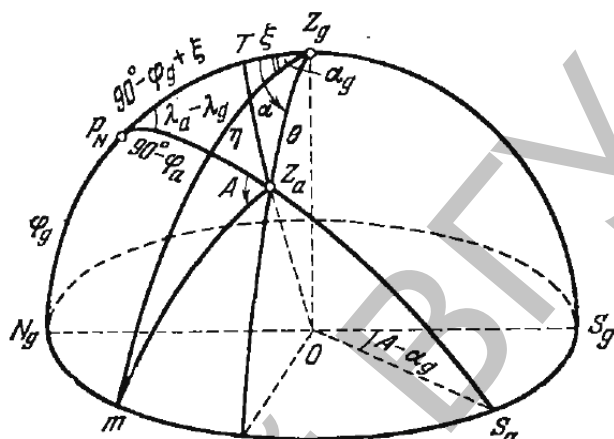


Рис. 22. Астрономические и геодезические координаты.

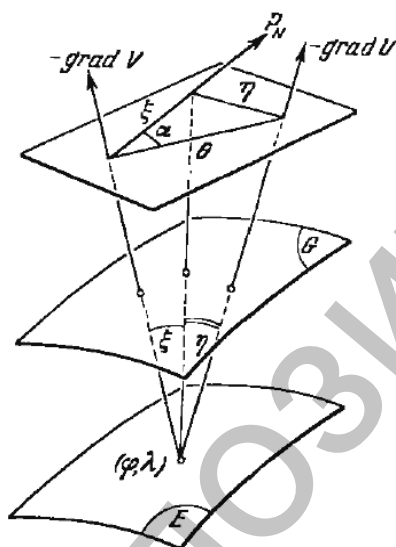


Рис. 23. Связь между уклонением отвеса θ и его составляющими ξ и η .

Уклонение отвеса θ можно разложить на две составляющие – меридиональную составляющую ξ с положительным направлением отсчета от геодезического зенита Z_g к северному полюсу мира P_N и составляющую по дуге первого вертикала η с положительным направлением отсчета от геодезического зенита к точке востока (рис. 23).

лы тяжести при переходе от точки к точке земной поверхности, несовпадением оси вращения Земли с осью вращения эллипсоида относимости и центра этого эллипсоида с центром масс Земли. Поэтому астрономическая вертикаль образует с геодезической вертикалью угол, который называется *уклонением отвеса*. Различают *абсолютное* уклонение отвеса, измеряемое углом θ_{abc} между астрономической вертикалью и нормалью к общему земному эллипсоиду, и *относительное (астрономо-геодезическое)* уклонение отвеса, равное углу, заключенному между астрономической вертикалью и нормалью к принятому референц-эллипсоиду.

Уклонение отвеса может быть найдено из гравиметрических измерений как угол между градиентами потенциала Земли U (геоида G) и потенциала V , соответствующего данному эллипсоиду относимости E (например, нормального потенциала общего земного эллипсоида), которые вычисляются в соответственных точках r, r_e, φ, λ , т.е.

$$\theta = \arccos \frac{\text{grad}U \cdot \text{grad}V}{|\text{grad}U| |\text{grad}V|}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \xi = \theta \cos \alpha, \\ \eta = \theta \sin \alpha, \end{cases} \quad (54)$$

где α – геодезический азимут направления полного уклонения отвеса θ , определяемый формулой

$$\cos \alpha = - \frac{[\text{grad}V, \text{grad}U] \cdot [\text{grad}V, e_z]}{[[\text{grad}V, \text{grad}U]] [[\text{grad}V, e_z]]},$$

в которой e_z – единичный вектор, направленный по оси вращения Земли.

Для θ, ξ, η имеются приближенные формулы:

$$\begin{cases} \theta = \sqrt{\left(\frac{1}{r_e} \frac{dr_e}{d\varphi} - \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2}, \\ \xi = \frac{1}{r_e} \frac{dr_e}{d\varphi} - \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi}, \\ \eta = -\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{dr}{d\lambda}, \end{cases} \quad (55)$$

где

$$\frac{dr_e}{d\varphi} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial \varphi}}{\frac{\partial V}{\partial r_e}}, \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi}}{\frac{\partial U}{\partial r}}, \quad \frac{dr}{d\lambda} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial \lambda}}{\frac{\partial U}{\partial r}}. \quad (56)$$

Из сферического прямоугольного треугольника $P_N Z_a T$ (рис. 22) имеем

$$\begin{cases} \cos(\lambda_a - \lambda_g) = \text{tg} \varphi_a \text{ctg}(\varphi_g + \xi), \\ \sin(\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi_a = \sin \eta \end{cases} \quad (57)$$

или, приближенно,

$$\begin{cases} \varphi_a - \varphi_g = \xi, \\ (\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi_a = \eta. \end{cases} \quad (58)$$

Астрономический азимут A и геодезический азимут α_g измеряются в различных плоскостях; однако относительная погрешность от измерения обоих азимутов в плоскости астрономического горизонта не превышает величины порядка 10^{-8} . Поэтому в сферическом треугольнике $S_g S_a P_N$ можно принять $S_a P_N = 180^\circ - \varphi_a$; тогда, с той же степенью точности,

$$A - \alpha_g = (\lambda_a - \lambda_g) \sin \varphi_a = \eta \operatorname{tg} \varphi_a. \quad (59)$$

Соотношение (59) называется *уравнением Лапласа*; оно дает возможность вычисления геодезического азимута для тех триангуляционных пунктов, на которых, кроме астрономического азимута A , из наблюдений определяется и астрономическая долгота λ_a (*пункты Лапласа*).

Разности между астрономическими и геодезическими координатами часто достигают $5'' - 10''$, иногда $20''$; отклонения отвеса в $30'' - 40''$ чрезвычайно редки (уклонению в $1''$ по долготе на широте $\varphi = 45^\circ$ соответствует 22 м на поверхности Земли в направлении параллели).

1) *Геоцентрические координаты.*

Кроме координатных систем на поверхности Земли необходима еще система координат, определяющая положение точек земной поверхности относительно центра принятого эллипсоида относимости (который, как можно считать с определенной степенью приближения, совпадает с центром масс Земли).

С этой целью вводят расстояние ρ от центра эллипсоида относимости, называемое *геоцентрическим радиусом-вектором*, *геоцентрическую широту* φ' – угол между радиусом-вектором ρ и плоскостью геодезического экватора, и *геоцентрическую долготу*, совпадающую с геодезической долготой λ ; *геоцентрическим зенитом* называется точка пересечения продолжения радиуса-вектора ρ с геоцентрической небесной сферой (рис. 24, а).

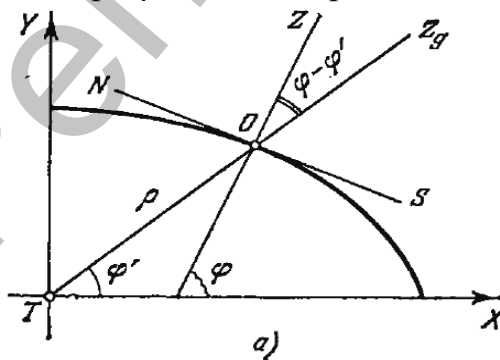
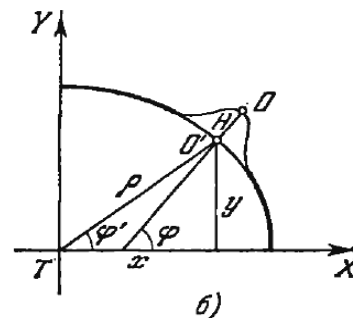


Рис. 24. а) Геоцентрическая и астрономическая широта.



б) Прямоугольные координаты точки земной поверхности.

Угол $\varphi - \varphi'$ между радиусом-вектором ρ и нормалью к эллипсоиду называется *углом вертикали*, или *приведением широты*. В астрономии геоцентрическую широту φ' иногда называют *приведенной широтой*.

Зависимость между геодезической широтой φ и геоцентрической широтой φ' имеет вид

$$\operatorname{tg} \varphi' = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi = (1 - \alpha)^2 \operatorname{tg} \varphi, \quad (60)$$

где e означает эксцентриситет эллипсоида относимости, соответствующий сжатию α этого эллипсоида. Если a_e и b – соответственно большая полуось (экваториальный радиус) и малая (полярная) полуось эллипсоида относимости, то

$$\begin{cases} e = \frac{\sqrt{a_e^2 - b^2}}{a_e}, \alpha = \frac{a_e - b}{b}, \\ e = \sqrt{2\alpha - \alpha^2}, \alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}. \end{cases} \quad (61)$$

Положение точки O на поверхности Земли можно определить высотой H этой точки по нормали к эллипсоиду относимости и прямоугольными координатами x, y точки O' пересечения этой нормали с поверхностью эллипсоида, отнесенными к системе координат XU лежащей в плоскости геодезического меридиана точки O , причем ось CX направлена в точку пересечения меридиана с экватором, ось CY – в северный геодезический полюс P'_N (рис. 24, б). Для прямоугольных координат x, y точки O имеем

$$x = C \cos \varphi, \quad y = S \sin \varphi \quad (62)$$

и

$$\rho = C \sqrt{1 - e^2 (2 - e^2) \sin^2 \varphi}, \quad (63)$$

где

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad S = (1 - e^2)C. \quad (64)$$

Угол вертикали $\varphi - \varphi'$ можно определить по формулам

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{q \sin 2\varphi}{1 + q \cos 2\varphi}, \\ \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{q \sin 2\varphi'}{1 - q \cos 2\varphi'}, \end{cases} \quad (65)$$

где

$$q = \frac{e^2}{2 - e^2}.$$

Таблица значений функций C и S по аргументу φ для эллипсоида MAC опубликована в «Приложениях» к «Астрономическому ежегоднику СССР на 1968–1971 гг.».

Функции C и S , а также геоцентрический радиус-вектор ρ (в единицах экваториального радиуса a_e земного эллипсоида) и угол вертикали $\varphi - \varphi'$ можно вычислить, воспользовавшись разложениями

$$\begin{cases} S = 0,99497418 - 0,00167082 \cos 2\varphi + 0,00000210 \cos 4\varphi, \\ C = 1,00167997 - 0,00168208 \cos 2\varphi + 0,00000212 \cos 4\varphi, \\ \rho = 0,99832707 + 0,00167644 \cos 2\varphi - 0,00000352 \cos 4\varphi, \\ \varphi - \varphi' = 692'',743 \sin 2\varphi - 1'',163 \sin 4\varphi + 0'',003 \sin 6\varphi, \end{cases} \quad (66)$$

полученными для элементов земного сфероида MAC :

$$a_e = 6378160 \text{ м}, \quad \alpha = 1/298,25.$$

Высота H точки наблюдения O над эллипсоидом относительно учитывается следующими поправками к координатам x, y точки O' :

$$\Delta x = H \cos \varphi, \quad \Delta y = H \sin \varphi.$$

Поэтому полные координаты x, y точки наблюдения O равны

$$X = C' \cos \varphi, \quad Y = S' \sin \varphi,$$

где

$$C' = a_e C + H, \quad S' = a_e S + H.$$

Ортометрическая высота h точки наблюдения O над геоидом (уровнем моря), не совпадающая, вообще говоря, с H , может быть учтена с некоторой степенью приближения, если рассматривать h как приращение геоцентрического радиуса вектора ρ , по формулам

$$\begin{cases} \rho \sin \varphi' = (S + 1,568h \cdot 10^{-7}) \sin \varphi, \\ \rho \cos \varphi' = (C + 1,568h \cdot 10^{-7}) \cos \varphi, \\ \operatorname{tg} \varphi' = (0,993305 + 0,011h \cdot 10^{-7}) \operatorname{tg} \varphi, \end{cases} \quad (67)$$

где h – в метрах.

Так как формулы (67) применяются к широте φ , приведенной к уровню моря, то при больших высотах h необходимо пользоваться более точными формулами *А.А. Михайлова*:

$$\begin{cases} (\rho + \Delta\rho) \sin \varphi' = [S + (1,5678 - 0,0136 \cos^2 \varphi)h \cdot 10^{-7}] \sin \varphi, \\ (\rho + \Delta\rho) \cos \varphi' = [C + (1,5678 + 0,0136 \cos^2 \varphi)h \cdot 10^{-7}] \cos \varphi. \end{cases} \quad (68)$$

Прямоугольные координаты x, y точки O можно выразить через приведенную широту u (не следует смешивать с геоцен-

трической широтой φ' , иногда встречающейся под этим же названием), называемую также *параметрической* или *геометрической широтой*.

Если продолжить перпендикуляр (рис. 25), опущенный на плоскость геодезического экватора из точки O , до пересечения с описанной вокруг земного сфероида сферой (радиуса a_e и с центром в C), то угол u между радиусом CP и плоскостью геодезического экватора называется *приведенной широтой*.

Очевидно, что

$$\begin{cases} x = a_e \cos u, \\ y = a_e \sqrt{1 - e^2} \sin u = a_e (1 + \alpha) \sin u. \end{cases} \quad (69)$$

Приведенная широта u связана с геодезической широтой φ и геоцентрической широтой φ' соотношениями

$$\begin{cases} \operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{tg} \varphi', \\ = (1 - \alpha) \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{1 - \alpha} \operatorname{tg} \varphi', \\ (\varphi - u)'' = \frac{1}{\sin 1''} \left(\frac{1}{4} e^2 \sin 2\varphi + \dots \right). \end{cases} \quad (70)$$

2) Изменения географических координат.

Местная система отсчета, состоящая из системы горизонтальных координат и астрономической системы географических координат, зависит от положений астрономической вертикали и оси вращения Земли. Географические координаты, зависящие от направления вертикали относительно оси вращения Земли, подвержены влиянию изменений как в положении вертикали, так и в положении оси вращения внутри Земли.

На горизонтальные координаты оказывают влияние как изменения в направлении вертикали относительно Земли, так и перемещения вертикали в пространстве, обусловленные движением Земли вокруг центра масс, движущегося в свою очередь относительно ее оси вращения.

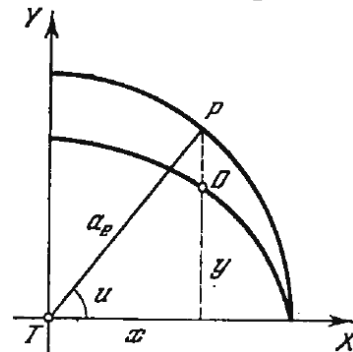


Рис. 25. Приведенная широта.

Наблюдениями была обнаружена изменяемость астрономических широт и долгот земной поверхности, в которой основную роль играет движение географических полюсов по поверхности Земли. Для непрерывного наблюдения за положением истинного географического полюса в 1895 г. была учреждена Международная служба широт (МСШ), объединявшая пять обсерваторий мира, лежащих под широтой $39^{\circ}08'$, но под различными долготами. С 1960 года МСШ была заменена Международной службой движения полюсов (МСДП) с центром в Мидзусава (Япония). В ее работе, кроме обсерваторий МСШ, принимают участие еще несколько обсерваторий.

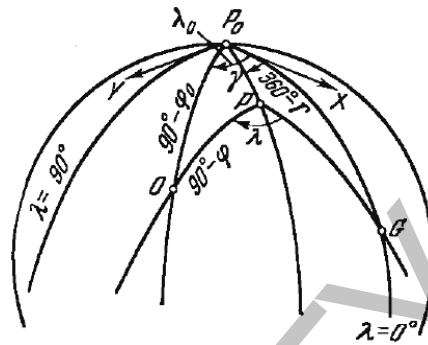


Рис. 26. Координаты истинного полюса относительно среднего полюса.

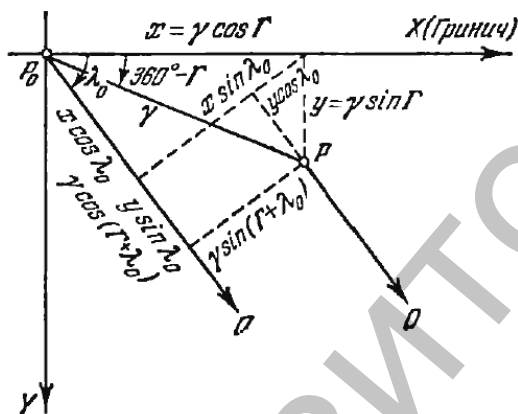


Рис. 27. Связь между истинными и средними географическими координатами.

Основная задача МСДП состоит в систематическом определении из широтных наблюдений прямоугольных координат x, y истинного географического полюса относительно среднего географического полюса; положение последнего определяется в настоящее время как среднее положение северного полюса за период 1900–1905 гг. Прямоугольные координаты x, y истинного полюса отнесены к системе координат P_0XY , начало которой совпадает с положением среднего полюса P_0 , ось P_0X направлена по касательной к среднему гриничскому меридиану к Гриничу, ось P_0Y – по касательной к среднему меридиану, отстоящему от гриничского на 90° к западу (рис. 26). Если угол γ измеряется дугой среднего меридиана истинного полюса P между истинным P и средним P_0 положениями полюса, а Γ – угол при среднем полюсе P_0 , отсчитываемый к востоку от среднего меридиана точки наблюдения O до дуги P_0P (рис. 26), то x и y истинного полюса P можно выразить через углы γ и Γ соотношениями

истинного полюса отнесены к системе координат P_0XY , начало которой совпадает с положением среднего полюса P_0 , ось P_0X направлена по касательной к среднему гриничскому меридиану к Гриничу, ось P_0Y – по касательной к среднему меридиану, отстоящему от гриничского на 90° к западу (рис. 26). Если угол γ измеряется дугой среднего меридиана истинного полюса P между истинным P и средним P_0 положениями полюса, а Γ – угол при среднем полюсе P_0 , отсчитываемый к востоку от среднего меридиана точки наблюдения O до дуги P_0P (рис. 26), то x и y истинного полюса P можно выразить через углы γ и Γ соотношениями

$$x = \gamma \cos \Gamma, \quad y = \gamma \sin \Gamma.$$

Если φ_0, λ_0 – средние значения астрономической широты и долготы точки земной поверхности, отнесенные к среднему полюсу P_0 , то истинные (мгновенные) координаты φ, λ этой точки O , отнесенные к мгновенному полюсу P , определяются через прямоугольные координаты x, y полюса P формулами (рис. 27)

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 - (x \cos \lambda_0 + y \sin \lambda_0), \\ \lambda = \lambda_0 + (x \sin \lambda_0 - y \cos \lambda_0) \operatorname{tg} \varphi_0. \end{cases} \quad (71)$$

Значения координат x, y мгновенного полюса периодически публикуются в *Circulaires ВИН*, издаваемых в Париже Международным Бюро времени (ВИН).

1.12. Планетоцентрические системы координат [25]

В первой планетоцентрической экваториальной системе координат за основную плоскость принимается плоскость экватора планеты, за основную точку отсчета – восходящий узел $\Upsilon_{\text{пл}}$ гелиоцентрической орбиты планеты на ее экваторе, т.е. точка *весеннего равноденствия для планеты*.

Положение проекции любой точки пространства на небесную сферу в такой планетоцентрической системе координат определяется угловым расстоянием D этой точки от экватора планеты, отсчитываемым по кругу склонения, проходящему через полюсы мира планеты $P_{\text{пл}}, P'_{\text{пл}}$, и дугой экватора планеты от точки весеннего равноденствия $\Upsilon_{\text{пл}}$ до круга склонения, проходящего через данную точку (рис. 28). Величина D называется *планетоцентрическим склонением* и считается положительной к северу от экватора планеты, A – *планетоцентрическое прямое восхождение* и отсчитывается от точки весеннего равноденствия $\Upsilon_{\text{пл}}$ к востоку.

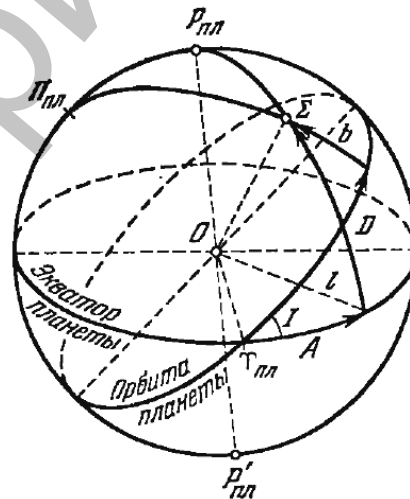


Рис. 28. Планетоцентрическая система сферических координат.

Вторая планетоцентрическая система координат использует в качестве отсчета соответственно плоскость гелиоцентрической орбиты планеты и точку весеннего равноденствия $\Upsilon_{\text{пл}}$. Эта сис-

тема является аналогом геоцентрической эклиптической системы координат.

Положение точки на планетоцентрической небесной сфере в такой системе координат определяется *планетоцентрической широтой* b , отсчитываемой от плоскости орбиты по планетоцентрическому кругу широт (большой круг планетоцентрической небесной сферы, проходящий через полюс гелиоцентрической орбиты планеты и данную точку), и *планетоцентрической долготой* l , измеряемой дугой орбиты планеты между точкой весеннего равноденствия планеты $\Upsilon_{\text{пл}}$ и кругом широт данной точки.

Выбором в качестве основной плоскости и основной точки отсчета соответственно плоскости небесного экватора и точки весеннего равноденствия Υ Земли определяется третий вид планетоцентрической системы координат – *геоэкваториальной*.

Планетоцентрические системы координат применяются при вычислениях величин, характеризующих геометрическую картину поверхности вращающейся планеты при наблюдениях с Земли и дающих возможность построить *планетографическую систему координат* на поверхности планеты, аналогичную географической координатной сетке на Земле. Таблицы числовых значений этих величин, вычисленных для ряда равноотстоящих дат, называются *эфемеридами для физических наблюдений* соответствующей планеты (Марса, Юпитера, Сатурна) и публикуются в астрономических ежегодниках.

Вид диска планеты зависит от положений Земли и Солнца на планетоцентрической небесной сфере; при этом видимое планетоцентрическое положение Земли диаметрально противоположно геоцентрическому положению планеты. В геоэкваториальной планетоцентрической системе координат планетоцентрическое склонение D_{\oplus} Земли равно по величине и противоположно по знаку геоцентрическому склонению δ планеты, а разность планетоцентрического прямого восхождения A_{\oplus} Земли и геоцентрического прямого восхождения α планеты равна $\pm 180^\circ$. То же и для планетоцентрических координат A_{\square}, D_{\square} Солнца, т.е.

$$\begin{cases} A_{\oplus} = \alpha \pm 12^h, & D_{\oplus} = -\delta, \\ A_{\square} = \alpha_{\square} \pm 12^h, & D_{\square} = -\delta_{\square}. \end{cases} \quad (72)$$

Вычисление планетоцентрических координат Земли, отнесенных к плоскости экватора и точке весеннего равноденствия $\Upsilon_{\text{пл}}$ планеты, выполняется при помощи следующих трех групп формул (рис. 29):

$$\begin{cases} \sin J \sin \hat{N} = \sin i \sin \Omega, \\ \sin J \cos \hat{N} = \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon \cos \Omega, \\ \cos J = \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon \cos \Omega, \\ \sin J \sin \omega = \sin \varepsilon \sin \Omega, \\ \sin J \cos \omega = \sin i \cos \varepsilon + \cos i \sin \varepsilon \cos \Omega \end{cases} \quad (73)$$

(сферический треугольник $\nabla^{\circ} \Omega N$);

$$\begin{cases} \sin I \sin \Omega' = \sin J \cos(\hat{N} - \alpha_0), \\ \sin J \cos \Omega' = -\cos J \cos \delta_0 + \sin J \sin \delta_0 \sin(\hat{N} - \alpha_0), \\ \cos I = \cos J \sin \delta_0 + \sin J \cos \delta_0 \sin(\hat{N} - \alpha_0), \\ \sin I \sin(\Lambda - \omega) = -\cos \delta_0 \cos(\hat{N} - \alpha_0), \\ \sin I \cos(\Lambda - \omega) = -\sin J \sin \delta_0 + \cos J \cos \delta_0 \sin(\hat{N} - \alpha_0) \end{cases} \quad (74)$$

(сферический треугольник $\nabla_{пл} NQ$);

$$\begin{cases} \cos D_{\oplus} \cos(A_{\oplus} - \Omega') = \cos \delta \sin(\alpha_0 - \alpha), \\ \cos D_{\oplus} \sin(A_{\oplus} - \Omega') = -\cos \delta_0 \sin \delta + \sin \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha_0 - \alpha), \\ \sin D_{\oplus} = -\sin \delta_0 \sin \delta - \cos \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha_0 - \alpha), \\ \cos D_{\oplus} \sin P = \cos \delta_0 \sin(\alpha_0 - \alpha), \\ \cos D_{\oplus} \cos P = \sin \delta_0 \cos \delta - \cos \delta_0 \sin \delta \cos(\alpha_0 - \alpha) \end{cases} \quad (75)$$

(сферический треугольник $P_{пл} EP$).

В формулах (73)–(75) введены следующие обозначения (рис. 29):

α_0, δ_0 – геоцентрические экваториальные координаты северного полюса экватора планеты $P_{пл}$,

$\hat{N} = \nabla N$ – угловое расстояние от точки весеннего равноденствия до восходящего узла орбиты планеты на экваторе Земли,

J – наклон орбиты планеты к экватору Земли,

ω – угловое расстояние между восходящими узлами орбиты планеты на экваторе Земли и на эклиптике,

Ω' – планетоцентрическое прямое восхождение восходящего узла экватора планеты на экваторе Земли,

I – наклон орбиты планеты к экватору планеты,

Λ – планетоцентрическая долгота восходящего узла орбиты планеты на эклиптике, измененная на $\pm 180^\circ$,

Ω – геоцентрическая долгота восходящего узла орбиты планеты на эклиптике,

i – наклон орбиты планеты к эклиптике,

- ε – наклон эклиптики к экватору,
 P – угол положения оси вращения планеты на геоцентрической небесной сфере, отсчитываемый при центре планеты от направления на северный полюс мира к востоку,
 E, S – положения Земли и Солнца на планетоцентрической небесной сфере,
 \square – планетоцентрическая долгота Солнца.

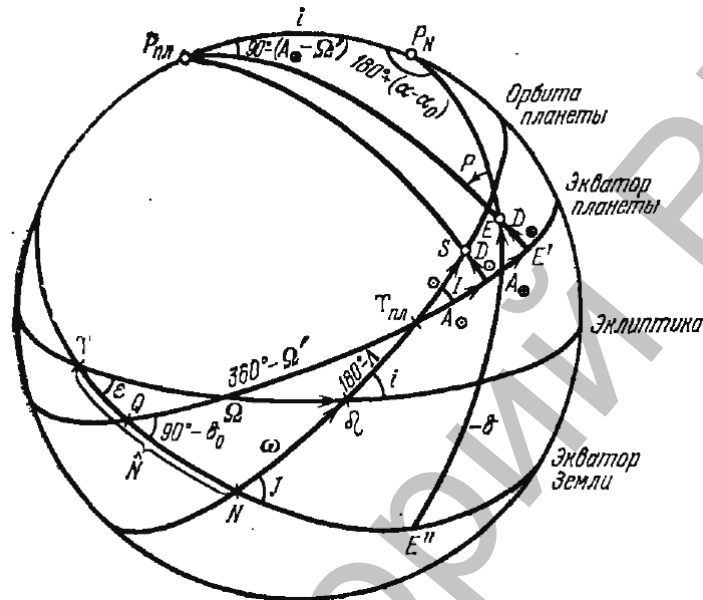


Рис. 29. Планетоцентрическая небесная сфера. Связь между геоцентрическими и планетоцентрическими сферическими координатами.

При этом *видимые координаты* α, δ планеты, публикуемые в «Астрономическом ежегоднике», приводим к *среднему равноденствию и экватору* даты вычитанием нутации:

$$\begin{cases} \Delta\alpha^s = \frac{\Delta\psi}{15} (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) - \frac{\Delta\varepsilon}{15} \operatorname{tg} \delta \cos \alpha, \\ \Delta\delta'' = \sin \varepsilon \cos \alpha \Delta\psi + \sin \alpha \Delta\varepsilon. \end{cases} \quad (76)$$

Планетоцентрическую долготу Солнца \square находим по формуле

$$\operatorname{tg}(\square - \Lambda) = \operatorname{tg}(l - \Omega) \operatorname{sec} i, \quad (77)$$

где l – гелиоцентрическая долгота планеты.

Планетоцентрические координаты A_\square, D_\square Солнца вычисляются по формулам

$$\begin{cases} \operatorname{tg} A_\square = \operatorname{tg} \square \cos I, \\ \sin D_\square = \sin \square \sin I. \end{cases} \quad (78)$$

ГЛАВА 2

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

В этой главе приводятся основные сведения о задаче двух тел, в частности, различные формы дифференциальных уравнений и их первых интегралов. Также в главе дано общее решение задачи двух тел для различных типов движения (эллиптического, гиперболического, параболического и прямолинейного). Выводы и дополнительные подробности можно найти в [26]–[30].

2.1. Общая теория невозмущенного кеплеровского движения

2.1.1. Постановка задачи. Различные формы дифференциальных уравнений движения

Пусть в пространстве имеется изолированная система двух тел P_0 и P , с массами m_0 и m , и пусть эти тела притягиваются друг к другу как материальные точки согласно закону всемирного тяготения Ньютона (это строго справедливо для тел сферической структуры и приближенно – для тел, размеры которых малы по сравнению с разделяющим их расстоянием). Требуется изучить движение одного тела относительно другого. Движение, получаемое на основе задачи двух тел, называется *невозмущенным кеплеровским движением*.

1) *Дифференциальные уравнения движения в абсолютной системе координат.*

Возьмем абсолютную систему координат $O\xi\eta\zeta$ и обозначим через ξ_0, η_0, ζ_0 координаты центра масс тела P_0 , а через ξ_1, η_1, ζ_1 – координаты центра масс тела P . Тогда дифференциальные уравнения движения тел P_0 и P запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi_0}{dt^2} &= fm \frac{\xi - \xi_0}{r^3}, & \frac{d^2\xi}{dt^2} &= fm_0 \frac{\xi_0 - \xi}{r^3}, \\ \frac{d^2\eta_0}{dt^2} &= fm \frac{\eta - \eta_0}{r^3}, & \frac{d^2\eta}{dt^2} &= fm_0 \frac{\eta_0 - \eta}{r^3}, \\ \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} &= fm \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3}, & \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= fm_0 \frac{\zeta_0 - \zeta}{r^3}, \end{aligned} \quad (1)$$

где f – постоянная тяготения, а

$$r = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2} \quad (2)$$

есть расстояние между телами P_0 и P .

Абсолютная система координат $O\xi\eta\zeta$ на практике не является удобной. Поэтому приходится пользоваться другими системами координат.

2) *Дифференциальные уравнения относительного движения.*

Возьмем прямоугольную систему координат P_0 xuz с началом в центре масс тела P_0 , с осями P_0x, P_0y, P_0z , соответственно параллельными осям $O\xi, O\eta, O\zeta$. Тогда формулы преобразования координат имеют вид

$$\xi_1 = \xi_0 + x, \quad \eta_1 = \eta_0 + y, \quad \zeta_1 = \zeta_0 + z. \quad (3)$$

Дифференциальные уравнения относительного движения тела P запишутся следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3}, \quad (4)$$

где

$$\mu = f(m_0 + m), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (5)$$

Дифференциальные уравнения (4) описывают невозмущенное кеплеровское движение планеты относительно Солнца, невозмущенное движение спутника относительно планеты, невозмущенное движение искусственного спутника относительно Земли и т.д.

3) *Дифференциальные уравнения относительного движения в цилиндрических координатах.*

Введем цилиндрические координаты ρ, λ, z по формулам

$$x = \rho \cos \lambda, \quad y = \rho \sin \lambda, \quad z = z. \quad (6)$$

Тогда дифференциальные уравнения движения тела P относительно P_0 будут иметь вид

$$\begin{cases} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = -\frac{\mu\rho}{r^3}, \\ \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} \right) = 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3}, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

а μ определяется формулой (5).

4) *Дифференциальные уравнения относительного движения в сферических координатах.*

Пусть r, φ, λ – сферические координаты, определяемые формулами

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = r \sin \varphi. \quad (8)$$

Тогда движение тела P относительно P_0 описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - r \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \cos^2 \varphi = -\frac{\mu}{r^2}, \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) + r^2 \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\lambda}{dt} \cos^2 \varphi \right) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где μ дается формулой (5).

5) *Дифференциальные уравнения относительного движения в форме Клеро–Лапласа.*

Из второго уравнения (7) находим интеграл площадей

$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = c, \quad (10)$$

где c – произвольная постоянная. Если в начальный момент $t = t_0$

$$\rho = \rho_0, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda}_0,$$

то $c = \rho_0^2 \dot{\lambda}_0$.

Введем переменные u и s по формулам

$$u = \frac{1}{\rho}, \quad s = \frac{z}{\rho}. \quad (11)$$

Тогда, приняв за независимую переменную долготу λ , уравнения (7) можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{d\lambda^2} + u = \frac{\mu}{c^2} (1 + s^2)^{-3/2}, \\ \frac{d^2 s}{d\lambda^2} + s = 0. \end{cases} \quad (12)$$

После того как из уравнений (12) переменные u и s будут найдены как функции λ , уравнение (10) позволит связать долготу λ со временем t .

Дифференциальные уравнения в форме Клеро–Лапласа были использованы Лапласом в теории движения Луны.

б) *Каноническая форма уравнений относительного движения.*

Уравнения (14) можно записать в канонической форме:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, & \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, & \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z}, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r}. \quad (14)$$

Примем теперь за обобщенные координаты q_1, q_2, q_3 сферические координаты

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \lambda. \quad (15)$$

Тогда обобщенные импульсы p_1, p_2, p_3 определяются формулами

$$p_1 = \dot{r}, \quad p_2 = r^2 \dot{\varphi}, \quad p_3 = r^2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}, \quad (16)$$

а канонические уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1,2,3), \quad (17)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} + \frac{p_3^2}{q_1^2 \cos^2 q_2} \right) - \frac{\mu}{q_1} \quad (18)$$

есть функция Гамильтона в новых переменных.

2.1.2. Первые интегралы уравнений невозмущенного кеплеровского движения

Дифференциальные уравнения (4) допускают следующие первые интегралы.

Интегралы площадей:

$$\begin{cases} y\dot{z} - z\dot{y} = c_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} = c_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} = c_3, \end{cases} \quad (19)$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные (*постоянные площадей*).

Интеграл энергии (живой силы):

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad (20)$$

где h – произвольная постоянная (*постоянная энергии* или *постоянная живой силы*).

Если через V обозначить скорость тела P относительно P_0 , то интеграл энергии можно записать в виде

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \quad (21)$$

Интеграл Лапласа:

$$\begin{cases} -\frac{\mu x}{r} + \dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \dot{z}(z\dot{x} - x\dot{z}) = \lambda_1, \\ -\frac{\mu y}{r} + \dot{z}(y\dot{z} - z\dot{y}) - \dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \lambda_2, \\ -\frac{\mu z}{r} + \dot{x}(z\dot{x} - x\dot{z}) - \dot{y}(y\dot{z} - z\dot{y}) = \lambda_3, \end{cases} \quad (22)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – произвольные постоянные (*постоянные Лапласа*).

Интегралы Лапласа можно также записать в виде

$$\begin{cases} -\frac{\mu x}{r} + \dot{y}c_3 - \dot{z}c_2 = \lambda_1, \\ -\frac{\mu y}{r} + \dot{z}c_1 - \dot{x}c_3 = \lambda_2, \\ -\frac{\mu z}{r} + \dot{x}c_2 - \dot{y}c_1 = \lambda_3. \end{cases} \quad (23)$$

Между постоянными интегрирования имеют место две следующие зависимости:

$$\begin{cases} c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - h(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) = \mu^2. \end{cases} \quad (24)$$

Поэтому из семи приведенных здесь интегралов только пять являются независимыми.

Вектор момента количества движения и вектор Лапласа.

Равенства (19) показывают, что постоянные c_1, c_2, c_3 суть проекции вектора момента количества движения (на единицу массы) тела P на координатные оси. Модуль этого вектора (в дальнейшем будем его называть *постоянной площадью*) равен

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

а его направляющие косинусы относительно осей x, y, z будут

$$\frac{c_1}{c}, \frac{c_2}{c}, \frac{c_3}{c}.$$

Рассмотрим вектор λ , проекции которого на координатные оси равны $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Этот вектор, модуль которого

$$\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2},$$

а направляющие косинусы суть

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}, \frac{\lambda_3}{\lambda},$$

называется *вектором Лапласа*.

Из равенства (24) следует, что вектор момента количества движения и вектор Лапласа перпендикулярны друг другу.

2.1.3. Типы невозмущенного кеплеровского движения

Из интегралов площадей (19) и интегралов Лапласа (22) находим

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0, \quad (25)$$

$$\mu r + \lambda_1x + \lambda_2y + \lambda_3z = c^2. \quad (26)$$

Уравнение (25) показывает, что движение тела P происходит в плоскости, проходящей через точку P_0 перпендикулярно к вектору момента количества движения. Поскольку уравнение (26) определяет поверхность второго порядка, то траектория тела P есть *кривая второго порядка – коническое сечение*.

1) *Орбитальные координаты.*

Возьмем новую систему координат $P_0\xi\eta\zeta$, ось $P_0\xi$ которой направлена по вектору Лапласа, ось $P_0\zeta$ – по вектору момента количества движения, а ось $P_0\eta$ дополняет систему до правой. Тогда формулы преобразования координат будут иметь вид

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\lambda_1}{\lambda}x + \frac{\lambda_2}{\lambda}y + \frac{\lambda_3}{\lambda}z, \\ \eta &= \frac{c_2\lambda_3 - c_3\lambda_2}{c\lambda}x + \frac{c_3\lambda_1 - c_1\lambda_3}{c\lambda}y + \frac{c_1\lambda_2 - c_2\lambda_1}{c\lambda}z, \\ \zeta &= \frac{c_1}{c}x + \frac{c_2}{c}y + \frac{c_3}{c}z, \end{aligned}$$

в силу чего уравнения (25) и (26) преобразуются к виду

$$\zeta = 0, \quad \mu r + \lambda\xi = c^2. \quad (27)$$

Переменные ξ и η называются *орбитальными координатами*.

2) *Уравнение орбиты в полярных координатах.*

Пусть

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v. \quad (28)$$

Тогда из (27) находим

$$r = \frac{P}{1 + e \cos v}, \quad (29)$$

где

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (30)$$

Уравнение (29) есть полярное уравнение канонического сечения, фокус которого находится в начале координат (точке P_0). Величина p называется (фокальным) *параметром* конического сечения, e – *эксцентриситетом*, полярный угол ν – *истинной аномалией*.

Из уравнения (29) следует, что минимальное значение радиуса-вектора r достигается при $\nu = 0$; соответствующая этому значению r точка орбиты называется *перицентром*. В случае движения тела относительно Солнца перицентр называют *перигелием*, в случае движения тела относительно Земли – *перигеем* и т.д. Поскольку эта точка лежит на оси $P_0\xi$, вектор Лапласа направлен в перицентр орбиты. Для ограниченных в пространстве движений при $\nu = \pi$ радиус-вектор r достигает максимального значения. Соответствующая ему точка орбиты называется *апоцентром*. В случае движения тела относительно Солнца она называется *афелием*, а в случае движения тела относительно Земли – *апогеем*. Прямая, соединяющая апоцентр и перицентр, носит название *линии апсид*.

3) Классификация орбит в задаче двух тел.

Из равенств (24) и (30) находим формулу

$$h = \frac{\mu^2}{c^2}(e^2 - 1), \quad (31)$$

связывающую постоянные h, c и e , а из интеграла энергии имеем

$$V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} + h, \quad (32)$$

где r_0 и V_0 – значения радиуса-вектора и скорости в начальный момент времени.

В зависимости от начальных условий или постоянных интегрирования будем иметь следующие типы орбит:

а) эллиптическая орбита

$$c \neq 0; \quad 0 < e < 1, \quad h < 0, \quad V_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, \quad \lambda < \mu; \quad (33)$$

б) *круговая орбита* (круговая орбита может рассматриваться так же, как частный случай эллиптической ($e = 0$))

$$c \neq 0; \quad e = 0, \quad h = -\frac{\mu}{r_0} < 0, \quad V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \quad \lambda = 0; \quad (34)$$

в) *параболическая орбита*

$$c \neq 0; \quad e = 1, \quad h = 0, \quad V_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, \quad \lambda = \mu; \quad (35)$$

г) *гиперболическая орбита*

$$c \neq 0; \quad e > 1, \quad h > 0, \quad V_0 > \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, \quad \lambda > \mu; \quad (36)$$

д) *прямолинейная траектория*

$$c = 0. \quad (37)$$

Условия (33)–(37) легко вытекают из формул (29)–(32).

Следует заметить, что при $c = 0$ и $h < 0$ движение будет происходить по отрезку прямой, при $c = 0$ и $h = 0$ – вдоль луча, и, наконец, при $c = 0$, $h > 0$ – вдоль всей прямой. Таким образом, если $h < 0$, то невозмущенное движение будет происходить в ограниченном пространстве, а если $h \geq 0$, то мы будем иметь неограниченное в пространстве движение.

4) *Первая и вторая космические скорости.*

Наименьшая начальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли (ИСЗ), называется *первой космической скоростью*. Она равна скорости кругового движения (*круговой скорости*) на данной высоте, т.е.

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \quad (38)$$

где μ есть произведение постоянной тяготения на массу Земли (массой ИСЗ можно пренебречь), а r_0 – геоцентрическое расстояние ИСЗ. На поверхности Земли первая космическая скорость составляет около 7,91 км/сек.

Второй космической скоростью называется наименьшая начальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно, начав движение вблизи поверхности Земли, преодолело земное притяжение. Очевидно, она равна скорости параболического движения на данной высоте (*параболической скорости*)

$$V_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}. \quad (39)$$

Эта скорость, так же, как и V_c , меняется с высотой. Будучи приведенной к поверхности Земли, она составляет около 11,2 км/сек.

2.1.4. Элементы орбиты

Элементами орбиты называются величины, характеризующие положение орбиты в пространстве, ее размеры и форму, а также положение небесного тела на орбите. Элементы, характеризующие положение плоскости орбиты и ориентацию орбиты в этой плоскости, вводятся следующим образом. Пусть движение небесного тела рассматривается в системе координат P_0xyz (рис. 51) с началом в центре масс центрального тела P_0 , и пусть оси P_0x, P_0y, P_0z пересекают небесную сферу в точках X, Y, Z . Будем рассматривать плоскость большого круга XU как основную плоскость, а точку X – как основную точку на этом круге. Предположим, что плоскость орбиты пересекает небесную сферу по большому кругу NAM , а радиус-вектор перицентра пересекает небесную сферу в точке A . Тогда прямая $N'P_0N$, по которой плоскость орбиты пересекает основную плоскость, называется *линией узлов*. Когда движение небесного тела происходит против часовой стрелки, если смотреть из *полюса орбиты* S , точка N называется *восходящим узлом*, а точка N' – *нисходящим*. Дуга XN , обозначаемая через Ω , называется *догой восходящего узла* или просто *догой узла*. Угол MNY , обозначаемый через i , под которым плоскость орбиты пересекает основную плоскость, называется *наклоном орбиты*; наклон орбиты – это также дуга большого круга ZC . Дуга NA , обозначаемая через ω , называется *угловым расстоянием перицентра от узла* (*аргумент перицентра*). Величины Ω, i, ω составляют первую группу элементов орбиты; первые два из них характеризуют положение плоскости орбиты, а третий – ориентацию орбиты в этой плоскости. При этом очевидно, что

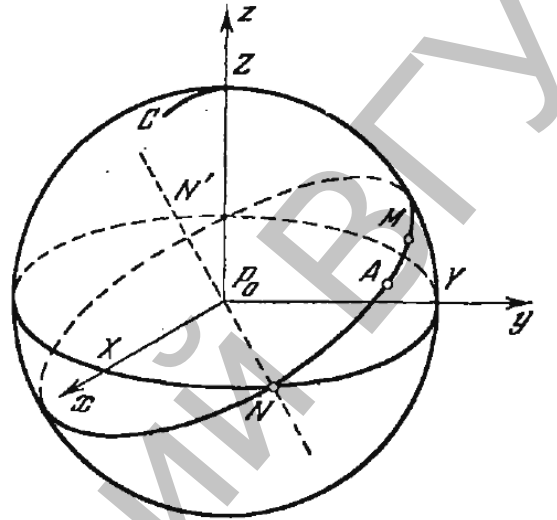


Рис. 30. Элементы орбиты.

$$0^\circ \leq i \leq 180^\circ, \quad 0^\circ \leq \Omega < 360^\circ, \quad 0^\circ \leq \omega < 360^\circ.$$

В случае движения планет за основную плоскость чаще всего принимают плоскость эклиптики, а за основную точку – точку весеннего равноденствия. В теории движения ИСЗ в качестве основной плоскости обычно берут плоскость экватора, а за основную точку – точку весеннего равноденствия. В первом случае

элементы орбиты называются *эллиптическими*, во втором – *эксцентриситетными*.

Элементы, характеризующие размеры и форму орбиты, – это *параметр* p и *эксцентриситет* e .

Последним, шестым элементом является τ – *момент прохождения через перицентр*. Этот элемент определяет положение небесного тела на орбите.

Элементы $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$ называются *кеплеровскими элементами*. Они определяют орбиту независимо от ее типа. Различие будет лишь в том, что для эллиптической орбиты $e < 1$, для параболической $e = 1$ и для гиперболической $e > 1$.

2.1.5. Формулы, связывающие постоянные интегрирования и элементы орбиты

Формулы, связывающие семь постоянных интегрирования $c_1, c_2, c_3; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; h$ и пять независимых элементов орбиты p, e, i, Ω, ω , имеют вид

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{\mu p} \sin i \sin \Omega, \\ c_2 = -\sqrt{\mu p} \sin i \cos \Omega, \\ c_3 = \sqrt{\mu p} \cos i, \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu e (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i), \\ \lambda_2 = \mu e (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i), \\ \lambda_3 = \mu e \sin \omega \sin i, \end{cases} \quad (41)$$

$$c = \sqrt{\mu p}, \quad \lambda = e\mu, \quad h = -\frac{\mu}{p}(1 - e^2). \quad (42)$$

Шестой элемент τ является постоянной интегрирования, возникающей при решении дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}, \quad (43)$$

связывающего истинную аномалию v с временем t .

2.2. Основные формулы невозмущенного кеплеровского движения

2.2.1. Эллиптическое движение

Эллиптическое движение определяется следующими условиями:

$$c \neq 0; \quad h < 0, \quad V_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, \quad (44)$$

где h – постоянная энергии, r_0 и V_0 – значения модулей радиуса-вектора и скорости в начальный момент времени.

1) *Элементы орбиты.*

Эллиптическая орбита характеризуется следующей основной системой элементов: a – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклон, Ω – долгота восходящего узла, ω – угловое расстояние перицентра от узла, M_0 – средняя аномалия в эпоху. В литературе часто встречаются различные модификации элементов $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$. Так, вместо элемента a можно рассматривать параметр орбиты p , элемент q , среднее движение n , период обращения T , которые связаны с a формулами

$$p = a(1 - e^2), \quad q = a(1 - e), \quad (45)$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad T = \frac{2\pi}{n}. \quad (46)$$

В случае движения относительно Солнца q называется *перигелийным расстоянием*, в случае движения относительно Земли q называется *перигейным расстоянием* и т.д.

Вместо e иногда рассматривают элемент φ , определяемый формулой

$$e = \sin \varphi,$$

который и называется *углом эксцентриситета*.

Вместо ω часто вводят элемент π :

$$\pi = \Omega + \omega, \quad (47)$$

называемый *долготой перицентра*.

Вместо M_0 можно рассматривать момент прохождения через перицентр τ и среднюю долготу в эпоху ε , связанные с M_0 равенствами

$$M_0 = n(t_0 - \tau), \quad \varepsilon = \Omega + \omega + M_0, \quad (48)$$

где t_0 – начальный момент времени (эпоха).

2) Вычисление прямоугольных координат.

Пусть, как и раньше, движение тела P рассматривается в системе координат P_0xyz . Тогда для вычисления x, y, z могут служить следующие формулы:

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad (49)$$

$$E - e \sin E = M, \quad (50)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (51)$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}, \quad (52)$$

$$u = v + \omega, \quad (53)$$

$$\begin{cases} x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z = r \sin u \sin i. \end{cases} \quad (54)$$

Здесь M называется *средней аномалией*, E – *эксцентрисической аномалией*, v – *истинной аномалией*, u – *аргументом широты*, а уравнение (50) – *уравнением Кеплера*.

Формулы (49)–(54) позволяют вычислить прямоугольные координаты x, y, z для любого момента времени t , если известны элементы $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$. Действительно, вычислив по первой формуле (46) n , мы для любого момента t по формуле (49) находим M . Решив далее уравнение Кеплера (50), находим E , после чего по формулам (51)–(53) вычисляем последовательно v, r, u , а затем по формулам (54) – x, y, z .

Для решения уравнения Кеплера обычно используется метод последовательных приближений. При этом в качестве первого приближения для E принимается M или некоторая величина, для которой в зависимости от M и e построены специальные таблицы. Для значений эксцентриситета, близких к единице, приведенные выше формулы малопригодны.

Достаточно полный обзор работ, посвященных способам решения уравнения Кеплера, содержит статья [31]. Вспомогательные таблицы приводятся в [32]–[36]. Кроме того, можно указать таблицы для значений $v - M$ в зависимости от M [37]–[40]. Для вычисления положений ИСЗ И.Д. Жонголовичем и В.М. Амелиным составлены таблицы, дающие $v - M$ с точностью до $0^\circ, 01$ [41].

Радиус-вектор r и прямоугольные координаты x, y, z можно вычислять и по другим формулам, не требующим знания истинной аномалии v . Эти формулы имеют вид

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (55)$$

$$\begin{cases} \xi = a(\cos E - e), \\ \eta = \sqrt{1 - e^2} \sin E, \end{cases} \quad (56)$$

$$\begin{cases} x = P_x \xi + Q_x \eta, \\ y = P_y \xi + Q_y \eta, \\ z = P_z \xi + Q_z \eta. \end{cases} \quad (57)$$

Здесь ξ и η – орбитальные координаты, а направляющие косинусы P_x, P_y, \dots, Q_z определяются через элементы Ω, ω, i следующим образом:

$$\begin{cases} P_x = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ P_y = \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ P_z = \sin \omega \sin i, \end{cases} \quad (58)$$

$$\begin{cases} Q_x = -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ Q_y = -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ Q_z = \cos \omega \sin i. \end{cases} \quad (59)$$

Для контроля вычислений используют равенства

$$\begin{cases} P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 1, \\ Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = 1, \\ P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0. \end{cases} \quad (60)$$

При массовых вычислениях формулы (55)–(59) имеют преимущество по сравнению с формулами (51)–(54), ибо величины P_x, P_y, \dots, Q_z не зависят от времени и для каждого момента нужно вычислять лишь $E, \cos E$ и $\sin E$, после чего легко находятся r, ξ, η , а затем и x, y, z .

3) Скорость в эллиптическом движении.

Пусть V – скорость, V_r – радиальная скорость и V_n – трансверсальная скорость. Тогда

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (61)$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v, \quad (62)$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v). \quad (63)$$

Дифференцируя по времени формулы (54), найдем

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{y} = \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{z} = \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i \cdot V_n. \end{cases} \quad (64)$$

Эти формулы позволяют вычислить проекции скорости на оси координат. Для вычисления V имеем формулу

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad (65)$$

которую можно использовать для контроля.

2.2.2. Круговое движение

Круговое движение имеет место, когда

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \quad c \neq 0, \quad (66)$$

где $\mu = f(m_0 + m)$, r_0 и V_0 – начальные значения модулей радиуса-вектора и скорости.

1) *Элементы орбиты.*

Поскольку $e = 0$, положение перицентра не определено. Поэтому можно положить $\omega = 0$, и круговая орбита будет характеризоваться следующими элементами: a – радиус, i – наклон, Ω – долгота узла, M_0 – средняя аномалия в эпоху. Вместо M_0 можно рассматривать среднюю долготу в эпоху ε , определяемую формулой (48). Вместо a можно ввести среднее движение n или период обращения T по формулам (46).

2) *Вычисление прямоугольных координат.*

Все формулы кругового движения можно получить из формул эллиптического движения, если в них положить $e = 0, \omega = 0$. В случае кругового движения имеем

$$u = v = E = M.$$

Поэтому формулы (49)–(54) переходят в следующие:

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad (67)$$

$$\begin{cases} x = a(\cos M \cos \Omega - \sin M \sin \Omega \cos i), \\ y = a(\cos M \sin \Omega + \sin M \cos \Omega \cos i), \\ z = a \sin M \sin i. \end{cases} \quad (68)$$

Вместо формул (56)–(57) будем иметь

$$\begin{cases} x = aP_x \cos M + aQ_x \sin M, \\ y = aP_y \cos M + aQ_y \sin M, \\ z = aP_z \cos M + aQ_z \sin M, \end{cases} \quad (69)$$

так как

$$\xi = a \cos M, \quad \eta = a \sin M. \quad (70)$$

Здесь P_x, P_y, \dots, Q_z определяются формулами (58) и (59).

3) *Скорость в круговом движении.*

Дифференцируя формулы (68) по времени, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = an(-\sin M \cos \Omega - \cos M \sin \Omega \cos i), \\ \dot{y} = an(-\sin M \sin \Omega + \cos M \cos \Omega \cos i), \\ \dot{z} = an \cos M \sin i. \end{cases} \quad (71)$$

Скорость V найдется по формуле

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{\mu}{a}. \quad (72)$$

2.2.3. Гиперболическое движение

Гиперболическое движение имеет место, когда

$$h > 0, \quad V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}, \quad c \neq 0, \quad (73)$$

где h – постоянная энергии, r_0 и V_0 – начальные значения модулей радиуса-вектора и скорости.

1) *Элементы орбиты.*

Гиперболическая орбита характеризуется следующими элементами: a – действительная полуось, e – эксцентриситет, i – наклон, Ω – долгота узла, ω – угловое расстояние перицентра от узла, τ – момент прохождения через перицентр. Иногда рассматривают модификации этих элементов. Так, вместо a вводят параметр орбиты p или элемент q по формулам

$$p = a(e^2 - 1), \quad q = a(e - 1). \quad (74)$$

Вместо элемента ω часто рассматривают элемент

$$\pi = \Omega + \omega,$$

называемый *долготой перицентра*.

2) *Вычисление прямоугольных координат.*

Пусть движение тела P рассматривается в относительной системе координат P_0xyz . Тогда для вычисления прямоугольных координат x, y, z могут служить следующие формулы:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad (75)$$

$$e \operatorname{sh} H - H = n(t - \tau), \quad (76)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}, \quad (77)$$

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos v}, \quad (78)$$

$$u = v + \omega, \quad (79)$$

$$\begin{cases} x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z = r \sin u \sin i. \end{cases} \quad (80)$$

Здесь v – истинная аномалия, u – аргумент широты.

Для решения уравнения (76) пользуются методом последовательных приближений.

Приведенные формулы требуют вычисления истинной аномалии. Можно, однако, воспользоваться формулами, по которым радиус-вектор и прямоугольные координаты вычисляются без предварительного определения v . Эти формулы имеют такой вид:

$$r = a(e \operatorname{ch} H - 1), \quad (81)$$

$$\begin{cases} \xi = a(e - \operatorname{ch} H), \\ \eta = a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \end{cases} \quad (82)$$

$$\begin{cases} x = P_x \xi + Q_x \eta, \\ y = P_y \xi + Q_y \eta, \\ z = P_z \xi + Q_z \eta, \end{cases} \quad (83)$$

где ξ и η – орбитальные координаты, а направляющие косинусы P_x, P_y, \dots, Q_z определяются формулами (58) и (59).

Замечание. Если в формулах эллиптического движения заменить a на $-a$ и $\sqrt{-1} E$ на H , то мы получим соответствующие формулы гиперболического движения.

3) *Скорость в гиперболическом движении.*

Для вычисления проекций скорости на координатные оси нужно воспользоваться следующими формулами:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{y} = \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{z} = \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i \cdot V_n, \end{cases} \quad (84)$$

где радиальная V_r и трансверсальная V_n составляющие скорости определяются уравнениями

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v, \quad (85)$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v). \quad (86)$$

Скорость V находится из формулы $V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$.

При этом для контроля можно пользоваться интегралом энергии

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right). \quad (87)$$

2.2.4. Параболическое движение

Параболическое движение имеет место, когда

$$h = 0, \quad V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}, \quad c \neq 0; \quad e = 1, \quad (88)$$

где h – постоянная энергии, r_0 и V_0 – начальные значения модулей радиуса-вектора и скорости.

1) *Элементы орбиты.*

Параболическая орбита характеризуется следующими пятью элементами: p – параметр орбиты, i – наклон, Ω – долгота узла, ω – угловое расстояние перицентра от узла, τ – момент прохождения через перицентр. Часто вместо параметра вводят элемент

$$q = \frac{p}{2}. \quad (89)$$

В случае движения относительно Солнца q называется *перигелийным расстоянием*, а при движении относительно Земли – *перигейным расстоянием*.

Вместо элемента ω иногда рассматривают *долготу перицентра* $\pi = \Omega + \omega$.

2) *Вычисление прямоугольных координат.*

Пусть движение тела P рассматривается в относительной системе координат P_0xyz . Тогда прямоугольные координаты x, y, z могут быть вычислены по формулам

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}, \quad (90)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = n(t - \tau), \quad (91)$$

$$r = q \sec^2 \frac{v}{2}, \quad (92)$$

$$u = v + \omega, \quad (93)$$

$$\begin{cases} x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z = r \sin u \sin i. \end{cases} \quad (94)$$

Кубическое уравнение (91), называемое иногда *уравнением Баркера*, всегда имеет единственный действительный корень. Вспомогательные таблицы можно найти в [32]–[36].

Вместо формул (91)–(94) можно также воспользоваться следующими формулами:

$$\sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 = n(t - \tau), \quad (95)$$

$$r = q(1 + \sigma^2), \quad (96)$$

$$\xi = q(1 - \sigma^2), \quad n = 2q\sigma, \quad (97)$$

$$\begin{cases} x = P_x \xi + Q_x \eta, \\ y = P_y \xi + Q_y \eta, \\ z = P_z \xi + Q_z \eta, \end{cases} \quad (98)$$

где ξ и η – орбитальные координаты $\sigma = \operatorname{tg} \frac{v}{2}$, а P_x, P_y, \dots, Q_z даются уравнениями (58) и (59).

3) Скорость в параболическом движении.

Для вычисления проекций скорости на координатные оси имеем следующие формулы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{y} = \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{z} = \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i \cdot V_n, \end{cases} \quad (99)$$

где радиальная V_r и трансверсальная V_n составляющие скорости определяются уравнениями

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin v, \quad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + \cos v). \quad (100)$$

Для вычисления скорости V могут служить формулы

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V_r^2 + V_n^2, \\ V^2 = \frac{2\mu}{r}. \quad (101)$$

2.2.5. Прямолинейное движение

Прямолинейное движение имеет место, когда

$$c = 0, \quad (102)$$

где c – постоянная площадей.

Положение прямой в пространстве можно задать тремя направляющими косинусами P_x, P_y, P_z (см. (58)), между которыми существует соотношение

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 1. \quad (103)$$

Для прямоугольных координат x, y, z будем иметь следующие формулы:

$$x = P_x r, \quad y = P_y r, \quad z = P_z r, \quad (104)$$

где r – радиус-вектор.

1. *Случай $h = 0$.* Здесь

$$r = \left[r_0^{3/2} \pm \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} (t - t_0) \right]^{3/2}, \quad (105)$$

где $\mu = G(m_0 + m)$, а r_0 – значение радиуса-вектора в начальный момент $t = t_0$. Знак «+» нужно брать тогда, когда начальная скорость V_0 направлена от тела P_0 и знак «-», когда V_0 направлена к телу P_0 .

2. *Случай $h < 0$.* Для радиуса-вектора имеем

$$r = a(1 - \cos E), \quad (106)$$

где E определяется из уравнения Кеплера при $e = 1$,

$$E - \sin E = n(t - \tau), \quad (107)$$

причем

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

a и τ – постоянные интегрирования; a характеризует наибольшее удаление тела P от P_0 , τ – момент времени, когда $r = 0$.

3. *Случай $h > 0$.* Радиус-вектор задается формулой

$$r = a(\operatorname{ch} H - 1), \quad (108)$$

где H определяется из уравнения

$$\operatorname{sh} H - H = n(t - \tau), \quad (109)$$

причем $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, a и τ – постоянные интегрирования.

Замечание. Приведенные формулы показывают, что прямолинейное движение при $h \neq 0$ можно рассматривать как вырожденное эллиптическое ($h < 0$) и вырожденное гиперболическое движение ($h > 0$), когда $e = 1$.

2.2.6. Вычисление эфемерид планет и комет

Эфемеридой называется совокупность геоцентрических положений небесного тела для ряда равноотстоящих моментов времени.

В случае гелиоцентрического движения за основную плоскость принимают плоскость эклиптики, а за основное направление – направление на точку весеннего равноденствия. Поэтому элементы Ω, i, ω будут отнесены к плоскости эклиптики и точке весеннего равноденствия.

Обозначим через ρ, α, δ соответственно *геоцентрическое расстояние* небесного тела, *прямое восхождение* и *склонение* небесного тела. Для вычисления этих величин будем иметь следующие уравнения:

$$\begin{cases} \rho \cos \delta \cos \alpha = A_x \xi + B_x \eta + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha = A_y \xi + B_y \eta + Y, \\ \rho \sin \delta = A_z \xi + B_z \eta + Z. \end{cases} \quad (110)$$

Здесь X, Y, Z – *геоцентрические прямоугольные экваториальные координаты* Солнца, ξ и η – *орбитальные координаты* небесного тела,

$$\begin{cases} A_x = P_x, \\ A_y = P_y \cos \varepsilon - P_z \sin \varepsilon, \\ A_z = P_y \sin \varepsilon + P_z \cos \varepsilon, \end{cases} \quad (111)$$

$$\begin{cases} B_x = Q_x, \\ B_y = Q_y \cos \varepsilon - Q_z \sin \varepsilon, \\ B_z = Q_y \sin \varepsilon + Q_z \cos \varepsilon, \end{cases} \quad (112)$$

где ε – *наклон эклиптики к экватору*, а P_x, P_y, \dots, Q_z даются формулами (58) и (59).

Значения X, Y, Z приводятся в ежегодниках, а формулы для вычисления орбитальных координат ξ и η в случае эллиптического, гиперболического и параболического движения были рассмотрены в пунктах 2.2.1–2.2.4.

Г Л А В А 3

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ЧЕБЫШЕВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

3.1. Наилучшее приближение фиксированного элемента

3.1.1. Функционал наилучшего приближения

Пусть в нормированном пространстве L фиксировано непустое множество M . Величину

$$d(x, M) \equiv \inf_{u \in M} \|x - u\|, \quad (1)$$

т.е. расстояние элемента x от множества M , в теории аппроксимации называют *наилучшим приближением элемента x элементами множества M* (в норме L). Можно сказать, что равенством (1) множеству M сопоставлен заданный на L функционал $d(x, M)$ – *функционал наилучшего приближения*.

Напомним некоторые известные факты о функционалах наилучшего приближения.

Лемма 3.1 ([42], с. 16). *Функционал наилучшего приближения $d(x, M)$ непрерывен, каково бы ни было множество M . Если M – подпространство, то функционал является полуаддитивным:*

$$d(x + y, M) \leq d(x, M) + d(y, M) \quad (2)$$

и полуоднородным, т.е.

$$d(\lambda x, M) = |\lambda| d(x, M), \quad \forall x \in L, \forall \lambda \in \Phi \quad (3)$$

(здесь Φ – интегрирующее обозначение для поля вещественных R и комплексных C скаляров).

Заметим, что функционал наилучшего приближения не является аддитивным, даже если M – подпространство. Свойства (2) и (3) определяют d (если M – подпространство) как полунорму в L . Напомним, что *полунормой* называется действительная функция $p(x)$, заданная на линейном пространстве L , если выполняются следующие условия:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad (\lambda \in \Phi),$$

где Φ – поле скаляров.

Ясно, что d не является нормой, так как может обращаться в нуль и тогда, когда $x \neq 0$.

3.1.2. О существовании и единственности ближайшего элемента

Если в множестве M существует элемент y , реализующий в равенстве (1) нижнюю грань (т.е. являющийся ближайшим к элементу x во множестве M по норме L), то его называют *элементом наилучшего приближения для x в M* . Обозначим через $P(x)$ множество всех элементов наилучшего приближения вектора x (множество $P(x)$ естественно также назвать нелинейной проекцией вектора x на множество M).

Множество M , обладающее тем свойством, что для любого $x \in L$ в M существует элемент наилучшего приближения, будем называть *множеством существования*. Множество M называется *чебышевским* в пространстве L , если для любого $x \in L$ в нем существует единственный элемент наилучшего приближения.

Вопросы существования и единственности связаны как со структурой приближающего множества M , так и с особенностями нормы в L . Ясно, что множество существования должно быть замкнуто в L . Однако замкнутость, вообще говоря, не является достаточным условием того, что M есть множество существования.

Множество $M \subset L$ называется *локально компактным*, если предкомпактным в L является любое ограниченное подмножество из M .

Напомним, что множество M линейного пространства L называется *выпуклым*, если из того, что $x, y \in M$ следует, что

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in M \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Норма пространства L называется *строго выпуклой*, если сфера $\|x\|=1$ не содержит отрезков, т.е. из $\|x\|=\|y\|=1$ ($x \neq y$) вытекает, что

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| < 1 \quad (0 < \alpha < 1).$$

Линейное пространство соответственно со строго выпуклой нормой называют *строго нормированным*. Такое пространство можно определить также эквивалентным условием: в неравенстве $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ знак равенства достигается только в случае $y = cx$ ($c \geq 0$). Ясно, что в строго нормированном пространстве не содержит отрезков и любая сфера $\|x - x_0\| = r$.

Известно, что:

Теорема 3.1 ([42], с. 18). *Любое замкнутое локально компактное множество M линейного нормированного простран-*

ва L (в частности, любое конечномерное подпространство G из L) является множеством существования.

Для удобства приведем также следующую хорошо известную теорему об одном случае единственности элемента наилучшего приближения.

Теорема 3.2 ([42], с. 20). Пусть L – строго нормированное пространство, M – выпуклое множество в L . Если для $x \in L$ во множестве M существует элемент наилучшего приближения, то он единственен.

3.1.3. Оператор наилучшего приближения

Если M – чебышевское множество пространства L , то каждому элементу $x \in L$ отвечает единственный элемент $y \in M$, являющийся ближайшим к x в L , т.е. определяемый равенством

$$\|x - y\| = d = d(x, M).$$

Этим равенством в пространстве L задан оператор $P: L \rightarrow M$, отображающий L в M , который будем называть оператором нелинейного проектирования на множество M . Как уже сказано, оператор P не является линейным, однако справедлива следующая

Теорема 3.3 ([42], с. 21). Оператор P проектирования на чебышевское подпространство $G \subseteq L$ является однородным:

$$P(\lambda x) = \lambda P(x) \quad (x \in L, \lambda \in \Phi),$$

и, следовательно, нечетным, т.е.

$$P(-x) = -P(x).$$

Если же чебышевское множество G локально компактно (в частности, если G – конечномерное подпространство), то оператор P непрерывен.

3.2. Субдифференциал нормы и критерии элемента наилучшего приближения

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ – произвольное банахово пространство (действительное или комплексное), $(E^*, \|\cdot\|_*)$ – пространство, сопряженное пространству E . Функционал $x^* \in E^*$ называется субградиентом нормы в точке $x \in E$, если

$$\forall h \in E \quad \|x + h\| - \|x\| \geq \operatorname{Re} \langle x^*, h \rangle,$$

где $\operatorname{Re} z$ – действительная часть комплексного числа z . Множество всех субградиентов нормы в точке x называется *субдифференциалом нормы* в точке x и обозначается $\partial \|x\|$, т.е.

$$\partial \|x\| = \{x^* \in E^* : \forall h \in E) \|x + h\| - \|x\| \geq \operatorname{Re} \langle x^*, h \rangle\}.$$

Из определения вытекает, что $\partial \|0\|$ совпадает с замкнутым единичным шаром сопряженного пространства. Для удобства изложения в леммах 3.2 и 3.3 приведены известные факты о структуре множества $\partial \|x\|$.

Лемма 3.2 ([42], с. 22). *Если $x \neq 0$, то*

$$\partial \|x\| = \{x^* \in E^* : \|x^*\|_* = 1, \operatorname{Re} \langle x^*, x \rangle = \|x\|\}.$$

Определим функцию $\operatorname{sgn} z$ ($z \in \Phi$, Φ – множество комплексных чисел) следующим образом: $\operatorname{sgn} z = \{\mu \in \Phi : |\mu| \leq 1\}$, если $z = 0$; $\operatorname{sgn} z = \frac{z^*}{|z|}$, если $z \neq 0$, где z^* – число, комплексно сопряженное числу z .

Очевидно (в силу леммы 3.2), что

$$\partial |z| = \operatorname{sgn} z (z \in \Phi).$$

Таким образом, отображение $x \rightarrow \partial \|x\|$ является многозначным, т.е. каждому $x \in E$ отвечает множество $\partial \|x\| \subset E^*$ (непустота $\partial \|x\|$ вытекает из теоремы Хана–Банаха) такое, что при любом $\mu \in \partial \|x\|$ выполняются равенства:

$$\|\mu\|_* = 1, \operatorname{Re} \langle \mu, x \rangle = \|x\|.$$

Лемма 3.3 ([42], с. 24). *Множество $\partial \|x\|$ выпуклое при любом $x \in E$, кроме того*

$$\partial \|x\| = \left(\frac{\lambda^*}{|\lambda|} \right) \partial \|x\| \quad (\lambda \in \Phi, \lambda \neq 0).$$

Далее рассмотрим критерий элемента наилучшего приближения. Пусть G – подпространство существования банахова пространства E . Задачу нахождения множества $P(x)$ можно отнести к выпуклой задаче с ограничениями типа равенств ([43], с. 89), т.е.

$$f(h) = \|x - h\| \rightarrow \inf (h \in G). \quad (4)$$

Известно, что для того, чтобы точка $h_* \in G$ была решением задачи (4), необходимо и достаточно, чтобы

$$\partial f(h_*) \cap G^\perp \neq \emptyset, \quad (5)$$

где G^\perp – аннулятор подпространства G , т.е.

$$G^\perp = \{x^* \in E^* : \operatorname{Re} \langle x^*, h \rangle = 0, h \in G\}.$$

Таким образом, если нам известна пара $\langle \mu, y \rangle$, где

$$\mu \in \partial f(x-y) \cap G^\perp, \quad y \in G,$$

то мы можем установить экстремальность точки y и извлечь некоторую дополнительную информацию об операции нелинейного проектирования $P(x)$.

Сформулируем предложение 2 из [43], с. 89 в удобной для дальнейшего изложения форме.

Теорема 3.4. *Элемент $y \in P(x)$ тогда и только тогда, когда*

$$\exists \mu (\in \partial \|y-x\| \cup \partial \|x-y\|) \forall h (\in G) \operatorname{Re} \langle \mu, h \rangle = 0. \quad (6)$$

При этом

$$\max_{\mu \in G^\perp, \|\mu\|=1} \operatorname{Re} \langle \mu, x \rangle = \min_{h \in G} \|x-h\| = \|x-y\|.$$

3.3. Построение полинома наилучшего приближения для произвольной строго выпуклой функции

Далее рассмотрим метод построения полинома наилучшего приближения для дифференцируемой строго выпуклой функции.

Лемма 3.4. *Пусть $a > 0, 0 \leq e < 1,$*

$$a^2(1-e)^2 \leq s \leq a^2(1+e)^2, \quad (7)$$

тогда для дифференцируемой строго выпуклой функции $f(s)$ на отрезке (7) полиномом наилучшего приближения первой степени является полином

$$P_1(s) = a_1 s + a_0,$$

в котором

$$a_1 = \frac{f_3 - f_1}{4a^2 e}, \quad (8)$$

$$a_0 = \frac{1}{8e} \left[(1+e)^2 f_1 - (1-e)^2 f_3 \right] - \frac{f_3 - f_1}{8a^2 e} \cdot (f')^{-1} \left(\frac{f_3 - f_1}{4a^2 e} \right) + \frac{f}{2} \left[(f')^{-1} \left(\frac{f_3 - f_1}{4a^2 e} \right) \right], \quad (9)$$

$$f_1 = f \left[a^2(1-e)^2 \right], \quad f_3 = f \left[a^2(1+e)^2 \right],$$

при этом

$$\begin{aligned} |f(s) - P_1(s)| \leq d_{\max} = & \frac{1}{8e} \left[(1+e)^2 f_1 - (1-e)^2 f_3 \right] + \\ & + \frac{f_3 - f_1}{8a^2 e} \cdot (f')^{-1} \left(\frac{f_3 - f_1}{4a^2 e} \right) - \frac{f}{2} \left[(f')^{-1} \left(\frac{f_3 - f_1}{4a^2 e} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $a > 0, 0 \leq e < 1, a^2(1-e)^2 \leq s \leq a^2(1+e)^2$.
Получим точные формулы для нахождения коэффициентов полинома первой степени

$$P_1(s) = a_1s + a_0$$

наилучшего приближения в чебышевской метрике дифференцируемой строго выпуклой функции $f(s)$ ($a^2(1-e)^2 \leq s \leq a^2(1+e)^2$).

Для этого мы должны ([42] с. 31) найти максимальное значение d из системы уравнений

$$\begin{cases} d + a_0 + a_1s_1 = f(s_1), \\ -d + a_0 + a_1s_2 = f(s_2), \\ d + a_0 + a_1s_3 = f(s_3). \end{cases} \quad (11)$$

Так как определитель системы (7)

$$\Delta = 2(s_3 - s_1),$$

то

$$d = \frac{s_2 - s_1}{2(s_3 - s_1)} \cdot [f(s_3) - f(s_1)] - \frac{1}{2} [f(s_2) - f(s_1)].$$

Выясним знак частной производной $\frac{\partial d}{\partial s_1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial s_1} &= -f'(s_1) \cdot \frac{s_2 - s_1}{2(s_3 - s_1)} + \frac{1}{2} [f(s_3) - f(s_1)] \cdot \frac{s_2 - s_3}{(s_3 - s_1)^2} + \frac{1}{2} f'(s_1) = \\ &= \frac{1}{2} f'(s_1) \left(1 - \frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{s_2 - s_3}{s_3 - s_1} \cdot \frac{f(s_3) - f(s_1)}{s_3 - s_1} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s_3 - s_2}{s_3 - s_1} \cdot f'(s_1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{s_3 - s_2}{s_3 - s_1} \cdot \frac{f(s_3) - f(s_1)}{s_3 - s_1} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s_3 - s_2}{s_3 - s_1} \left[f'(s_1) - \frac{f(s_3) - f(s_1)}{s_3 - s_1} \right] \leq 0 \end{aligned}$$

в силу монотонности производной выпуклой функции.

Таким образом, при фиксированных значениях s_2, s_3 наибольшее значение величины d достигается при $s_1 = a^2(1-e)^2$.

Аналогично $s_3 = a^2(1+e)^2$. Следовательно, остается найти такое значение s_2 , при котором максимизируется

$$d = d(s_2) = \frac{f_3 - f_1}{2a^2[(1+e)^2 - (1-e)^2]} \cdot [s_2 - a^2(1-e)^2] - \frac{1}{2} [f(s_2) - f_1],$$

где $f_1 = f[a^2(1-e)^2]$, $f_3 = f[a^2(1+e)^2]$. Так как

$$\frac{\partial d}{\partial s_2} = \frac{f_3 - f_1}{8a^2e} - \frac{1}{2} \cdot f'(s_2),$$

то видно, что уравнение

$$f'(s_2) = \frac{f_3 - f_1}{4a^2e}$$

имеет единственный корень

$$s_2^* = (f')^{-1} \left(\frac{f_3 - f_1}{4a^2e} \right).$$

Таким образом,

$$d_{\max} = \frac{1}{8e} \left[(1+e)^2 f_1 - (1-e)^2 f_3 \right] + \frac{f_3 - f_1}{8a^2e} \cdot (f')^{-1} \left(\frac{f_3 - f_1}{4a^2e} \right) - \frac{1}{2} f \left[(f')^{-1} \left(\frac{f_3 - f_1}{4a^2e} \right) \right]. \quad (12)$$

Подставляя найденное значение d_{\max} в систему уравнений (7) (при этом воспользуемся первым и третьим уравнениями), находим значения коэффициентов a_1 и a_0 :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 a^2 (1-e)^2 = f_1 - d_{\max}, \\ a_0 + a_1 a^2 (1+e)^2 = f_3 - d_{\max}. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения полученной системы первое, получаем

$$a_1 = \frac{f_3 - f_1}{4a^2e}. \quad (13)$$

и, далее,

$$\begin{aligned} a_0 &= f_1 - d_{\max} - \frac{(f_3 - f_1)(1-e)^2}{4e} = \\ &= \frac{1}{4e} \left[(1+e)^2 f_1 - (1-e)^2 f_3 \right] - d_{\max}. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{s}},$$

тогда слагаемое

$$\frac{1}{4e} \left[(1+e)^2 f_1 - (1-e)^2 f_3 \right],$$

входящее в выражение (14) для a_0 , будет иметь вид

$$\frac{1}{4e} \left[\frac{(1+e)^2}{a(1-e)} - \frac{(1-e)^2}{a(1+e)} \right] = \frac{1}{4ae} \left[\frac{(1+e)^3 - (1-e)^3}{1-e^2} \right] = \frac{3+e^2}{2a(1-e^2)}.$$

Применяя равенство (13), находим

$$a_1 = \frac{f_3 - f_1}{4a^2e} = \frac{1}{4a^2e} \left[\frac{1}{a(1+e)} - \frac{1}{a(1+e)} \right] = -\frac{1}{2a^3(1-e^2)}. \quad (15)$$

Теперь вычислим величины, входящие в выражение для d_{\max} :

$$s_2^* = (f')^{-1} \left(\frac{f_3 - f_1}{4a^2e} \right) = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \cdot (-1)^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} (a^3)^{\frac{2}{3}} (1-e^2)^{\frac{2}{3}} = a^2 (1-e^2)^{\frac{2}{3}},$$

здесь $(f')^{-1}$ – функция, обратная производной f' , т.е.

$$(f')^{-1}(t) = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}.$$

Далее

$$f \left[(f')^{-1} \left(\frac{f_3 - f_1}{4a^2e} \right) \right] = \frac{1}{a(1-e^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} d_{\max} &= \frac{3+e^2}{4a(1-e^2)} - \frac{a^2(1-e^2)^{\frac{2}{3}}}{4a^2(1-e^2)} - \frac{1}{2a(1-e^2)^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \frac{3+e^2}{4a(1-e^2)} - \frac{1}{4a(1-e^2)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2a(1-e^2)^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \frac{1}{4a(1-e^2)^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{3+e^2}{(1-e^2)^{\frac{2}{3}}} - 3 \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя выражение (16) в правую часть равенства (14), находим a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{3+e^2}{2a(1-e^2)} - \frac{3+e^2}{4a(1-e^2)} + \frac{3}{4a(1-e^2)^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \frac{1}{4a(1-e^2)^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{3+e^2}{(1-e^2)^{\frac{2}{3}}} + 3 \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Следовательно, для функции $g(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ многочленом наилучшего приближения на отрезке $[a^2(1-e)^2, a^2(1+e)^2]$ является многочлен

$$P_1^*(s) = a_1s + a_0,$$

в котором коэффициенты a_0, a_1 определяются равенствами (17) и (15).

Лемма 3.5. *Многочленом наилучшего приближения первой степени в равномерной (чебышевской) метрике для функции $g(r) = r^{-2}$, определенной на отрезке $[r_1, r_2]$ ($0 < r_1 < r_2$), является многочлен*

$$P_1(r) = -\frac{r_1+r_2}{(r_1r_2)^2} \cdot r + \frac{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}{2(r_1r_2)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{1/3}(r_1+r_2)^{2/3}}{(r_1r_2)^{4/3}}. \quad (18)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3.4.

Приведем выражение (18) к более удобному виду. Пусть

$$r_1 = a(1-e), \quad r_2 = a(1+e),$$

где $e \in (0, 1)$, тогда

$$\begin{aligned} d_{\max} &= \frac{a^2 \left[(1-e)^2 + 1 - e^2 + (1+e)^2 \right]}{2a^4(1-e^2)^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{1/3} a^{2/3} 2^{2/3}}{a^{8/3}(1-e^2)^{4/3}} = \\ &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{3+e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a^2(1-e^2)^{4/3}} = \\ &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{(1-e^2)^{4/3}} \left[\frac{3+e^2}{(1-e^2)^{2/3}} - 3 \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее

$$a_1 = -\frac{a(1-e+1+e)}{a^4(1-e^2)^2} = -\frac{2}{a^3(1-e^2)^2}; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{a^2(3+e^2)}{2a^4(1-e^2)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a^2(1-e^2)^{4/3}} = \\ &= \frac{1}{2a^2(1-e^2)^{4/3}} \left[\frac{3+e^2}{(1-e^2)^{2/3}} + 3 \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Приведем следующий пример: если в выражении (19) положить

$$a=149,59787 \cdot 10^6 \text{ км}, \quad e=0,016709,$$

т.е. взять в качестве a одну астрономическую единицу и в качестве e – эксцентриситет эллиптической орбиты Земли, то

$$d_{\max} = 1,872392387 \cdot 10^{-20} \left(\frac{1}{\text{км}^2} \right).$$

Лемма 3.6. Многочленом наилучшего приближения первой степени в равномерной (чебышевской) метрике для функции $g(r)=r^{-3}$ на отрезке $[r_1, r_2]$ ($0 < r_1 < r_2$) является многочлен

$$Q_1(r) = -\frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{(r_1 r_2)^3} \cdot r + \frac{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2)}{2(r_1 r_2)^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)^{3/4}}{(r_1 r_2)^{9/4}}, \quad (22)$$

причем максимальное уклонение d_{\max} имеет вид

$$d_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2)}{(r_1 r_2)^3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)^{3/4}}{(r_1 r_2)^{9/4}}. \quad (23)$$

Доказательство проводится с помощью леммы 3.4.

Приведем правую часть равенства (22) к более удобному виду, считая, что $r_1 = a(1-e)$, $r_2 = a(1+e)$. Тогда

$$a_1 = -\frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{(r_1 r_2)^3} = -\frac{3+e^2}{a^4(1-e^2)^3}; \quad (24)$$

$$a_0 = \frac{2a^3 [(1-e)^2 + (1+e)^2]}{2a^6(1-e^2)^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4} a^{3/2} (3+e^2)^{3/4}}{a^{9/2}(1-e^2)^{9/4}} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{2(1+e^2)}{(1-e^2)^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4} (3+e^2)^{3/4}}{a^3(1-e^2)^{9/4}}. \quad (25)$$

Аналогично

$$d_{\max} = \frac{2}{a^3(1-e^2)^{9/4}} \left[\frac{1+e^2}{(1-e^2)^{3/4}} - \frac{3^{1/4} (3+e^2)^{3/4}}{3} \right]. \quad (26)$$

Далее нам потребуется аппроксимировать функцию $g(r)$ вида

$$g(r) = \frac{a(1-e^2)}{r^3} - \frac{1}{r^2}, \quad (27)$$

Выясним, при каком условии функция (27) будет строго выпуклой функцией по переменной r . Так как

$$g'(r) = -\frac{3a(1-e^2)}{r^4} + \frac{2}{r^3},$$

$$g''(r) = \frac{12a(1-e^2)}{r^5} - \frac{6}{r^4},$$

то условием строгой выпуклости будет условие положительности второй производной $g''(r)$, т.е.

$$g''(r) = \frac{12a(1-e^2)}{r^5} - \frac{6}{r^4} > 0,$$

откуда

$$r < 2a(1-e^2). \quad (28)$$

Лемма 3.7. Многочленом наилучшего приближения первой степени в равномерной (чебышевской) метрике для функции (27) при выполнении условия (28) является многочлен

$$P_1(r) = a_1 r + a_0,$$

в котором

$$a_1 = -\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1+e^2}{(1-e^2)^2}, \quad (29)$$

$$a_0 = \frac{1}{2p^2} \left(3e^2 + 1 + \frac{4-3t_*}{t_*^3} \right), \quad (30)$$

$$d_{\max} = \frac{1}{2p^2} \left(1 + 3e^2 - \frac{4-3t_*}{t_*^3} \right), \quad (31)$$

t_* – единственный положительный корень алгебраического уравнения

$$(1-e^4)t^4 + 2t - 3 = 0,$$

$p = a(1-e^2)$ – фокальный параметр.

Доказательство. Предположим, что выполнено условие (28), тогда система уравнений для нахождения коэффициентов полинома наилучшего приближения будет иметь вид

$$\begin{cases} d = \frac{a(1-e^2)}{r_1^3} - \frac{1}{r_1^2} - a_0 r_1 - a_1 r_1, \\ -d = \frac{a(1-e^2)}{r_2^3} - \frac{1}{r_2^2} - a_0 r_2 - a_1 r_2, \\ d = \frac{a(1-e^2)}{r_3^3} - \frac{1}{r_3^2} - a_0 r_3 - a_1 r_3, \quad a(1-e) \leq r_1 < r_2 < r_3 \leq a(1+e). \end{cases} \quad (32)$$

В силу выпуклости функции $g(r)$ величина максимального уклонения $d = d(r_1, r_2, r_3)$ при фиксированном r_2 будет достигать своего максимума при $r_1 = a(1 - e)$, $r_3 = a(1 + e)$, т.е. система (32) примет вид

$$\begin{cases} d = \frac{e}{a^2(1-e)^2} - a_0 - a_1 a(1-e), \\ -d = \frac{a(1-e^2)}{r_2^3} - \frac{1}{r_2^2} - a_0 - a_1 r_2, \\ d = -\frac{e}{a^2(1+e)^2} - a_0 - a_1 a(1+e). \end{cases} \quad (33)$$

Обозначив для сокращения записи $r_2 = r$, получим

$$d = \frac{1}{2a^3(1-e^2)^2 r^3} \left[-(1+e^2)r^4 + a(1+3e^2)r^3 + a^3(1-e^2)^2 r - a^4(1-e^2)^3 \right].$$

Далее, пусть

$$f(r) = 2a^3(1-e^2)^2 d(r),$$

тогда

$$\begin{aligned} f'(r) &= -\frac{3}{r^4} \left[-(1+e^2)r^4 + a(1+3e^2)r^3 + a^3(1-e^2)^2 r - a^4(1-e^2)^3 \right] + \\ &+ \frac{1}{r^3} \left[-4(1+e^2)r^3 + 3a(1+3e^2)r^2 + a^3(1-e^2)^2 \right] = \\ &= 3(1+e^2) - 3(1+3e^2) \left(\frac{a}{r} \right) - 3(1-e^2)^2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 + 3(1-e^2)^3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 - \\ &- 4(1+e^2) + 3(1+3e^2) \left(\frac{a}{r} \right) + (1-e^2)^2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 = \\ &= -(1+e^2) - 2(1-e^2)^2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 + 3(1-e^2)^3 \left(\frac{a}{r} \right)^4. \end{aligned}$$

Приравнявая производную $f'(r)$ к нулю, получаем алгебраическое уравнение четвертой степени

$$(1+e^2) \left(\frac{r}{a} \right)^4 + 2(1-e^2)^2 \left(\frac{r}{a} \right) - 3(1-e^2)^3 = 0. \quad (34)$$

Далее сделаем подстановку

$$\frac{r}{a} = (1-e^2)t,$$

тогда уравнение (34) приводится к виду

$$(1+e^2)(1-e^2)^4 t^4 + 2(1-e^2)^2(1-e^2)t - 3(1-e^2)^3 = 0,$$

т.е.

$$(1-e^4)t^4 + 2t - 3 = 0. \quad (35)$$

Таким образом, нам потребуется положительный корень уравнения

$$ct^4 + 2t - 3 = 0, \quad (36)$$

где $c = 1 - e^4$. Приближенное значение этого корня можно найти итерационным методом, полагая

$$t_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot ct_n^4 + \frac{t_n}{2}. \quad (37)$$

Взяв $t_1 = 1$, получаем

$$t_2 = \frac{5}{4} - \frac{c}{4}, \quad (38)$$

$$t_3 = \frac{11}{8} - \frac{753}{1024}c + \frac{125}{256}c^2 - \frac{75}{512}c^3 + \frac{5}{526}c^4 - \frac{1}{1024}c^5. \quad (39)$$

Подставляя в правую часть равенства (39) $c = 1 - e^4$, получаем

$$t_3 = 1 + \frac{1}{8}e^4 + \frac{5}{32}e^8 + \frac{5}{64}e^{12} + \frac{15}{1024}e^{16} + \frac{1}{1024}e^{20}. \quad (40)$$

Окончательно

$$r_2 = a(1 - e^2)t_*, \quad (41)$$

где t_* – единственный положительный корень уравнения (35).

Далее вычитая из первого уравнения системы (33) третье, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{e}{a^2(1-e)^2} + \frac{e}{a^2(1+e)^2} + a_1a(1+e-1+e), \\ 2aea_1 &= -\frac{e}{a^2} \cdot \frac{2(1+e^2)}{(1-e^2)^2}, \\ a_1 &= -\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1+e^2}{(1-e^2)^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Сложив первое из уравнений системы (33) со вторым, получаем

$$\begin{aligned} 2a_0 &= \frac{e}{a^2(1-e)^2} + \frac{a(1-e^2)}{r_2^3} - \frac{1}{r_2^2} - a_1a(1-e) - a_1r_2 = \\ &= \frac{e}{a^2(1-e)^2} + \frac{a(1-e^2)}{a^3(1-e^2)^3 t_*^3} - \frac{1}{a^2(1-e^2)^2 t_*^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a(1-e)}{a^3} \cdot \frac{1+e^2}{(1-e^2)^2} + \frac{1+e^2}{a^3(1-e^2)^2} \cdot a(1-e^2)t_* = \\
& = \frac{e}{a^2(1-e)^2} + \frac{1}{a^2(1-e^2)^2 t_*^3} - \frac{1}{a^2(1-e^2)^2 t_*^2} + \\
& + \frac{(1+e^2)t_*}{a^2(1-e^2)} + \frac{(1-e)(1+e^2)}{a^2(1-e^2)^2} = \frac{e(1+e)^2 + (1-e)(1+e^2)}{a^2(1-e^2)^2} + \\
& + \frac{1}{a^2(1-e^2)^2 t_*^3} [1-t_* + (1+e^2)(1-e^2)t_*^4] = \frac{3e^2+1}{a^2(1-e^2)^2} + \\
& + \frac{1}{a^2(1-e^2)^2 t_*^3} (1-t_* - 2t_* + 3) = \frac{1}{p^2} \left(3e^2 + 1 + \frac{4-3t_*}{t_*^3} \right);
\end{aligned}$$

т.е.

$$a_0 = \frac{1}{2p^2} \left(3e^2 + 1 + \frac{4-3t_*}{t_*^3} \right), \quad (43)$$

где *фокальный параметр* $p = a(1-e^2)$.

Подставляя в выражение для d значение $r_2 = a(1-e^2)t_*$, получаем d_{max} :

$$\begin{aligned}
d_{max} &= \frac{1}{2a^3(1-e^2)^2} \left[a(1+3e^2) - a(1-e^4)t_* + \frac{a}{t_*^2} - \frac{a}{t_*^3} \right] = \\
&= \frac{1}{2a^2(1-e^2)^2} \left[1+3e^2 - \frac{(1-e^4)t_*^4 - t_* + 1}{t_*^3} \right] = \\
&= \frac{1}{2a^2(1-e^2)^2} \left(1+3e^2 - \frac{-2t_* + 3 - t_* + 1}{t_*^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2p^2} \left(1+3e^2 - \frac{4-3t_*}{t_*^3} \right). \quad (44)
\end{aligned}$$

В ряде случаев возникает необходимость аппроксимировать функцию

$$g(r) = \frac{p}{r^3} - \frac{1}{r^2} - \frac{\varepsilon R_0^2}{r^4} \quad (45)$$

полиномом $P(r) = a_1 r + a_0$. Прежде всего выясним, при каком соотношении между параметрами p и εR_0^2 функция $g(r)$ является выпуклой. Для этого найдем $g'(r)$ и $g''(r)$:

$$g'(r) = -\frac{3p}{r^4} + \frac{2}{r^3} + \frac{4\varepsilon R_0^2}{r^5}, \quad g''(r) = \frac{12p}{r^5} - \frac{6}{r^4} - \frac{20\varepsilon R_0^2}{r^6}.$$

Условием строгой выпуклости является условие

$$-6r^2 + 12pr - 20\varepsilon R_0^2 > 0$$

или, что то же самое,

$$3r^2 - 6pr + 10\varepsilon R_0^2 < 0,$$

т.е. функция $g(r)$ будет строго выпуклой на отрезке

$$\frac{3p - \sqrt{9p^2 - 30\varepsilon R_0^2}}{3} < r < \frac{3p + \sqrt{9p^2 - 30\varepsilon R_0^2}}{3},$$

если выполнены условия

$$3p^2 > 10\varepsilon R_0^2, \quad (46)$$

$$\frac{3p - \sqrt{9p^2 - 30\varepsilon R_0^2}}{3} < \frac{p}{1+e} < r < \frac{p}{1-e} < \frac{3p + \sqrt{9p^2 - 30\varepsilon R_0^2}}{3}. \quad (47)$$

Предположим, что выполнены условия (6)–(7). Система уравнений для нахождения коэффициентов многочлена наилучшего приближения будет иметь вид

$$d = \frac{p}{r_1^3} - \frac{1}{r_1^2} - \frac{\varepsilon R_0^2}{r_1^4} - a_0 - a_1 r_1, \quad (48.1)$$

$$-d = \frac{p}{r_2^3} - \frac{1}{r_2^2} - \frac{\varepsilon R_0^2}{r_2^4} - a_0 - a_1 r_2, \quad (48.2)$$

$$d = \frac{p}{r_3^3} - \frac{1}{r_3^2} - \frac{\varepsilon R_0^2}{r_3^4} - a_0 - a_1 r_3. \quad (48.3)$$

Из выпуклости функции $g(r) - a_0 - a_1 r$ следует, что при фиксированном r_2 максимальное значение d достигается при

$$r_1 = a(1-e) = \frac{p}{1+e}, \quad r_3 = a(1+e) = \frac{p}{1-e},$$

т.е. уравнения (48.1)–(48.3) будут иметь вид

$$d = \frac{(1+e)^3}{p^2} - \frac{(1+e)^2}{p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2 (1+e)^4}{p^4} - a_0 - a_1 \frac{p}{1+e}, \quad (49.1)$$

$$-d = \frac{p}{r_2^3} - \frac{1}{r_2^2} - \frac{\varepsilon R_0^2}{r_2^4} - a_0 - a_1 r_2, \quad (49.2)$$

$$d = \frac{(1-e)^3}{p^2} - \frac{(1-e)^2}{p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2 (1-e)^4}{p^4} - a_0 - a_1 \frac{p}{1-e}. \quad (49.3)$$

Вычитая из уравнения (49.1) уравнение (49.3), получаем

$$\begin{aligned}
& a_1 p \left(\frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e} \right) + \frac{1}{p^2} \left\{ (1+e)^3 - (1-e)^3 + (1-e)^2 - (1+e)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{\varepsilon R_0^2}{p^2} \left[(1-e)^4 - (1+e)^4 \right] \right\} = \frac{2a_1 p e}{1-e^2} + \frac{1}{p^2} \left[2e + 2e^3 - \frac{8e(1+e^2)\varepsilon R_0^2}{p^2} \right] = \\
& = \frac{2a_1 p e}{1-e^2} + \frac{2e}{p^2} \left[1+e^2 - \frac{4(1+e^2)\varepsilon R_0^2}{p^2} \right] = 0,
\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{a_1 p}{1-e^2} = \frac{1+e^2}{p^2} \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right),$$

т.е.

$$a_1 = \frac{1-e^4}{p^3} \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right). \quad (50)$$

Далее, обозначив $r_2 = r$,

$$\tau_1 = \frac{(1+e)^3}{p^2} - \frac{(1+e)^2}{p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2 (1+e)^4}{p^4} = \frac{e(1+e)^2}{p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2 (1+e)^4}{p^4};$$

$$\tau_2 = \frac{p}{r^3} - \frac{1}{r^2} - \frac{\varepsilon R_0^2}{r^4};$$

$$\tau_3 = \frac{(1-e)^3}{p^2} - \frac{(1-e)^2}{p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2 (1-e)^4}{p^4} = -\frac{e(1-e)^2}{p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2 (1-e)^4}{p^4},$$

найдем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \tau_1 & 1 & \frac{p}{1+e} \\ \tau_2 & 1 & r \\ \tau_3 & 1 & \frac{p}{1-e} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_1 - \tau_3 & 0 & -\frac{2ep}{1-e^2} \\ \tau_2 - \tau_3 & 0 & r - \frac{p}{1-e} \\ \tau_3 & 1 & \frac{p}{1-e} \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} \tau_1 - \tau_3 & -\frac{2ep}{1-e^2} \\ \tau_2 - \tau_3 & r - \frac{p}{1-e} \end{vmatrix} = (\tau_3 - \tau_1) \left(r - \frac{p}{1-e} \right) + (\tau_3 - \tau_2) \frac{2ep}{1-e^2},$$

т.е.

$$d = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(\tau_3 - \tau_1)(1-e^2)}{4pe} \left(r - \frac{p}{1-e} \right) + \frac{1}{2} (\tau_3 - \tau_2). \quad (51)$$

Выясним, при каком значении r величина d достигает своего максимума. Для этого найдем производную

$$\frac{\partial d}{\partial r} = \frac{(\tau_3 - \tau_1)(1 - e^2)}{4pe} - \frac{1}{2} \left(-\frac{3p}{r^4} + \frac{2}{r^3} + \frac{4\varepsilon R_0^2}{r^5} \right)$$

и решим относительно r уравнение

$$\frac{(\tau_3 - \tau_1)(1 - e^2)}{4pe} = \frac{1}{2} \left(-\frac{3p}{r^4} + \frac{2}{r^3} + \frac{4\varepsilon R_0^2}{r^5} \right). \quad (52)$$

Так как

$$\begin{aligned} \tau_3 - \tau_1 &= -\frac{e(1-e)^2}{p^2} - \frac{e(1+e)^2}{p^2} + \frac{\varepsilon R_0^2(1+e)^4}{p^4} - \frac{\varepsilon R_0^2(1-e)^4}{p^4} = \\ &= -\frac{2e(1+e^2)}{p^2} + \frac{8e\varepsilon R_0^2(1+e^2)}{p^4} = \frac{2e(1+e^2)}{p^2} \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right), \end{aligned}$$

то уравнение (52) приводится к виду

$$\frac{1-e^4}{2p^3} \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r^3} - \frac{3p}{r^4} + \frac{4\varepsilon R_0^2}{r^5} \right). \quad (53)$$

Умножая обе части уравнения (53) на $2r^5$ и перенося все слагаемые в одну сторону, получаем

$$\frac{1-e^4}{p^3} \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right) r^5 - 2r^2 + 3pr - 4\varepsilon R_0^2 = 0.$$

Сделаем подстановку $r = pt$, тогда

$$\frac{1-e^4}{p^3} \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right) p^5 t^5 - 2p^2 t^2 + 3p^2 t - 4\varepsilon R_0^2 = 0. \quad (54)$$

Разделим обе части уравнения (54) на p^2 :

$$(1-e^4) \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right) t^5 - 2t^2 + 3t - \frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} = 0. \quad (55)$$

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (55) имеет вид

$$(1-e^4)t^5 + 2t^2 - 3t = 0, \quad (56)$$

т.е. после деления на t совпадает с уравнением (35).

Осталось привести значение d к более удобному виду и найти коэффициент a_0 . Обозначив положительный корень уравнения (55) через t_* , из уравнения (51) получаем

$$\begin{aligned} d &= \frac{1-e^4}{2p^3} \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right) \left(pt_* - \frac{p}{1-e} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[-\frac{e(1-e)^2}{p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2(1-e)^4}{p^4} - \frac{p}{p^3 t_*^3} + \frac{1}{p^2 t_*^2} + \frac{\varepsilon R_0^2}{p^4 t_*^4} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(1+e)(1+e^2)}{2p^2} \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right) - \frac{e(1-e)^2}{2p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2(1-e)^4}{2p^4} + \\
&\quad + \frac{1-e^4}{2p^2} \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right) t_* - \frac{1}{2p^2 t_*^3} + \frac{1}{2p^2 t_*^2} + \frac{\varepsilon R_0^2}{2p^4 t_*^4} = \\
&= \frac{(1+e)(1+e^2)}{2p^2} - \frac{e(1-e)^2}{2p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2 \left[4(1+e)(1+e^2) + (1-e)^4 \right]}{2p^4} + \\
&\quad + \frac{1}{2p^2 t_*^4} \left[(1-e) \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right) t_*^5 - t_* + t_*^2 + \frac{\varepsilon R_0^2}{p^2} \right] = \\
&\quad = \frac{1+3e^2}{2p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2(5+10e^2+e^4)}{2p^4} + \\
&\quad + \frac{1}{2p^2 t_*^4} \left(2t_*^2 - 3t_* + \frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - t_* + t_*^2 + \frac{\varepsilon R_0^2}{p^2} \right) = \\
&= \frac{1+3e^2}{2p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2(5+10e^2+e^4)}{2p^4} + \frac{1}{2p^2 t_*^4} \left(3t_*^2 - 4t_* + \frac{5\varepsilon R_0^2}{p^2} \right).
\end{aligned}$$

Далее из уравнения (48.2)

$$\begin{aligned}
a_0 &= d + \frac{p}{p^3 t_*^3} - \frac{1}{p^2 t_*^2} - \frac{\varepsilon R_0^2}{p^4 t_*^4} - \frac{1-e^4}{p^2} \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right) t_* = \\
&= \frac{1+3e^2}{2p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2(5+10e^2+e^4)}{2p^4} + \frac{1}{2p^2 t_*^4} \left(3t_*^2 - 4t_* + \frac{5\varepsilon R_0^2}{p^2} \right) - \\
&\quad - \frac{2}{2p^2 t_*^4} \left[(1-e^4) \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right) t_*^5 - t_* + t_*^2 \right] = \\
&= \frac{1+3e^2}{2p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2(5+10e^2+e^4)}{2p^4} + \frac{1}{2p^2 t_*^4} \left(3t_*^2 - 4t_* + \frac{5\varepsilon R_0^2}{p^2} \right) - \\
&\quad - \frac{2}{2p^2 t_*^4} \left(3t_*^2 - 4t_* + \frac{5\varepsilon R_0^2}{p^2} \right) = \\
&= \frac{1+3e^2}{2p^2} - \frac{\varepsilon R_0^2(5+10e^2+e^4)}{2p^4} - \frac{1}{2p^2 t_*^4} \left(3t_*^2 - 4t_* + \frac{5\varepsilon R_0^2}{p^2} \right). \quad (57)
\end{aligned}$$

Метод построения полинома наилучшего приближения будет распространен на случай суммы m функций $g_1(s_1) + g_2(s_2) + \dots + g_m(s_m)$ независимых аргументов s_1, s_2, \dots, s_m .

Боле конкретно нас интересуют функции вида

$$g_k(s_k) = \frac{c_k}{\sqrt{s_k}} \left(0 < a_k^2(1-e_k)^2 \leq s_k \leq a_k^2(1+e_k)^2, c_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m \right),$$

а подпространство, на котором ищется полином наилучшего приближения, образовано функциями

$$h_k(s_k) = s_k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

и постоянной. Для доказательства того, что для суммы функций

$$g_1(s_1) + g_2(s_2) + \dots + g_m(s_m)$$

полиномом наилучшего приближения будет сумма соответствующих полиномов каждого слагаемого, применим теорему 3.4.

Заметим, что разность

$$\frac{1}{\sqrt{t}} - a_1 t - a_0 \quad (a^2(1-e)^2 \leq t \leq a^2(1+e)^2),$$

где $a_1 t + a_0$ – полином наилучшего приближения достигает своего максимального значения в точках

$$t_1 = a^2(1-e)^2, \quad t_3 = a^2(1+e)^2, \quad (58)$$

а своего минимального значения в точке

$$t_2 = a^2(1-e^2)^{\frac{2}{3}}. \quad (59)$$

Лемма 3.8. *Существует, по крайней мере, один функционал*

$$\mu \in C_{[t_1, t_3]}^* \quad (60)$$

который действует следующим образом:

$$\langle \mu, g \rangle = \mu_1 g(t_1) - \mu_2 g(t_2) + \mu_3 g(t_3), \quad \mu_k > 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad g \in C_{[t_1, t_3]}, \quad (61)$$

причем

$$\langle \mu, t \rangle = \mu_1 t_1 - \mu_2 t_2 + \mu_3 t_3 = 0, \quad (62)$$

$$\langle \mu, const \rangle = (\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)c = 0, \quad (63)$$

$$\|\mu\| = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \quad (64)$$

$$\left\langle \mu, \frac{1}{\sqrt{t}} - a_1 t - a_0 \right\rangle = \left\| \frac{1}{\sqrt{t}} - a_1 t - a_0 \right\|. \quad (65)$$

Здесь $\langle \mu, g \rangle$ – значение функционала μ на функции g из пространства непрерывных функций $C_{[t_1, t_3]}$.

Значения μ_1, μ_2, μ_3 найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} \mu_1(1-e)^2 - \mu_2(1-e^2)^{\frac{2}{3}} + \mu_3(1+e)^2, \\ \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 0, \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1. \end{cases} \quad (66)$$

Из второго и третьего уравнений системы (66) получаем, что

$$\mu_2 = \frac{1}{2},$$

кроме того определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1-e)^2 & -(1-e^2)^{\frac{2}{3}} & (1+e)^2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (1-e)^2 & -(1-e^2)^{\frac{2}{3}} & (1+e)^2 - (1-e)^2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2[(1+e)^2 - (1-e)^2] = 8e.$$

Далее

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -(1-e^2)^{\frac{2}{3}} & (1+e)^2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+e)^2 - (1-e^2)^{\frac{2}{3}};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (1-e)^2 & -(1-e^2)^{\frac{2}{3}} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-e^2)^{\frac{2}{3}} - (1-e)^2.$$

Таким образом,

$$\mu_1 = \frac{1}{8e} \left[(1+e)^2 - (1-e^2)^{\frac{2}{3}} \right], \quad \mu_2 = \frac{1}{2}, \quad \mu_3 = \frac{1}{8e} \left[(1-e^2)^{\frac{2}{3}} - (1-e)^2 \right].$$

Теорема 3.5. *Полиномом наилучшего приближения для суммы функций*

$$\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{\sqrt{s_k}} \quad \left(0 < a_k^2 (1-e_k)^2 \leq s_k \leq a_k^2 (1+e_k)^2, \quad c_k \geq 0, \quad k=1,2,\dots,m \right)$$

является сумма полиномов

$$\sum_{k=1}^m -\frac{c_k}{2a_k^3 (1-e_k^2)} \cdot s_k + \frac{c_k}{4a_k (1-e_k^2)^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{3+e_k^2}{(1-e_k^2)^{\frac{2}{3}}} + 3 \right].$$

Доказательство. Рассмотрим сумму двух функций

$$\Delta(s,t) = \frac{c_1}{\sqrt{s}} - a_{11}s - a_{10} + \frac{c_2}{\sqrt{t}} - a_{21}t - a_{20}.$$

Точками, в которых достигается максимальное значение $\Delta(s, t)$, являются точки

$$(s_1, t_1), (s_3, t_1), (s_3, t_3), (s_1, t_3),$$

минимальное значение достигается в точке (s_2, t_2) . Пусть $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ – функционал с нужными свойствами, построенный для функции

$$\frac{c_1}{\sqrt{s}} - a_{11}s - a_{10},$$

а $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – функционал, построенный для функции

$$\frac{c_2}{\sqrt{t}} - a_{21}t - a_{20}.$$

Применим следующую конструкцию:

$$\begin{aligned} \langle \mu\lambda, g \rangle &= \mu_1\lambda_1g(s_1, t_1) + \mu_3\lambda_1g(s_3, t_1) + \\ &+ \mu_3\lambda_3g(s_3, t_3) + \mu_1\lambda_3g(s_1, t_3) - \mu_2\lambda_2g(s_2, t_2). \end{aligned}$$

Покажем, что функционал $\mu\lambda$ обладает нужными свойствами. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \mu\lambda, s \rangle &= \mu_1\lambda_1s_1 + \mu_3\lambda_1s_3 + \mu_3\lambda_3s_3 + \mu_1\lambda_3s_1 - \mu_2\lambda_2s_2 = \\ &= (\lambda_1 + \lambda_3)\mu_1s_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)\mu_3s_3 - \mu_2\lambda_2s_2 = \lambda_2\mu_1s_1 + \lambda_2\mu_3s_3 - \mu_2\lambda_2s_2 = \\ &= \lambda_2(\mu_1s_1 + \mu_3s_3 - \mu_2s_2) = 0 \end{aligned}$$

по соответствующему свойству функционала $\mu\lambda$. Аналогично $\langle \mu\lambda, t \rangle = 0$, кроме того

$$\begin{aligned} \langle \mu\lambda, const \rangle &= \mu_1\lambda_1c + \mu_3\lambda_1c + \mu_3\lambda_3c + \mu_1\lambda_3c - \mu_2\lambda_2c = \\ &= \lambda_2(\mu_1 + \mu_3 - \mu_2)c = 0. \end{aligned}$$

Далее

$\|\mu\lambda\| = \mu_1\lambda_1 + \mu_3\lambda_1 + \mu_3\lambda_3 + \mu_1\lambda_3 + \mu_2\lambda_2 = \lambda_2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = 2\lambda_2\mu_2$, т.е. остается каждую компоненту функционала $\mu\lambda$ разделить на

$$2\lambda_2\mu_2 = \frac{1}{2}.$$

Естественно, аналогичную конструкцию можно применить для суммы трех и более функций.

ГЛАВА 4

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МНОГИХ ТЕЛ

4.1. Элементы дифференциального исчисления

Пусть E, F – банаховы пространства (оба действительные или же оба комплексные) и A – открытое множество в E . Пусть f и g – два непрерывных отображения множества A в F . Говорят ([44], с. 131), что f и g касательны в точке $x_0 \in A$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

откуда следует, что $f(x_0) = g(x_0)$. Это определение зависит только от топологий пространств E и F , потому что если f и g касательны при данных нормах в пространствах E и F , то они останутся касательными и при эквивалентных нормах. Если f и g касательны в точке x_0 и g и h касательны в точке x_0 , то из неравенства

$$\|f(x) - h(x)\| \leq \|f(x) - g(x)\| + \|g(x) - h(x)\|$$

следует, что отображения f и h касательны в точке x_0 .

Среди всех функций, касательных к функции f в точке x_0 , существует не больше одного отображения вида $x \rightarrow f(x_0) + B(x - x_0)$, где B – линейный оператор.

Говорят, что непрерывное отображение f множества A в F дифференцируемо в точке $x_0 \in A$, если существует такое линейное отображение B пространства E в F , что отображение

$$x \rightarrow f(x_0) + B(x - x_0)$$

касательно к функции f в точке x_0 . Такое отображение единственно; оно называется производной (или *производной Фреше*) отображения f в точке x_0 и обозначается символом $f'(x_0)$ или $Df(x_0)$.

Если непрерывное отображение f множества A в пространство F дифференцируемо в точке x_0 , то производная $f'(x_0)$ является непрерывным линейным отображением про-

пространства E в F . Если отображения f и g дифференцируемы в точке x_0 , то

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (cf)'(x_0) = cf'(x_0) \quad (c = \text{const}).$$

Пусть E, F и G – три банаховых пространства, A – открытая окрестность точки $x_0 \in E$, f – непрерывное отображение окрестности A в F , $y_0 = f(x_0)$, B – открытая окрестность точки y_0 в F и g – непрерывное отображение окрестности B в G . Тогда если f дифференцируемо в точке x_0 и в точке y_0 , то отображение $h = g \circ f$ (которое определено и непрерывно в некоторой окрестности точки x_0) дифференцируемо в точке x_0 и

$$h'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0).$$

В конечномерном случае, т.е. когда, например, $\dim E = m$, $\dim F = n$, отображение $f : E \rightarrow F$ можно записать в виде

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{pmatrix}.$$

Если f дифференцируемо в точке

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dots \\ x_{m0} \end{pmatrix},$$

то существуют частные производные

$$\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

а матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_m} \end{pmatrix},$$

называемая матрицей Якоби, является матрицей оператора $f'(x_0)$.

4.2. Геометрический смысл уравнений Лагранжа

Пусть $\mathbf{r}: R \rightarrow R^{3n}$ – векторная функция; запишем систему дифференциальных уравнений задачи n тел в виде

$$[G\ddot{\mathbf{r}}(t)]^{tr} = F[\mathbf{r}(t)], \quad (1)$$

считая, что кинетическая энергия задана равенством

$$T = \frac{1}{2}(G\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}),$$

где $(G\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})$ – положительно определенная квадратичная форма, $G - [3n \times 3n]$ – матрица, $G\ddot{\mathbf{r}}(t)$ – матрица размера $[3n \times 1]$, а $[G\ddot{\mathbf{r}}(t)]^{tr}$ – транспонированная, т.е. матрица размера $[1 \times 3n]$, $F[\mathbf{r}(t)]$ – матрица размера $[1 \times 3n]$.

После замены $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q})$, где $q \in Q \subseteq R^{3n}$ (Q – некоторое открытое множество в пространстве R^{3n}) в предположении, что $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ является дифференцируемым отображением, считая, что $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{r}[\mathbf{q}(t)]$, приводим уравнение (1) к виду

$$\{G\ddot{\mathbf{r}}[\mathbf{q}(t)]\}^{tr} = F\{\mathbf{r}[\mathbf{q}(t)]\}. \quad (2)$$

Далее умножим обе части уравнения (2) на производную

$$\mathbf{r}'(\mathbf{q}) = \left. \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)},$$

т.е. на матрицу Якоби $[3n \times 3n]$:

$$\{G\ddot{\mathbf{r}}[\mathbf{q}(t)]\}^{tr} \cdot \left. \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)} = F\{\mathbf{r}[\mathbf{q}(t)]\} \cdot \left. \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)}. \quad (3)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \{G\ddot{\mathbf{r}}[\mathbf{q}(t)]\}^{tr} \cdot \left. \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)} \right\} &= \{G\ddot{\mathbf{r}}[\mathbf{q}(t)]\}^{tr} \cdot \left. \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)} + \\ &+ \{G\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{q}(t)]\}^{tr} \cdot \left. \frac{d}{dt} \left[\left. \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

то

$$\begin{aligned} \{G\ddot{\mathbf{r}}[\mathbf{q}(t)]\}^{tr} \cdot \left. \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)} &= \frac{d}{dt} \left\{ \{G\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{q}(t)]\}^{tr} \cdot \left. \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)} \right\} - \\ &- \{G\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{q}(t)]\}^{tr} \cdot \left. \frac{d}{dt} \left[\left. \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим теперь, что если $T: R^{3n} \rightarrow R$, то

$$\frac{dT}{d\dot{\mathbf{r}}}: R^{3n} \rightarrow L(R^{3n}, R),$$

где L – множество всех линейных отображений из R^{3n} в R , т.е.

$$\frac{dT}{d\dot{\mathbf{r}}} = (G\dot{\mathbf{r}})^{tr}. \quad (6)$$

Из уравнения (3), учитывая равенство (5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \{G\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{q}(t)]\}^{tr} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)} \right\} - \{G\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{q}(t)]\}^{tr} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)} \right] &= \\ &= F[\mathbf{r}(\mathbf{q})] \cdot \mathbf{r}'(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

В последнем равенстве заменим $(G\dot{\mathbf{r}})^{tr}$ на $\frac{dT}{d\dot{\mathbf{r}}}$, тогда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{\mathbf{r}}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} \right) - \frac{dT}{d\dot{\mathbf{r}}} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{d\mathbf{q}} = F[\mathbf{r}(\mathbf{q})] \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}}. \quad (7)$$

Учтем тот факт, что

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{d\dot{\mathbf{q}}},$$

тогда равенство (7) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{\mathbf{r}}} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{d\dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{dT}{d\dot{\mathbf{r}}} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{d\dot{\mathbf{q}}} = F[\mathbf{r}(\mathbf{q})] \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{q}}. \quad (8)$$

В частности, если

$$F(\mathbf{r}) = U'(\mathbf{r}), \quad (9)$$

где $U(\mathbf{r})$ – силовая функция, то равенство (9) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{dT}{d\dot{\mathbf{q}}} = U'(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'(\mathbf{q}) \equiv U'(\mathbf{q}). \quad (10)$$

Таким образом, геометрический смысл перехода к уравнениям (10) состоит в замене переменных $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q})$. Если учесть, что силовая функция U зависит только от переменной \mathbf{q} , то равенство (10) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{d(T+U)}{d\dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{d(T+U)}{d\mathbf{q}} = 0. \quad (11)$$

Это и есть уравнения Лагранжа второго рода, записанные в векторной форме. Обозначив $L = T + U$, найдем, что

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{d\mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{dL}{d\dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\mathbf{q}}} \right) \right] \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{dL}{d\mathbf{q}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L \right) = 0. \quad (12)$$

Величина H , определяемая равенством

$$\begin{aligned} H &= \frac{d(T+U)}{d\dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - (T+U) = (G\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - (T+U) = \\ &= 2T - T - U = T - U = \text{const}, \end{aligned} \quad (13)$$

называется полной энергией системы. Равенство (13) означает, что на решениях уравнения (1) величина H сохраняет свое значение.

Если ввести понятие обобщенного импульса

$$p = \frac{d(T+U)}{d\dot{\mathbf{q}}},$$

то полную энергию H можно представить так:

$$H = p \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

и тогда

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{dH}{dp}, \quad \frac{dH}{d\mathbf{q}} = -\frac{dL}{d\mathbf{q}} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\mathbf{q}}} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{d(T+U)}{d\dot{\mathbf{q}}} \right) = -\frac{dp}{dt},$$

т.е. уравнения движения записаны в гамильтоновой форме.

4.3. Постановка задачи многих тел

Основной задачей небесной механики является задача о движении системы, состоящей из некоторого конечного числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Эта задача и называется *задачей многих тел*, частными случаями которой являются задачи двух, трех, четырех и т.д. тел, к которым приводятся задачи о движении различных конкретных небесных систем.

Правильнее было бы назвать эту задачу задачей о движении многих материальных точек, но термин «тело» будет напоминать о том, что рассматривается хотя и приближенная, но все же астрономическая задача.

Так как для вывода дифференциальных уравнений движения и установления их основных свойств число материальных точек системы не имеет существенного значения, то будем считать число этих точек произвольным и обозначим его через $n+1$, а материальные точки, образующие систему, обозначим буквами M_0, M_1, \dots, M_n .

Точка M_0 будет представлять обычно главное тело, которое по каким-либо причинам играет особую роль. Так, в теории движения больших планет M_0 обозначает Солнце, в теории движения спутников Юпитера M_0 обозначает Юпитер и т.д. Вовсе не обязательно, чтобы главное тело имело наибольшую массу. В кратной звездной системе примерно с одинаковыми массами за главное тело может быть выбрана любая из звезд этой системы.

Возьмем некоторую систему прямоугольных декартовых координат $Oxyz$ с началом в произвольно выбранной точке O пространства и с неизменными направлениями осей. Обозначим массу материальной точки M_i через m_i , а ее координаты через x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Эти координаты будут функциями времени t , и наша задача состоит в том, чтобы найти $3(n+1)$ неизвестных функций аргумента t .

Дифференциальные уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек будут иметь вид ([45], с. 332):

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (14)$$

где функция U , называемая *силовой функцией* системы, определяется формулой

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad (i \neq j), \quad (15)$$

в которой f – гравитационная постоянная,

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \quad (16)$$

Так как размерность силы равна размерности массы, умноженной на размерность ускорения, то размерность коэффициента f определится равенством

$$[f] = m^{-1} l^3 t^{-2}.$$

Численное значение гравитационной постоянной зависит от выбора основных единиц длины, массы и времени. В системе *CGS*

$$f = 6,673 \cdot 10^{-8}.$$

Если принять основные астрономические единицы (среднее расстояние Земли от Солнца, масса Солнца, средние солнечные сутки), то f будет иметь следующее численное значение

$$f = 0,000295912.$$

Вместо постоянной f в астрономии часто употребляется другая величина, называемая постоянной Гаусса, связанная

с f равенством $f = k^2$. В основных астрономических единицах $k = 0,01720209895$.

Уравнения (14) представляют собой систему $3(n+1)$ совместных дифференциальных уравнений второго порядка, определяющих неизвестные функции – абсолютные координаты движущихся материальных точек.

В случае двух тел в относительной системе координат (т.е. с центром в точке M_0) уравнения движения точки M_1 относительно точки M_0 будут иметь вид ([45], с. 426):

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + f(m_0 + m_1) \frac{x_1}{r_1^3} = 0, \\ \ddot{y}_1 + f(m_0 + m_1) \frac{y_1}{r_1^3} = 0, \\ \ddot{z}_1 + f(m_0 + m_1) \frac{z_1}{r_1^3} = 0; \end{cases} \quad (17)$$

где $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ есть расстояние точки M_1 от точки M_0 .

Таким образом, по существу рассматривается математическая задача, которая заключается в интегрировании системы трех дифференциальных уравнений, которую короче можно записать так:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \\ \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \\ \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = 0; \end{cases} \quad (18)$$

где μ есть некоторая постоянная, зависящая от масс m_0 и m точек M_0 и M , а $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ есть расстояние движущейся точки от начала координат.

В интегрировании и исследовании системы уравнений (18) и заключается теория невозмущенного кеплеровского движения.

В уравнениях невозмущенного движения (18) неизвестными функциями являются прямоугольные декартовы координаты движущейся точки M относительно системы координат $Oxyz$ с неизменными направлениями осей. Иногда оказывается более удобным пользоваться какими-либо другими координатами, например, цилиндрическими или сферическими.

Перейдем далее к сферическим координатам по формулам (рис. 31)

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = r \sin \varphi,$$

тогда

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi \cos \lambda + r(-\sin \varphi) \dot{\varphi} \cos \lambda + r \cos \varphi (-\sin \lambda) \dot{\lambda}, \quad (19.1)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \cos \varphi \sin \lambda + r(-\sin \varphi) \dot{\varphi} \sin \lambda + r \cos \varphi (\cos \lambda) \dot{\lambda}, \quad (19.2)$$

$$\dot{z} = \dot{r} \sin \varphi + r(\cos \varphi) \dot{\varphi}. \quad (19.3)$$

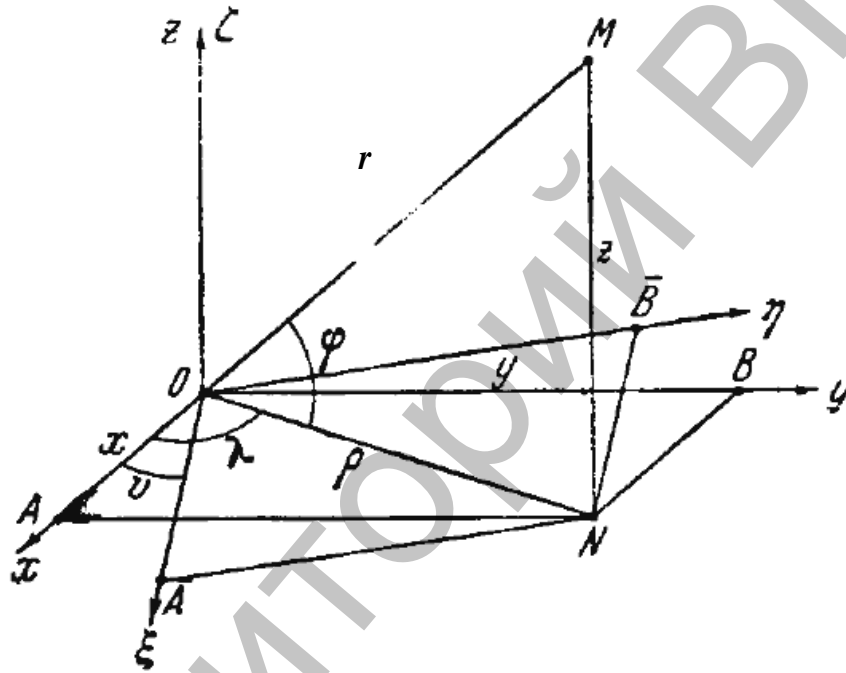


Рис. 31. Переход к сферическим координатам.

Выразим кинетическую энергию T в новых переменных (r, φ, λ) :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \\ &= \frac{1}{2}(\dot{r} \cos \varphi \cos \lambda + r(-\sin \varphi) \dot{\varphi} \cos \lambda + r \cos \varphi (-\sin \lambda) \dot{\lambda})^2 + \\ &\quad + (\dot{r} \cos \varphi \sin \lambda - r \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \lambda + r \dot{\lambda} \cos \varphi \cos \lambda)^2 + \\ &\quad + (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 = \frac{1}{2}(r^2 \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi). \end{aligned}$$

Далее, взяв

$$L = T + U = T + \frac{\mu}{r},$$

получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \dot{r}, & \frac{\partial L}{\partial r} &= r\dot{\varphi}^2 + r\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi - \frac{\mu}{r^2}; \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= r^2\dot{\varphi}, & \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= r^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\lambda}^2, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} &= r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \varphi, & \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0.\end{aligned}$$

Воспользуемся уравнениями Лагранжа

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0; \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2}, \\ \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}) + r^2\dot{\lambda}^2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{d}{dt} (r^2\dot{\lambda} \cos^2 \varphi) = \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Уравнения движения задачи двух тел в векторном виде имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}, \quad (21)$$

но тогда, обозначая через $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ векторное произведение векторов, а через (\mathbf{x}, \mathbf{y}) – скалярное, получаем

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}] + [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}] = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} [\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0,$$

т.е. $[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] = 2c = \text{const}$, и

$$\frac{1}{2}[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] = c,$$

а кинематическая величина $(1/2)[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]$ называется секториальной скоростью.

Умножая скалярно равенство (21) на $\dot{\mathbf{r}}$, получаем

$$(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}), \quad (22)$$

и, значит,

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) = -\frac{2\mu}{|\mathbf{r}|^3}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\mu}{|\mathbf{r}|}\right). \quad (23)$$

Из равенства (23) сразу же получается интеграл энергии

$$(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{2\mu}{|\mathbf{r}|} + h, \quad h = \text{const}. \quad (24)$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) &= (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) + (\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}) = \frac{2\mu}{|\mathbf{r}|} + h - \frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} \cdot |\mathbf{r}|^2 = \frac{\mu}{|\mathbf{r}|} + h, \\ \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) &= -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{1}{2|\mathbf{r}|} \cdot 2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (25)$$

Умножим обе части равенства (25) на \mathbf{r} и обе части уравнения (21) на $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$:

$$\mathbf{r} \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = -\mathbf{r} \frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (26)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = -\mathbf{r} \frac{\mu(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r}|^3}; \quad (27)$$

и, вычитая из равенства (26) равенство (27), получаем

$$\mathbf{r} \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - \ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0. \quad (28)$$

Но так как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\mathbf{r} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\right] &= \dot{\mathbf{r}} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{r} \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - \\ &- \ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - \ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0, \end{aligned}$$

то

$$\mathbf{r} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{l} = \text{const},$$

где \mathbf{l} – вектор Лапласа. Преобразуем вектор Лапласа к более удобному виду:

$$\mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \left(-\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} \right) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) - \frac{\mu \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{l}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{l} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + \mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Применяя известное свойство двойного векторного произведения

$$[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] = \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

приведем вектор Лапласа \mathbf{l} к следующему виду:

$$\mathbf{l} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + \mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = -\frac{\mu \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + [\dot{\mathbf{r}}, [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]] = -\frac{\mu \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + 2[\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{c}], \quad (29)$$

где \mathbf{c} – секториальная скорость.

Известно ([46], с. 19), что этот вектор направлен вдоль большой полуоси по направлению в перигей орбиты, а его модуль

$$|\mathbf{l}| = \mu e. \quad (30)$$

Таковы основные закономерности кеплеровского движения по эллиптической орбите.

ГЛАВА 5

АППРОКСИМАТИВНЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ НЕВОЗМУЩЕННОГО КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В данной главе разработан аппроксимативный метод исследования дифференциального уравнения для радиальной составляющей невозмущенного кеплеровского движения, основанный на аппроксимации в равномерной метрике правых частей соответствующего дифференциального уравнения.

5.1. Первый способ аппроксимации

Первое уравнение системы (4.7) для радиальной составляющей $r(t)$ невозмущенного кеплеровского движения имеет вид

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi = -\frac{\mu}{r^2}, \quad (1)$$

где (r, λ, φ) – сферические координаты движущейся точки, μ – некоторая постоянная. Если воспользоваться законом сохранения площадей

$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \varphi) = 0, \quad (2)$$

и за плоскость вращения принять плоскость Oxy , то $\varphi=0$, т.е. $\cos \varphi=1$, и система уравнений (1)–(2) примет следующий вид

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\lambda}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \\ r^2 \dot{\lambda} = q, \end{cases} \quad (3)$$

где $q = \text{const}$. Выражая $\dot{\lambda}$ из второго уравнения системы (3) и подставляя в первое уравнение, получаем

$$\ddot{r} - r \left(\frac{q}{r^2} \right)^2 = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (4)$$

Таким образом, уравнение (4) приводится к виду

$$\ddot{r} = \frac{q^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}. \quad (5)$$

Классический метод исследования [45] уравнения (5) состоит в получении зависимости $t=t(r)$ и последующего изучения

свойств этой зависимости. Функцию $r=r(t)$ получают приближенно, используя приближенное решение уравнения Кеплера, выражающего соотношение между временем t и эксцентрисической аномалией $E = E(t)$ [47]:

$$E(t) = \frac{180^0}{\pi} e \sin E(t) + 360^0 \cdot \frac{t-t_0}{T}, \quad (6)$$

где e – эксцентриситет эллиптической орбиты, T – период обращения по орбите.

В данной главе предлагается метод получения зависимости $r=r(t)$, основанный на аппроксимации функции $\frac{q^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}$ в равномерной метрике на отрезке $r \in [r_1, r_2]$.

Вернемся теперь к уравнению (5). В этом уравнении q – удвоенная секториальная скорость, т.е. $q^2 = pk^2(1+m) = a(1-e^2)k^2(1+m)$, где p – орбитальный параметр [47], который связан [48] с секториальной скоростью c равенством

$$p = \frac{c^2}{k^2(1+m)}, \quad (7)$$

$k^2 = 2,959122083 \cdot 10^{-4}$ – квадрат гауссовой гравитационной постоянной, m – масса тела (планеты или кометы) в долях солнечной массы, $\mu = k^2(1+m)$.

Заметим, что если провести аппроксимацию функций $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}$ по отдельности по формулам (1.18) и (1.22), то уравнение, аппроксимирующее уравнение (5), примет вид

$$\ddot{r} = -\frac{k^2(1+m)(1+e^2)}{a^3(1-e^2)^2} \cdot r + \frac{k^2(1+m)}{a^2} \times \left[\frac{1+3e^2}{2(1-e^2)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4}(3+e^2)^{3/4}}{(1-e^2)^{5/4}} - \frac{3}{2(1-e^2)^{4/3}} \right]. \quad (8)$$

Таким образом, уравнение (8) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\dot{r}(t) + \omega^2 r(t) = b, \quad (9)$$

в котором

$$\omega^2 = \frac{k^2(1+m)(1+e^2)}{a^3(1-e^2)^2},$$

$$b = \frac{k^2(1+m)}{a^2} \left[\frac{1+3e^2}{2(1-e^2)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4}(3+e^2)^{3/4}}{(1-e^2)^{5/4}} - \frac{3}{2(1-e^2)^{4/3}} \right]. \quad (10)$$

Общее решение такого уравнения имеет вид

$$r(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{b}{\omega^2}, \quad (11)$$

где c_1 и c_2 – постоянные, определяемые начальными или краевыми условиями.

Далее найдем решение следующей краевой задачи:

$$c_1 \cos \omega t_0 + c_2 \sin \omega t_0 = r(t_0) - \frac{b}{\omega^2}, \quad (12)$$

$$c_1 \cos \omega t_1 + c_2 \sin \omega t_1 = r(t_1) - \frac{b}{\omega^2}. \quad (13)$$

Применяя правило Крамера, получаем

$$c_1 = \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega t_1}{\sin \omega(t_1 - t_0)} - \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega t_0}{\sin \omega(t_1 - t_0)}; \quad (14)$$

$$c_2 = \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\cos \omega t_0}{\sin \omega(t_1 - t_0)} - \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\cos \omega t_1}{\sin \omega(t_1 - t_0)}. \quad (15)$$

Теперь из равенства (11) получим решение краевой задачи (12)–(13):

$$\begin{aligned} r(t) &= \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega t_1}{\sin \omega(t_1 - t_0)} \cdot \cos \omega t - \\ &\quad - \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega t_0}{\sin \omega(t_1 - t_0)} \cdot \cos \omega t + \\ &\quad + \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\cos \omega t_0}{\sin \omega(t_1 - t_0)} \cdot \sin \omega t - \\ &\quad - \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\cos \omega t_1}{\sin \omega(t_1 - t_0)} \cdot \sin \omega t + \frac{b}{\omega^2} = \\ &= \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega t_1 \cos \omega t - \cos \omega t_1 \sin \omega t}{\sin \omega(t_1 - t_0)} + \\ &\quad + \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\cos \omega t_0 \sin \omega t - \sin \omega t_0 \cos \omega t}{\sin \omega(t_1 - t_0)} + \\ &\quad + \frac{b}{\omega^2} = \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega(t_1 - t)}{\sin \omega(t_1 - t_0)} + \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\sin \omega(t_1 - t_0)} + \frac{b}{\omega^2}. \quad (16) \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5.1. Пусть тело массы m (выраженной в долях солнечной массы) обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите с большой полуосью a , тогда зависимость $r(t)$ расстояния тела до Солнца, полученная по результатам двух наблюдений $r(t_0)$ и $r(t_1)$, имеет вид:

$$r(t) = \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega(t_1 - t)}{\sin \omega(t_1 - t_0)} + \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\sin \omega(t_1 - t_0)} + \frac{b}{\omega^2}, \quad (17)$$

где

$$\frac{b}{\omega^2} = a \left[\frac{1 + 3e^2}{2(1 + e^2)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4} (3 + e^2)^{3/4} (1 - e^2)^{3/4}}{1 + e^2} - \frac{3(1 - e^2)^{2/3}}{2(1 + e^2)} \right],$$

e – эксцентриситет эллиптической орбиты,

$$\omega^2 = \frac{k^2(1+m)(1+e^2)}{a^3(1-e^2)^2},$$

$k^2 = 2,959122083 \cdot 10^{-4} (1a.e.)^3 \text{ сут.}^{-2}$; t – время, выраженное в сутках.

Изложенный метод можно уточнить, аппроксимируя правую часть уравнения (5) в целом. Запишем уравнение (5) в следующем виде:

$$\ddot{r}(t) = k^2(1+m) \left[\frac{a(1-e^2)}{r^3(t)} - \frac{1}{r^2(t)} \right].$$

Применим результат леммы 3.7, тогда дифференциальное уравнение, аппроксимирующее уравнение (5), примет вид

$$\ddot{r}(t) = -\frac{k^2(1+m)(1+e^2)}{ap^2} r(t) + \frac{k^2(1+m)}{2p^2} \left(3e^2 + 1 + \frac{4-3t_*}{t_*^3} \right). \quad (18)$$

Сравним далее результаты вычислений, полученных по формуле (17), записанной для уравнения (18), т.е.

$$r(t) = \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega(t_1 - t)}{\sin \omega(t_1 - t_0)} + \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\sin \omega(t_1 - t_0)} + \frac{b}{\omega^2}, \quad (19)$$

где

$$\omega^2 = \frac{k^2(1+m)(1+e^2)}{ap^2}, \quad b = \frac{k^2(1+m)}{2p^2} \left(3e^2 + 1 + \frac{4-3t_*}{t_*^3} \right),$$

$$t_0 = 160,5; \quad t_1 = 280,5; \quad r_0 = r(t_0) = 0,98379; \quad r_1 = r(t_1) = 1,01132,$$

с результатами, приведенными в «Астрономическом ежегоднике СССР на 1977 год»:

Таблица 5.1

Юлианские дни	по формуле (19)	из ежегодника
180,5	0,98606	0,98616
200,5	0,98999	0,99019
220,5	0,99510	0,99536
240,5	1,00081	1,00105
420,5	1,00024	1,00028
520,5	0,98351	0,98351

5.2. Немного о потенциале

Рассмотрим задачу о притяжении материальной точки P единичной массы некоторым телом M . Будем предполагать, что тело имеет произвольную форму, а плотность распределения масс внутри него является кусочно-непрерывной функцией координат.

Возьмем прямоугольную, жестко связанную с телом систему координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс тела (рис. 32). Тогда потенциал притяжения или силовая функция тела M в точке P с координатами ξ, η, ζ будет определяться равенством

$$U = f \iiint_V \frac{\kappa d\tau}{\Delta}, \quad (20)$$

где f – гравитационная постоянная,

$$\Delta = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2}$$

есть расстояние точки P от текущей точки $P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, в которой находится элемент объема $d\tau$, а тройной интеграл берется по всему объему V , занятому притягивающим телом.

Если через \mathbf{r} и \mathbf{r}_1 обозначить радиусы-векторы точек P и P_1 , а через γ – угол между ними, то для Δ и γ получаются выражения

$$\Delta = \sqrt{|\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{r}_1|^2 - 2|\mathbf{r}||\mathbf{r}_1|\cos\gamma}, \quad (21)$$

$$\cos\gamma = \frac{\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1}{|\mathbf{r}||\mathbf{r}_1|}. \quad (22)$$

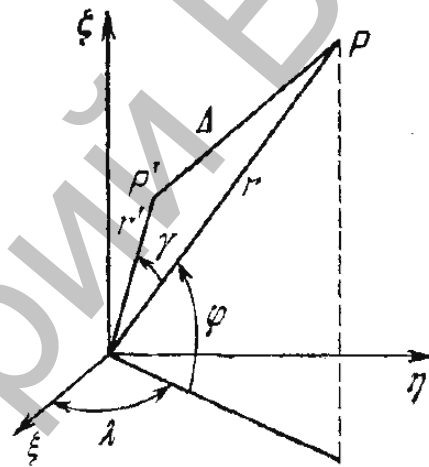


Рис. 32. Система координат $O\xi\eta\zeta$.

Потенциал U обладает следующими свойствами:

1) потенциал U есть функция, непрерывная во всем пространстве, обращаясь в нуль на бесконечности, причем

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} (|\mathbf{r}| U) = fm,$$

где m – масса тела;

2) частные производные первого порядка потенциала U по координатам являются непрерывными функциями во всем пространстве, обращаясь в нуль на бесконечности;

3) если через F_ξ, F_η, F_ζ обозначить проекции силы притяжения точки P телом M на координатные оси $O\xi, O\eta, O\zeta$, то во всем пространстве

$$F_\xi = \frac{dU}{d\xi}, \quad F_\eta = \frac{dU}{d\eta}, \quad F_\zeta = \frac{dU}{d\zeta}, \quad (23)$$

4) во внешнем относительно тела M пространстве потенциал U удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (24)$$

5) внутри тела M потенциал U удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = -4\pi f \kappa.$$

Первые четыре свойства имеют место, когда плотность κ – кусочно-непрерывная функция. Свойство 5) выполняется, например, если плотность κ удовлетворяет условию Гельдера

$$|\kappa(P_1) - \kappa(P_2)| < c \|P_1 - P_2\|^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

Идея понятия потенциала принадлежит Ж. Лагранжу (1775) и П. Лапласу (1782). Теория потенциала создана независимо Дж. Грином (1828) и К. Гауссом (1840). Термин «потенциальная функция» предложил Дж. Грин, термин «потенциал» – К. Гаусс.

Один из способов нахождения потенциала заключается в непосредственном вычислении тройного интеграла (20). Однако в конечном виде этот интеграл берется только в некоторых частных случаях, таких, например, как случай однородного шара или шара с концентрическим распределением плотности и случай однородного двухосного или трехосного эллипсоида. Так, для концентрического шара потенциал имеет вид:

$$U = \frac{fm}{|\mathbf{r}|},$$

где m – масса шара.

Если же на форму тела и распределение масс внутри него не накладывается никаких ограничений, то при условии, что плотность кусочно-непрерывная функция, интеграл (20) можно приближенно вычислить или при помощи ряда или при помощи аппроксимации подинтегральных функций. Наиболее распространенным в настоящее время разложением является разложение по сферическим функциям. Применение сферических функций, позволяет получить удобную для практических приложений аналитическую формулу для потенциала.

5.2.1. Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям

Будем предполагать, что притягивающее тело имеет произвольную форму, а плотность χ является кусочно-непрерывной функцией координат. Тогда в системе координат $O\xi\eta\zeta$, жестко связанной с телом, потенциал притяжения U в точке P будет даваться формулой

$$U = f \iiint_V \frac{\chi d\tau}{\Delta}, \quad (25)$$

где f – постоянная тяготения,

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}, \quad \cos \gamma = \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{rr'},$$

причем $r\xi\eta\zeta$ – радиус-вектор и координаты точки P , а r', ξ', η', ζ' – радиус-вектор и координаты точки P' , в которой находится элемент объема $d\tau$.

Предполагая, что точка P лежит вне притягивающего тела, разложим Δ^{-1} в ряд по степеням отношения r'/r . Прежде всего, мы имеем

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}},$$

а это дает нам возможность применить одно из свойств полиномов Лежандра:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha z + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(z).$$

При помощи этой формулы находим следующее разложение для $\frac{1}{\Delta}$:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma), \quad (26)$$

подставляя которое в (25), получаем

$$U = f \iiint_T \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma) \chi d\tau. \quad (27)$$

Перейдем теперь к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \varphi \cos \lambda, & \xi' &= r' \cos \varphi' \cos \lambda', \\ \eta &= r \cos \varphi \sin \lambda, & \eta' &= r' \cos \varphi' \sin \lambda', \\ \zeta &= r \sin \varphi, & \zeta' &= r' \sin \varphi'. \end{aligned}$$

Тогда для $\cos \gamma$ найдем

$$\cos \gamma = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda').$$

Для того чтобы выразить правую часть (27) через полярные координаты, воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega) &= P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\cos \theta) P_n^{(k)}(\cos \theta') \cos k \omega, \end{aligned}$$

которая в данном случае выглядит так:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \gamma) &= P_n(\sin \varphi) P_n(\sin \varphi') + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \varphi) P_n^{(k)}(\sin \varphi') \cos k(\lambda - \lambda'). \end{aligned} \quad (28)$$

Поскольку

$$\cos k(\lambda - \lambda') = \cos k\lambda \cos k\lambda' + \sin k\lambda \sin k\lambda',$$

то равенство (28) можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_n(\cos \gamma) &= P_n(\sin \varphi) P_n(\sin \varphi') + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \cos k\lambda \left[P_n^{(k)}(\sin \varphi') \cos k\lambda' \right] + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \sin k\lambda \left[P_n^{(k)}(\sin \varphi') \sin k\lambda' \right]. \end{aligned}$$

Если подставить это равенство в формулу (27), то получим

$$\begin{aligned} U &= f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\sin \varphi) \iiint_T r'^n P_n(\sin \varphi') \chi d\tau + \\ &+ f \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \cos k\lambda \times \\ &\times \iiint_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin \varphi') \cos k\lambda' \chi d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \sin k \lambda \times \\
& \times \iiint_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^m P_n^{(k)}(\sin \varphi') \sin k \lambda' \chi d\tau. \quad (29)
\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases}
mr_0^n J_n = -\iiint_T r'^m P_n(\sin \varphi') \chi d\tau, \\
mr_0^n C_{nk} = \iiint_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^m P_n^{(k)}(\sin \varphi') \cos k \lambda' \chi d\tau, \\
mr_0^n S_{nk} = \iiint_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^m P_n^{(k)}(\sin \varphi') \sin k \lambda' \chi d\tau,
\end{cases} \quad (30)$$

где m – масса тела, r_0 – некоторая линейная величина. В случае Земли в качестве r_0 удобно принять средний экваториальный радиус. Очевидно, величины J_n, C_{nk} и S_{nk} являются безразмерными.

С учетом этих обозначений формула (29) принимает вид

$$\begin{aligned}
U = & -\frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin \varphi) + \\
& + \frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k \lambda + S_{nk} \sin k \lambda]. \quad (31)
\end{aligned}$$

Коэффициенты J_n, C_{nk} и S_{nk} зависят от формы тела и распределения масс внутри него. Рассмотрим первые из них. Пусть в (30) $n=0$. Тогда, так как

$$P_0(\sin \varphi') = 1 \quad \text{и} \quad \iiint_T \chi d\tau = m,$$

то

$$J_0 = -1. \quad (32)$$

Полагая в формулах (30) $n=1$ и $k=1$ и учитывая, что

$$P_1(\sin \varphi') = \sin \varphi', \quad P_1^{(1)}(\sin \varphi') \cos \varphi',$$

находим

$$\begin{aligned}
mr_0 J_1 & = -\iiint_T \chi r' \sin \varphi' d\tau = -\iiint_T \zeta' dm = -m \zeta_0, \\
mr_0 C_{11} & = \iiint_T \chi r' \cos \varphi' \cos \lambda' d\tau = \iiint_T \xi' dm = m \xi_0, \\
mr_0 S_{11} & = \iiint_T \chi r' \cos \varphi' \sin \lambda' d\tau = \iiint_T \eta' dm = m \eta_0,
\end{aligned}$$

где ξ_0, η_0, ζ_0 – координаты центра масс тела. Поскольку начало системы координат $O\xi\eta\zeta$ находится в центре инерции тела, то отсюда заключаем, что

$$J_1 = 0, \quad C_{11} = 0, \quad S_{11} = 0. \quad (33)$$

Если в формулах (30) положить $n = 2$ и $k = 1, k = 2$, то можно легко получить следующие равенства:

$$\begin{cases} C_{21} = \frac{E}{mr_0^2}, & S_{21} = \frac{D}{mr_0^2}, \\ J_2 = \frac{2C - (A + B)}{2mr_0^2}, \\ C_{22} = \frac{B - A}{4mr_0^2}, & S_{22} = \frac{F}{2mr_0^2}, \end{cases} \quad (34)$$

где A, B, C – главные центральные моменты инерции; D, E, F – произведения инерции, т.е.

$$\begin{aligned} A &= \iiint_T (\eta'^2 + \zeta'^2) \chi d\tau, & B &= \iiint_T (\xi'^2 + \zeta'^2) \chi d\tau, \\ C &= \iiint_T (\xi'^2 + \eta'^2) \chi d\tau, & D &= \iiint_T \eta' \zeta' \chi d\tau, \\ E &= \iiint_T \zeta' \xi' \chi d\tau, & F &= \iiint_T \xi' \eta' \chi d\tau. \end{aligned}$$

На основании (32) и (33) формула (31) принимает следующий окончательный вид:

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda] \right\}. \quad (35)$$

Сделаем теперь несколько замечаний.

1. Полученное разложение для потенциала U сходится абсолютно и равномерно при

$$r > \bar{r}, \quad (36)$$

где \bar{r} – расстояние наиболее удаленной точки поверхности тела от его центра масс. Действительно, поскольку $|P_n(\sin \varphi)| \leq 1$, то ряд (26), а следовательно, и (27) абсолютно и равномерно сходится, если $r > r'$, где r' – радиус-вектор точки, лежащей внутри или на поверхности тела. Но $\max r' = \bar{r}$. Отсюда и получаем условие (36).

2. Предположим, что одна из осей координат, скажем, ось $O\zeta$, совпадает с главной центральной осью инерции. Тогда произведения инерции D и E будут равны нулю, а поэтому

$$C_{21} = 0 \quad \text{и} \quad S_{21} = 0.$$

Если принять, что все три координатные оси совпадают с главными центральными осями инерции, то будет равен нулю также и коэффициент S_{22} .

3. При выводе формулы (35) мы предполагали, что плотность χ является функцией лишь координат. Очевидно, эта формула будет иметь место, если плотность χ зависит также от времени. В случае абсолютно твердого тела, как показывают равенства (30), коэффициенты J_n, C_{nk} и S_{nk} будут постоянными. Если же плотность χ и форма тела зависят от времени, то J_n, C_{nk} и S_{nk} будут функциями времени.

5.2.2. Различные формулы для потенциала притяжения Земли

Пусть прямоугольная, жестко связанная с Землей, правая система координат $O\xi\eta\zeta$ такова, что ее начало находится в центре масс Земли, основная плоскость $\xi\eta$ совпадает с экваториальной плоскостью, ось $O\zeta$ направлена в северный полюс, а ось $O\xi$ пересекает *гринвичский меридиан*. Пусть далее r, φ и λ – радиус-вектор, широта и долгота:

$$\begin{cases} \xi = r \cos \varphi \cos \lambda, \\ \eta = r \cos \varphi \sin \lambda, \\ \zeta = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (37)$$

Тогда на основании предыдущего параграфа потенциал притяжения Земли во внешней точке с координатами r, φ, λ будет даваться формулой

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda] \right\}. \quad (38)$$

где f – постоянная притяжения, m и r_0 – масса и средний экваториальный радиус Земли; J_n, C_{nk} и S_{nk} – безразмерные коэффициенты, зависящие от формы Земли и распределения масс внутри нее; P_n и $P_n^{(k)}$ – полином и присоединенная функция Лежандра, причем

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (z^2 - 1)^n}{dz^n}, \quad (39)$$

$$P_n^{(k)}(z) = (1 - z^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(z)}{dz^k}. \quad (40)$$

Разложение (38) сходится абсолютно и равномерно при $r > \bar{r}$,

где \bar{r} – радиус-вектор наиболее удаленной точки земной поверхности.

Так как ось $O\zeta$ совпадает с осью вращения Земли, т.е. с одной из главных центральных осей инерции, то

$$C_{21} = 0 \text{ и } S_{21} = 0.$$

Формула (38) была рекомендована Комиссией № 7 Международного Астрономического Союза как стандартная форма записи потенциала притяжения Земли. В литературе, однако, широко распространены и другие формулы для потенциала. Отметим здесь главные из них. Прежде всего имеем

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) \cos k(\lambda - \lambda_{nk}) \right\}, \quad (41)$$

где новые коэффициенты J_{nk} (в некоторых работах вместо J_n используются величины $I_n = -J_n$) и λ_{nk} связаны со старыми C_{nk} и S_{nk} равенствами

$$\begin{cases} C_{nk} = J_{nk} \cos k \lambda_{nk}, \\ S_{nk} = J_{nk} \sin k \lambda_{nk}, \end{cases} \quad (42)$$

или

$$J_{nk} = \sqrt{C_{nk}^2 + S_{nk}^2}, \quad \operatorname{tg} k \lambda_{nk} = \frac{S_{nk}}{C_{nk}}. \quad (43)$$

Формула (41) удобна при теоретических исследованиях.

Заменим теперь в разложении (38) $P_n^{(k)}$ нормированными присоединенными функциями Лежандра $p_n^{(k)}$ согласно равенству

$$p_n^{(k)}(z) = \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}} P_n^{(k)}(z).$$

Тогда потенциал U запишется в виде

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [A_{nk} \cos k \lambda + B_{nk} \sin k \lambda] \right\}, \quad (44)$$

где коэффициенты A_{nk} и B_{nk} связаны с C_{nk} и S_{nk} соотношениями

$$A_{nk} = \sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!}} C_{nk}, \quad B_{nk} = \sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!}} S_{nk}. \quad (45)$$

Если, наконец, в разложении (38) заменить $P_n^{(k)}$ полностью нормированными функциями Лежандра $p_n^{(k)}$:

$$p_n^{(k)}(z) = \sqrt{2n+1} \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}} P_n^{(k)}(z),$$

то будем иметь еще одну формулу для U :

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [\bar{C}_{nk} \cos k\lambda + \bar{S}_{nk} \sin k\lambda] \right\}, \quad (46)$$

где

$$\begin{cases} \bar{C}_{nk} = \sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!}} \cdot \frac{C_{nk}}{\sqrt{2n+1}}, \\ \bar{S}_{nk} = \sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!}} \cdot \frac{S_{nk}}{\sqrt{2n+1}}. \end{cases} \quad (47)$$

Формула (46) часто используется в работах, связанных с определением коэффициентов гравитационного поля Земли.

5.2.3. Зональные, тессеральные и секториальные гармоники

Рассмотрим структуру разложения потенциала U :

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda] \right\}. \quad (48)$$

Все члены этого разложения можно разделить на три типа. Пусть $k=0$. Тогда мы будем иметь члены вида

$$-\frac{fm}{r} J_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi).$$

Поскольку полином Лежандра P_n имеет n действительных различных и по абсолютной величине меньших единицы корней, то на сфере $P_n(\sin \varphi)$ будет менять знак на параллелях. Таким образом, сфера

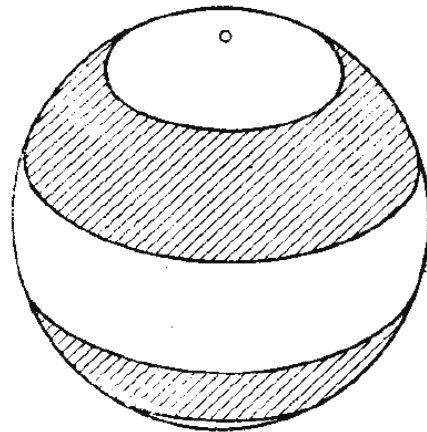


Рис. 33. Положительные и отрицательные значения зональной гармоники для $n=4$.

разделится на $n + 1$ широтных зон, в которых этот член будет попеременно принимать положительные и отрицательные значения. Такой член называется *зональной гармоникой порядка n* . Распределение положительных и отрицательных значений рассматриваемой гармоники для $n = 4$ приводится на рис. 33.

Пусть $0 < k < n$. Тогда мы будем иметь члены вида

$$\frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n C_{nk} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \cos k\lambda$$

и

$$\frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n S_{nk} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \sin k\lambda,$$

которые обращаются в нуль на $n - k$ параллелях, определяемых уравнением

$$\frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^k} = 0,$$

и на $2k$ меридианах:

$$\cos k\lambda = 0 \quad \text{или} \quad \sin k\lambda = 0.$$

Следовательно, в этом случае сфера делится на $n + k + 1$ сферических трапечий, в каждой из которых эти члены сохраняют знаки.

Такие члены называются *тессеральными гармониками порядка n и индекса k* . Распределение положительных и отрицательных значений тессеральной гармоники для $n = 10$ и $k = 6$ указано на рис. 34.

Пусть, наконец, $k = n$, и мы тогда получим члены вида

$$\frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n C_m P_n^{(n)}(\sin \varphi) \cos n\lambda$$

и

$$\frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n S_m P_n^{(n)}(\sin \varphi) \sin n\lambda.$$

Поскольку

$$\frac{d^n P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^n} = \text{const},$$

то такие члены обращаются в нуль только на меридианах, для которых

$$\cos n\lambda = 0 \quad \text{или} \quad \sin n\lambda = 0$$

В этом случае сфера делится на $2n$ знакопостоянных секторов, вследствие чего такие члены называются *секториальными гармониками порядка n* . Соответствующее распределение поло-

жительных и отрицательных областей для $n = k = 6$ указано на рис. 35.

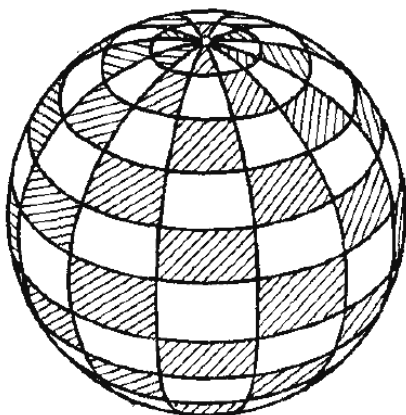


Рис. 34. Положительные и отрицательные значения тессеральной гармоники для $n=10$ и $k=6$.

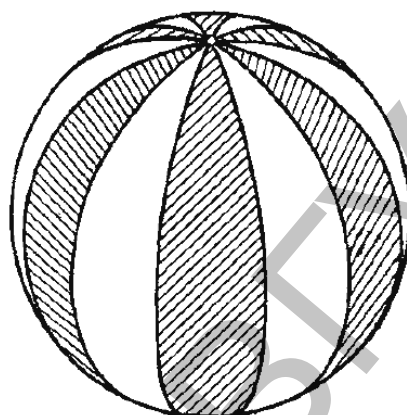


Рис. 35. Положительные и отрицательные значения секториальной гармоники для $n=6$.

Рассмотрим теперь механический смысл различных слагаемых разложения (48). Поскольку первый член представляет собой потенциал шара со сферическим распределением плотности, то все остальные слагаемые характеризуют отличие Земли от тела сферической структуры. Основным из этих слагаемых является вторая зональная гармоника, которая определяет сплюснутость Земли у полюсов, т.е. полярное сжатие Земли. Другие гармоники характеризуют более мелкие детали. Так, тессеральные и секториальные гармоники характеризуют отличие Земли от тела, динамически симметричного относительно оси вращения, а зональные гармоники нечетного порядка и тессеральные гармоники, для которых $n - k$ нечетно, определяют асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

5.2.4. Постоянные гравитационного поля Земли. Стандартная Земля

Числовые значения коэффициентов разложения потенциала притяжения Земли определяются как при помощи гравиметрических и геодезических измерений, так и по наблюдениям Луны и искусственных небесных тел. В последние годы часто используется комбинированный метод, основанный на совместном использовании гравиметрических и спутниковых данных. Начиная с 1958 г., при помощи наблюдений искусственных спутников Земли было выведено несколько десятков систем постоянных геопотенциала (подробная сводка этих данных приведена в обзоре Л.П. Пеллинина [49]). Наиболее полные результаты были по-

лучены в Смитсоновской обсерватории США на основе фотографических и лазерных наблюдений специальных спутников с привлечением гравиметрических и геодезических измерений. Выведенная в США система постоянных получила название *Стандартной Земли*. Под Стандартной Землей здесь понимается совокупность коэффициентов разложения геопотенциала и геоцентрических координат нескольких пунктов на земной поверхности.

Стандартная Земля I была опубликована в 1966 г. [50] (смотрите также русский перевод [51]). Для ее вывода были использованы фотографические наблюдения искусственных спутников, выполненные на 15 камерах Бейкера–Нанна.

В 1970 г. была опубликована Стандартная Земля II. Она является обобщением и уточнением Стандартной Земли I. Здесь были использованы наблюдения 19 спутников, полученные камерами Бейкера–Нанна и лазерными установками. Использовались как обычные, так и синхронные наблюдения. Кроме того, были привлечены гравиметрические измерения и геодезические данные, а также наблюдения зондов. В результате были определены координаты многих наблюдательных станций и все коэффициенты разложения геопотенциала до 16-го порядка включительно и некоторые более высокие гармоники. Точность определения координат многих станций составляет около 10 м.

Приведем основные параметры, характеризующие гравитационное поле, соответствующее Стандартной Земле II. Для fm и r_0 имеем

$$fm = 3,986013 \cdot 10^5 \text{ км}^3 \cdot \text{сек}^{-2},$$

$$r_0 = 6378,155 \text{ км}.$$

Коэффициенты зональных гармоник до 21-го порядка включительно равны [52], [53]:

$$J_2 = 1082,628 \cdot 10^{-6}, \quad J_3 = -2,538 \cdot 10^{-6},$$

$$J_4 = -1,593 \cdot 10^{-6}, \quad J_5 = -0,230 \cdot 10^{-6},$$

$$J_6 = 0,502 \cdot 10^{-6}, \quad J_7 = -0,361 \cdot 10^{-6},$$

$$J_8 = -0,118 \cdot 10^{-6}, \quad J_9 = -0,100 \cdot 10^{-6},$$

$$J_{10} = -0,354 \cdot 10^{-6}, \quad J_{11} = -0,202 \cdot 10^{-6},$$

$$J_{12} = -0,042 \cdot 10^{-6}, \quad J_{13} = -0,123 \cdot 10^{-6},$$

$$J_{14} = -0,073 \cdot 10^{-6}, \quad J_{15} = -0,174 \cdot 10^{-6},$$

$$J_{16} = 0,187 \cdot 10^{-6}, \quad J_{17} = 0,085 \cdot 10^{-6},$$

$$J_{18} = -0,231 \cdot 10^{-6}, \quad J_{19} = -0,216 \cdot 10^{-6},$$

$$J_{20} = -0,005 \cdot 10^{-6}, \quad J_{21} = 0,145 \cdot 10^{-6},$$

Коэффициенты тессеральных и секториальных гармоник (полностью нормированные) до шестого порядка включительно приводятся в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Коэффициенты \bar{C}_{nk} и \bar{S}_{nk} (полностью нормированные)

n, k	$\bar{C}_{nk} \cdot 10^8$	$\bar{S}_{nk} \cdot 10^8$	n, k	$\bar{C}_{nk} \cdot 10^8$	$\bar{S}_{nk} \cdot 10^8$
2,2	241,29	-136,41	3,1	196,98	26,015
3,2	89,204	-63,468	3,3	68,630	143,04
4,1	-52,989	-48,765	4,2	33,024	70,633
4,3	98,943	-15,467	4,4	-7,9692	33,928
5,1	-5,3816	-9,7905	5,2	61,286	-35,087
5,3	-43,083	-8,6663	5,4	-26,693	8,3010
5,5	12,593	-59,910	6,1	-9,8984	3,7652
6,2	5,4825	-35,175	6,3	2,7873	4,4626
6,4	-0,040342	-40,388	6,5	-21,143	-52,264
6,6	8,8693	-7,4756	7,1	24,142	11,567

Коэффициенты гармоник более высокого порядка даны в [54] (приложение, табл. 35).

Из приведенных результатов видно, во-первых, что коэффициент J_2 имеет порядок $\cdot 10^{-3}$, в то время как остальные J_n и коэффициенты тессеральных и секториальных гармоник являются малыми порядка $\cdot 10^{-6}$ и выше. Следовательно, основным (после первого) членом в разложении потенциала U является вторая зональная гармоника. Именно она должна вызывать самые значительные возмущения в движении спутника.

Во-вторых, эти результаты указывают на то, что коэффициенты J_n и J_{nk} весьма медленно убывают с возрастанием n . Это подтверждается также аналитическими исследованиями, проведенными К.В. Холшевниковым [55]. При достаточно общих предположениях относительно плотности Земли им были получены следующие оценки:

$$|J_n| \leq \frac{c_1}{n^{5/2}}, \quad |J_{nk}| \leq \frac{c_2}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{(n-k)!}{(n+k)!}},$$

где c_1 и c_2 – постоянные.

Таким образом, хотя разложение для U абсолютно сходится во всем пространстве $r > \bar{r}$, где \bar{r} – расстояние от центра Земли самой удаленной точки ее поверхности, его сходимость в случае r_0/r , близких к единице, является весьма медленной.

5.2.5. Промежуточное гравитационное поле Земли

Рассмотрим следующую функцию координат ξ, η, ζ :

$$W = \frac{fm}{2} \left\{ \frac{1+i\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2} \right\}, \quad (49)$$

где f и m – постоянная притяжения и масса Земли, $i = \sqrt{-1}$,

$$r_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [\zeta - c(\sigma + i)]^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [\zeta - c(\sigma - i)]^2},$$

а c и σ – вещественные постоянные. Разложим W в ряд по степеням c/r , где $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Для этого воспользуемся формулой

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(z).$$

Тогда

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n (\sigma + i)^n}{r^n} P_n\left(\frac{\zeta}{r}\right), \quad (50)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n (\sigma - i)^n}{r^n} P_n\left(\frac{\zeta}{r}\right). \quad (51)$$

Подставляя эти разложения в формулу (49) и вводя средний экваториальный радиус r_0 и геоцентрическую широту φ , получим

$$W = -\frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} J'_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin \varphi), \quad (52)$$

где

$$J'_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{c}{r_0}\right)^n \left[(1+i\sigma)(\sigma+i)^n + (1-i\sigma)(\sigma-i)^n \right]. \quad (53)$$

Из равенств (50) и (51) следует, что разложения для $1/r_1$ и $1/r_2$ абсолютно сходятся в области

$$r > c\sqrt{1+\sigma^2}. \quad (54)$$

В этой же области будет сходиться и ряд (52).

Положим в (53) $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Тогда

$$\begin{cases} J'_0 = -1, & J'_1 = 0, \\ J'_2 = \chi^2(1 + \sigma^2), \\ J'_3 = 2\chi^3\sigma(1 + \sigma^2), \\ J'_4 = -\chi^4(1 + \sigma^2)(1 - 3\sigma^2), \\ J'_5 = -4\chi^5\sigma(1 - \sigma^4), \end{cases} \quad (55)$$

где

$$\sigma = \frac{c}{r_0}.$$

Легко убедиться в том, что все коэффициенты J'_n являются вещественными. Для этого достаточно заметить, что при любом целом n величины $(\sigma + i)^n$ и $(\sigma - i)^n$, входящие в формулу (53), будут комплексно сопряженными. Поэтому W является вещественной функцией координат r и φ .

С учетом первых двух равенств (55) формула (52) может быть представлена в виде

$$W = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J'_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \right\}. \quad (56)$$

Сравнение этой формулы с формулой (38) показывает, что функцию W можно интерпретировать как потенциал притяжения некоторого тела, обладающего осевой симметрией. Поэтому поставим следующую задачу: подберем числовые значения постоянных c и σ таким образом, чтобы W по возможности была бы наиболее близкой к потенциалу притяжения Земли.

Поскольку в разложении (56) m – масса Земли, то первый член этого разложения равен первому члену разложения (38) для потенциала U . Если теперь постоянными c и σ распорядиться так, чтобы

$$J'_2 = J_2, \quad J'_3 = J_3,$$

т.е. выбрать их из условий

$$c^2(1 + \sigma^2) = J_2 r_0^2, \quad 2c^3\sigma(1 + \sigma^2) = J_3 r_0^3, \quad (57)$$

то уже первые три члена разложения (56) будут соответственно равны первым трем членам разложения (38).

Разрешая уравнения (57) относительно c и σ , находим

$$c = r_0 \left\{ J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad \sigma = \frac{J_3}{2J_2} \left\{ J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{-1/2}. \quad (58)$$

Так как в случае Земли

$$J_2 > 0, \quad J_2 > \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2,$$

то из формул (58) следует, что постоянные c и σ будут действительными величинами.

Подставляя в (58) вместо r_0, J_2 и J_3 их числовые значения, получим

$$c = 209,729 \text{ км}, \quad \sigma = -0,035647. \quad (59)$$

При этих значениях для r_0, c и σ находим

$$J'_4 = 1,166 \cdot 10^{-6}, \quad J'_5 = -0,006 \cdot 10^{-6}, \quad (60)$$

причем коэффициенты J'_n при $n \geq 6$ будут меньше 10^{-9} . Таким образом, хотя J'_4 и J_4 не равны друг другу, однако их разность меньше, чем J_4 . Вследствие малости отношения c/r_0 постоянные J'_n будут убывать с возрастанием n быстрее, чем J_n . Поэтому разности $J_n - J'_n$ будут иметь порядок 10^{-6} и выше.

В дальнейшем гравитационное поле, потенциал которого определяется формулами (53), (56), (58), будем называть *промежуточным гравитационным полем Земли*. Такое название объясняется тем обстоятельством, что потенциал W имеет промежуточный характер между потенциалом истинной Земли и потенциалом Земли шарообразной.

Отметим важнейшие свойства функции W .

1. Функция W включает в себя вторую, третью и частично четвертую зональные гармоники потенциала притяжения Земли.

2. Разность $U - W$ содержит члены, порядок которых равен 10^{-6} и выше. При этом зональные гармоники, начиная с шестой, а также тессеральные и секториальные гармоники этой разности практически не отличаются от соответствующих членов потенциала притяжения Земли.

3. Функция W зависит от трех постоянных fm, c и σ (или fm, J_2 и J_3), которые в настоящее время определены с наиболее высокой точностью.

4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в поле с потенциалом W строго интегрируются в квадратурах.

Последнее, чрезвычайно важное для приложений свойство является следствием того, что W может рассматриваться как силовая функция задачи двух неподвижных центров с массами

$\frac{m}{2}(1+i\sigma)$ и $\frac{m}{2}(1-i\sigma)$, удаленными друг от друга на расстояние, равное $2ic$. А задача двух неподвижных центров, как известно, одна из немногих задач механики, которые интегрируются

в квадратурах. В отличие от классической задачи, в которой массы центров и их взаимное расстояние являются действительными величинами, эту задачу мы будем называть в дальнейшем *обобщенной задачей двух неподвижных центров*.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. Положим в (56) и (53) $\sigma = 0$. Тогда найдем

$$W = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J'_{2n} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \varphi) \right\}, \quad (61)$$

где

$$J'_{2n} = (-1)^{n+1} \left(\frac{c}{r_0} \right)^{2n}.$$

Полученная формула содержит только четные зональные гармоники. Поэтому можно различать два варианта задачи: *симметричный* ($\sigma = 0$) и *несимметричный* ($\sigma \neq 0$). В обоих вариантах силовая функция строго учитывает вторую зональную гармонику – самый существенный (после первого) член потенциала притяжения Земли. Но несимметричный случай имеет преимущество перед симметричным, поскольку он учитывает частично (посредством третьей гармоники) асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

Пусть теперь $\sigma = 0$ и $c = 0$. Тогда

$$W = \frac{fm}{r},$$

т.е. в этом случае силовая функция W представляет собой потенциал шарообразной Земли.

5.3. Комплексные аналоги многочленов Лежандра

Так называемые специальные функции математической физики представляют собой решения определенных, часто встречающихся линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Эти функции имеют много представлений: в виде частных решений дифференциальных уравнений, рядов, различных интегральных представлений, с помощью рекуррентных соотношений и с помощью производящих функций.

Далее рассмотрим класс многочленов комплексного аргумента, удовлетворяющих дифференциальному уравнению, более общему, чем уравнение Лежандра. Для таких многочленов построено рекуррентное соотношение, найдена производящая функция и доказана ортогональность на отрезке комплексной плоскости. Кроме того, найдена структура многочленов, ортого-

нальных на контуре квадрата. Для таких многочленов указан алгоритм нахождения их коэффициентов.

Как известно, дифференциальное уравнение Лежандра имеет вид

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0. \quad (62)$$

Многочлены Лежандра

$$Q_n(x) = \left[(1-x^2)^n \right]^{(n)} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (63)$$

являются решениями уравнения (62).

Рассмотрим более общее дифференциальное уравнение

$$(z^2 - \lambda^2)P_n''(z) + 2zP_n'(z) - n(n+1)P_n(z) = 0, \quad (64)$$

где λ – произвольное комплексное число.

Лемма 5.1. *Многочлены*

$$P_n(z) = \left[(z^2 - \lambda^2)^n \right]^{(n)} \quad (n=1,2,\dots) \quad (65)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению (64).

Доказательство. Найдем коэффициент b_m при z^m выражения

$$(z^2 - \lambda^2)P_n''(z) + 2zP_n'(z).$$

Так как

$$(z^2 - \lambda^2)^n = (-1)^n \sum_{k=0}^n C_n^k (\lambda^2)^{n-k} (-1)^k z^{2k},$$

то

$$\left[(z^2 - \lambda^2)^n \right]^{(n)} = (-1)^n \sum_{k:2k-n \geq 0} C_n^k (\lambda^2)^{n-k} (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k-n)!} z^{2k-n}, \quad (66)$$

$$\left[(z^2 - \lambda^2)^n \right]^{(n+1)} = (-1)^n \sum_{k:2k-n-1 \geq 0} C_n^k (\lambda^2)^{n-k} (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k-n-1)!} z^{2k-n-1},$$

$$\left[(z^2 - \lambda^2)^n \right]^{(n+2)} = (-1)^n \sum_{k:2k-n-2 \geq 0} C_n^k (\lambda^2)^{n-k} (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k-n-2)!} z^{2k-n-2}.$$

Пусть $m=2k-n \geq 2$, тогда

$$\begin{aligned} b_m &= (-1)^{n+k} C_n^k (\lambda^2)^{n-k} \frac{(2k)!}{(2k-n-2)!} - (-1)^{n+k+1} C_n^{k+1} \frac{[2(k+1)]!}{(2k-n)!} + \\ &+ (-1)^{n+k} 2C_n^k (\lambda^2)^{n-k} \frac{(2k)!}{(2k-n-1)!} = \\ &= (-1)^{n+k} C_n^k (\lambda^2)^{n-k} \frac{(2k)!}{(2k-n-2)!} \left(1 + \frac{2}{2k-n-1} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{n+k+2} C_n^{k+1} (\lambda^2)^{n-k} \frac{(2k+2)!}{(2k-n)!} = \\
& = (-1)^{n+k} (\lambda^2)^{n-k} \left[C_n^k \frac{(2k)!}{(2k-n-2)!} \cdot \frac{2k-n+1}{2k-n-1} + C_n^{k+1} \frac{(2k+2)!}{(2k-n)!} \right] = \\
& = (-1)^{n+k} (\lambda^2)^{n-k} \frac{n!(2k)!}{(2k-n-1)!k!(n-k-1)!} \times \\
& \quad \times \left[\frac{2k-n+1}{n-k} + \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(2k-n)} \right] = \\
& = (-1)^{n+k} (\lambda^2)^{n-k} \frac{n!(2k)!}{(2k-n-1)!k!(n-k-1)!} \cdot \frac{n(n+1)}{(n-k)(2k-n)} = \\
& = (-1)^{n+k} (\lambda^2)^{n-k} \frac{n!(2k)!n(n+1)}{k!(n-k)!(2k-n)!} = (-1)^{n+k} C_n^k (\lambda^2)^{n-k} \frac{(2k)!n(n+1)}{(2k-n)!}.
\end{aligned}$$

Далее найдем коэффициент c_m при z^m выражения $n(n+1) \left[(z^2 - \lambda^2)^n \right]^{(n)}$. Из равенства (66)

$$c_m = n(n+1)(-1)^{n+k} C_n^k (\lambda^2)^{n-k} \frac{(2k)!}{(2k-n)!}.$$

Таким образом, $b_m = c_m$. При $m=1$ и $m=0$ доказательство проводится аналогично.

Далее нам потребуются свойства многочлена

$$Q_n(z) = \left[(z^2 + bz + c)^n \right]^{(n)} \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (67)$$

Пусть

$$F_k(z, n) = \left[(z^2 + bz + c)^n \right]^{(k)} \quad (k=0,1,2,\dots,n). \quad (68)$$

Лемма 5.2. *Справедливо равенство*

$$F_k(z, n) = (z^2 + bz + c)^{n-k} R_k(z), \quad (69)$$

где $R_k(z)$ — многочлен степени не более k .

Доказательство. Применим метод математической индукции. Действительно,

$$F_0(z, n) = (z^2 + bz + c)^n, \quad F_1(z, n) = n(z^2 + bz + c)^{n-1} (2z + b),$$

т.е.

$$R_1(z) = 2nz + nb.$$

Проведем шаг индукции. Для этого продифференцируем обе части равенства (69):

$$F_{k+1}(z, n) = [F_k(z, n)]' = (n-k)(z^2 + bz + c)^{n-k-1} (2z+b)R_k(z) + \\ + (z^2 + bz + c)^{n-k} R_k'(z) = (z^2 + bz + c)^{n-k-1} \times \\ \times [(n-k)(2z+b)R_k(z) + R_k'(z)] = (z^2 + bz + c)^{n-(k+1)} R_{k+1}(z).$$

Лемма 5.2 доказана.

Пусть $[z_1, z_2]$ – отрезок на комплексной плоскости с концами $z_1 = a + bi$, $z_2 = -a + bi$ ($a > 0, b \geq 0$). Многочлен

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z - a - bi)(z + a - bi) = z^2 - 2biz - a^2 - b^2$$

с нулями в точках $z = z_1$ и $z = z_2$ определяет выражение

$$F_k(z, n) = \left[(z^2 - 2biz - a^2 - b^2)^n \right]^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

которое в силу леммы 5.2 обращается в нуль на концах отрезка $[z_1, z_2]$, т.е.

$$F_k(z_1, n) = F_k(z_2, n) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Обозначим далее

$$(z^2 - 2biz - a^2 - b^2)^n = u(x, y) + iv(x, y), \quad \bar{z}^k = \\ = (x - iy)^k = p(x, y) - iq(x, y),$$

т.е. p и q – многочлены переменных x и y степени не выше k .

Ортогональность понимается в смысле скалярного произведения

$$(f, g) = \int_{z_2}^{z_1} f(z) \bar{g}(z) |dz|. \quad (70)$$

Рассмотрим семейство многочленов

$$P_n(z) = \left[(z^2 - 2biz - a^2 - b^2)^n \right]^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (71)$$

Теорема 5.1. *Многочлены (71) ортогональны на отрезке $[z_2, z_1]$.*

Доказательство. Действительно, применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_{z_2}^{z_1} P_n(z) \bar{z}^k |dz| = \int_{-a}^a \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + i \frac{\partial^n v}{\partial x^n} \right) (p - iq) dx = \\ = \left[\frac{\partial^{n-1} u(x, b)}{\partial x^{n-1}} + i \frac{\partial^{n-1} v(x, b)}{\partial x^{n-1}} \right] [p(x, b) - iq(x, b)] \Big|_{-a}^a - \\ - \int_{-a}^a \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + i \frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}} \right) (p - iq)'_x dx.$$

Внеинтегральное выражение в данном равенстве в силу формулы (69) обращается в нуль, следовательно, повторяя операцию интегрирования по частям, получаем

$$\int_{z_2}^{z_1} P_n(z) \bar{z}^k |dz| = (-1)^k \int_{-a}^a \left(\frac{\partial^{n-k} u}{\partial x^{n-k}} + i \frac{\partial^{n-k} v}{\partial x^{n-k}} \right) (p-iq)_{x^k}^{(k)} dx.$$

Но так как

$$p(x, y) - q(x, y) = (x - iy)^k = \sum_{j=0}^k C_k^j x^{k-j} (-i)^j y^j,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{z_2}^{z_1} P_n(z) \bar{z}^k |dz| &= (-1)^k k! \int_{-a}^a \left(\frac{\partial^{n-k} u}{\partial x^{n-k}} + i \frac{\partial^{n-k} v}{\partial x^{n-k}} \right) dx = \\ &= (-1)^k k! \left(\frac{\partial^{n-k-1} u}{\partial x^{n-k-1}} + i \frac{\partial^{n-k-1} v}{\partial x^{n-k-1}} \right) \Big|_{-a}^a = \\ &= (-1)^k k! \left[(z^2 - 2biz - a^2 - b^2)^n \right]_{z_2}^{z_1} \Big|_{z_2}^{z_1}. \end{aligned}$$

Последнее выражение в силу равенства (69) обращается в нуль при $k=0, 1, 2, \dots, n-1$.

Теорема доказана.

Найдем далее дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет семейство многочленов (71). Так как

$$z^2 - 2biz - a^2 - b^2 = (z - bi)^2 - a^2,$$

то, заменив в уравнении (27) z на $z - bi$, будем иметь

$$\left[(z - bi)^2 - a^2 \right] P_n''(z - bi) + 2(z - bi) P_n'(z - bi) - n(n+1) P_n(z - bi) = 0,$$

и, обозначив $P_n(z - bi) = Q_n(z)$, получаем

$$(z^2 - 2biz - a^2 - b^2) Q_n''(z) + 2(z - bi) Q_n'(z) - n(n+1) Q_n(z) = 0. \quad (72)$$

Определим далее стандартизованные многочлены равенством

$$P_n^s(z) = \frac{1}{n! 2^n} \left[(z^2 - \lambda^2)^n \right]^{(n)} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (73)$$

тогда

$$P_{n-2}^s(z) = \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)! 2^{n-2}} \sum_{k: 2k-n+2 \geq 0}^{n-2} C_{n-2}^k (-1)^k (\lambda^2)^{n-2-k} \frac{(2k)!}{(2k-n+2)!} z^{2k-n+2},$$

$$P_{n-1}^s(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! 2^{n-1}} \sum_{k: 2k-n+1 \geq 0}^{n-1} C_{n-1}^k (-1)^k (\lambda^2)^{n-1-k} \frac{(2k)!}{(2k-n+1)!} z^{2k-n+1},$$

$$P_n^s(z) = \frac{(-1)^n}{(n)! 2^n} \sum_{k: 2k-n \geq 0}^n C_n^k (-1)^k (\lambda^2)^{n-k} \frac{(2k)!}{(2k-n)!} z^{2k-n}.$$

Найдем коэффициенты α_n и β_n такие, чтобы выполнялось тождество

$$P_n^s = \alpha_n z P_{n-1}^s + \beta_n P_{n-2}^s. \quad (74)$$

Приравнявая коэффициенты при z^n в левой и правой частях предполагаемого тождества (74), получаем

$$\frac{(-1)^{2n}}{n!2^n} \cdot \frac{n!}{n!(n-n)!} \cdot (\lambda^2)^0 \cdot \frac{(2n)!}{n!} = \alpha_n \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!2^{n-1}} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!},$$

т.е.

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{n}. \quad (75)$$

Далее приравняем коэффициент при z^{n-2} :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n!2^n} \cdot n(-1)^{n-1} \lambda^2 \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-2)!} &= \frac{2n-1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}}{(n-1)!2^{n-1}} \times \\ &\times (n-1)\lambda^2 \cdot \frac{(2n-4)!}{(n-3)!} + \beta_n \frac{(-1)^{n-2}(-1)^{n-2}}{(n-2)!2^{n-2}} \cdot \frac{(2n-4)!}{(n-2)!}, \end{aligned}$$

тогда после очевидных преобразований получаем

$$\beta_n = \left[\frac{(2n-1)(n-2)}{2n} - \frac{(2n-3)(2n-2)}{4(n-1)} \right] \lambda^2 = -\frac{n-1}{n} \lambda^2. \quad (76)$$

Таким образом, справедливо тождество

$$P_n^s(z) = \frac{2n-1}{n} z P_{n-1}^s(z) - \frac{n-1}{n} \lambda^2 P_{n-2}^s(z), \quad (77)$$

которое является обобщением известного для многочленов Лежандра ([56], с. 121) тождества

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x). \quad (78)$$

Далее получим представление для производящей функции системы многочленов (65).

Теорема 5.2. Для производящей функции $F(z, w)$ системы многочленов (65)

$$F(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(z^2 - \lambda^2)^n \right]^{(n)}}{n!} w^n \quad (79)$$

имеет место представление

$$F(z, w) = \frac{1}{1 - 2w\zeta_1(z, w)}, \quad (80)$$

где $\zeta_1 = \zeta_1(z, w)$ есть тот корень квадратного уравнения

$$w\zeta^2 - \zeta + z - w\lambda^2 = 0, \quad (81)$$

который при малых $|w|$ расположен ближе к точке z .

Доказательство. При фиксированном z один корень $\zeta_1(z, w)$ уравнения (81) близок к точке z , а второй корень $\zeta_2(z, w)$ – велик по модулю. Проведем такой замкнутый гладкий контур G , который охватывает точки z и $\zeta_1(z, w)$, но не содержит второго корня уравнения (81). Рассмотрим функцию

$$T(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{d\zeta}{\zeta - z - w(\zeta^2 - \lambda^2)}. \quad (82)$$

Поскольку внутри контура G знаменатель имеет единственный простой нуль в точке $\zeta_1 = \zeta_1(z, w)$, то по теореме Коши о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{d\zeta}{\zeta - z - w(\zeta^2 - \lambda^2)} = \frac{1}{1 - 2w\zeta_1(z, w)}$$

и, таким образом,

$$T(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{d\zeta}{\zeta - z - w(\zeta^2 - \lambda^2)} = \frac{1}{1 - 2w\zeta_1(z, w)}. \quad (83)$$

С другой стороны, при малых по модулю w имеем

$$\left| \frac{w(\zeta^2 - \lambda^2)}{\zeta - z} \right| \leq q < 1 \quad (\zeta \in G).$$

Поэтому при таких w подинтегральное выражение в интеграле (83) можно представить в виде

$$\frac{1}{\zeta - z - w(\zeta^2 - \lambda^2)} = \frac{1}{\zeta - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w(\zeta^2 - \lambda^2)}{\zeta - z}} = \frac{1}{\zeta - z} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{w(\zeta^2 - \lambda^2)}{\zeta - z} \right]^n,$$

причем полученный ряд сходится равномерно относительно $\zeta \in G$. Подставляем это разложение в равенство (83) и интегрируем почленно:

$$T(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{2\pi i} \int_G \frac{(\zeta^2 - \lambda^2)^n}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

что в силу формулы Коши для производной приводит к равенству

$$\frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{(\zeta^2 - \lambda^2)^n}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{n!} \left[(z^2 - \lambda^2)^n \right]^{(n)}.$$

Подставляя это выражение в равенство (83), получаем, что

$$\frac{1}{1 - 2w\zeta_1(z, w)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \left[(z^2 - \lambda^2)^n \right]^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (84)$$

Вернемся к уравнению (81). Из двух его корней выбираем тот, который при малых w ближе к z , т.е.

$$\zeta_1(z, w) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4zw + 4w^2\lambda^2}}{2w},$$

причем имеется в виду главное значение квадратного корня. Следовательно, знаменатель в левой части равенства (84) имеет вид

$$1 - 2w\zeta_1(z, w) = \sqrt{1 - 4zw + 4w^2\lambda^2}.$$

Таким образом, для многочленов, определяемых равенством (65), имеем производящую функцию:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 4zw + 4w^2\lambda^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(z)}{n!} w^n. \quad (85)$$

Для перехода к стандартизованным многочленам $P_n^s(z)$, определяемым равенством (73), заменим в формуле (85) w на $w/2$. Тогда получим

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zw + w^2\lambda^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^s(z) w^n. \quad (86)$$

Теорема доказана.

Далее рассмотрим квадрат D с вершинами в точках $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -1 - i$, $z_4 = 1 - i$.

Ортогональность на квадрате понимается в смысле скалярного произведения

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) \bar{g}(z) |dz| \right|,$$

где Γ – контур квадрата.

Лемма 5.3. *Справедливы равенства*

$$g_{n+4k+j,n} := \int_{\Gamma} z^{n+4k+j} \bar{z}^n |dz| = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, 3). \quad (87)$$

Доказательство. Действительно,

$$(x + iy)^{n+4k+j} (x - iy)^n = (x^2 + y^2)^n (x + iy)^{4k+j}. \quad (88)$$

При $j=1$ выражение $(x + iy)^{4k+1}$ имеет следующий вид:

$$(x + iy)^{4k+1} = x^{4k+1} + iC_{4k+1}^1 x^{4k} y - C_{4k+1}^2 x^{4k-1} y^2 - iC_{4k+1}^3 x^{4k-2} y^3 + \dots + iy^{4k+1}. \quad (89)$$

Заметим, что достаточно хотя бы одному из множителей x^t или y^s быть в нечетной степени, чтобы интеграл по контуру Γ от такого произведения обращался в нуль (интеграл от нечетной функции по симметричному относительно нуля отрезку равен нулю).

При $j=2$ имеем

$$(x + iy)^{4k+2} = x^{4k+2} + iC_{4k+2}^1 x^{4k+1} y - C_{4k+2}^2 x^{4k} y^2 - \dots + C_{4k+2}^{4k} x^2 y^{4k} + iC_{4k+2}^{4k+1} xy^{4k+1} - y^{4k+2}. \quad (90)$$

Те слагаемые, которые содержат x и y в четных степенях, имеют равные себе по значению интеграла слагаемые, но с противоположным знаком, например, x^{4k+2} и $-y^{4k+2}$.

Аналогично проводится доказательство и в случае выражения $(x + iy)^{4k+3}$.

Кроме того, отметим, что все мнимые части интегралов (87) равны нулю.

Лемма доказана.

Приведем численные значения интегралов (87) для некоторых значений показателей степени:

$$g_{0,0} = 8, \quad g_{1,1} = \frac{32}{3}, \quad g_{2,2} = \frac{224}{15}, \quad g_{3,3} = \frac{768}{35}, \quad g_{4,4} = \frac{10624}{315}, \quad g_{5,5} = \frac{37376}{693},$$

$$g_{4,0} = g_{0,4} = -\frac{32}{5}, \quad g_{1,5} = g_{5,1} = -\frac{256}{21}, \quad g_{8,0} = g_{0,8} = \frac{128}{9}, \quad g_{6,2} = g_{2,6} = -\frac{1408}{63},$$

$$g_{6,6} = \frac{267776}{3003}, \quad g_{8,4} = g_{4,8} = -\frac{466432}{6435}.$$

Из леммы 5.3 вытекает тот факт, что степени z^k у ортогонального на контуре квадрата многочлена любой степени образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным z^4 . Этот факт позволяет существенно упростить нахождение коэффициентов ортогональных многочленов. Применяя лемму 5.3, получаем, что ортогональными многочленами первой, второй и третьей степени являются

$$P_1(z) = z, \quad P_2(z) = z^2, \quad P_3(z) = z^3.$$

Для нахождения ортогонального многочлена $P_4(z) = z^4 + a_0$ воспользуемся равенством

$$0 = \int_{\Gamma} (z^4 + a_0) \bar{z}^0 |dz| = g_{4,0} + a_0 g_{0,0} = -\frac{32}{5} + 8a_0,$$

откуда $a_0 = \frac{4}{5}$, т.е.

$$P_4(z) = z^4 + \frac{4}{5}.$$

Аналогично

$$P_5(z) = z^5 + \frac{8}{7}z, \quad P_6(z) = z^6 + \frac{220}{147}z^2, \quad P_7(z) = z^7 + \frac{182}{99}z^3.$$

Найдем расположение корней ортогонального многочлена восьмой степени. Для этого найдем коэффициенты a_{80} и a_{84} из системы уравнений

$$0 = \int_{\Gamma} (z^8 + a_{84}z^4 + a_{80}) \bar{z}^0 |dz| = \frac{128}{9} - \frac{32}{5}a_{84} + 8a_{80};$$

$$0 = \int_{\Gamma} (z^8 + a_{84}z^4 + a_{80}) \bar{z}^4 |dz| = g_{8,4} + a_{84}g_{4,4} + a_{80}g_{0,4} =$$

$$= -\frac{466432}{6435} + a_{84} \frac{10624}{315} - a_{80} \frac{32}{5}.$$

Из полученной системы

$$a_{80} = -\frac{976}{14157}, \quad a_{84} = \frac{3360}{1573}.$$

Таким образом,

$$P_8(z) = z^8 + \frac{3360}{1573}z^4 - \frac{976}{14157}.$$

Изучим расположение корней данного многочлена. Сделаем подстановку $x = z^4$, получим квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{3360}{1573}x - \frac{976}{14157} = 0. \quad (91)$$

Решая приближенно уравнение (54), получаем

$$x_1 \approx 0,03181; \quad x_2 \approx -2,16785.$$

Далее, решив два уравнения $z^4 - 0,03181 = 0$ и $z^4 + 2,16785 = 0$, получаем нули многочлена $P_8(z)$:

$$z_1 = -0,422319; \quad z_2 = -0,422319i; \quad z_3 = 0,422319; \quad z_4 = -0,422319i;$$

$$z_5 = -0,858010 + 0,858010i; \quad z_6 = -0,858010 - 0,858010i;$$

$$z_7 = 0,858010 - 0,858010i; \quad z_8 = 0,858010 + 0,858010i.$$

Таким образом, корни расположены в вершинах двух квадратов: одного с вершинами на координатных осях, а другого со сторонами, параллельными координатным осям.

Отметим, что факт о том (Фейер, 1922 г., [57], с. 18), что все нули ортогональных на области G многочленов принадлежат выпуклой оболочке области G , был давно известен.

Лемма 5.4. Если в системе $(n+1)$ многочленов

$$F_0(z), F_1(z), \dots, F_n(z)$$

каждый многочлен имеет степень k , то всякий многочлен $Q_n(z)$ степени n можно единственным образом представить в виде

$$Q_n(z) = a_0 F_0(z) + a_1 F_1(z) + \dots + a_n F_n(z). \quad (92)$$

Теорема 5.3. *Справедлива рекуррентная формула*

$$P_{n+1}(z) = zP_n(z) + c_{n-3}P_{n-3}(z) + c_{n-7}P_{n-7}(z) + \dots, \quad (93)$$

где

$$c_k = -\frac{1}{\|P_k\|_{\Gamma}^2} \int_{\Gamma} zP_n(z)\bar{P}_k(z)|dz| \quad (k=n-3, n-7, \dots).$$

Доказательство. В силу леммы 5.4 имеем разложение

$$zP_n(z) = a_0P_0(z) + a_1P_1(z) + \dots + a_nP_n(z) + P_{n+1}(z). \quad (94)$$

При $k < n+1$ умножим обе части равенства (94) на $\bar{P}_k(z)$ и проинтегрируем по контуру Γ , тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} zP_n(z)\bar{P}_k(z)|dz| &= \int_{\Gamma} (z^{n+1} + h_{n-3}z^{n-3} + h_{n-7}z^{n-7} + \dots) \times \\ &\times (\bar{z}^k + b_{k-4}\bar{z}^{k-4} + \dots)|dz| = a_k\|P_k\|^2. \end{aligned} \quad (95)$$

Если $n+1-k \neq 4m$ ($m=1, 2, \dots$), то левая часть равенства (94) равна нулю, т.е.

$$a_k = 0 \quad (k : k \neq n+1-4m).$$

Если же $k = n+1-4m$ ($m=1, 2, \dots$), то

$$a_k = \frac{\int_{\Gamma} zP_n(z)\bar{P}_k(z)|dz|}{\|P_k\|^2}. \quad (96)$$

Таким образом, из равенства (57) получаем

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z) &= zP_n(z) - a_{n-3}P_{n-3}(z) - a_{n-7}P_{n-7}(z) - \dots = zP_n(z) + \\ &+ c_{n-3}P_{n-3}(z) + c_{n-7}P_{n-7}(z) + \dots, \end{aligned}$$

т.е. равенство (93) доказано.

5.4. Сферические функции и функции Лежандра

Установим явные выражения для однородных многочленов, удовлетворяющих уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (97)$$

Введем сферические координаты

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (98)$$

При этом однородный многочлен степени n представляется в виде

$$u_n(x, y, z) = r^n Y_n(\theta, \varphi). \quad (99)$$

Такой многочлен, являющийся решением уравнения (1), называется обычно *объемной сферической функцией*, а множитель

$Y_n(\theta, \varphi)$, который будет, очевидно, многочленом от $\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi$ и $\sin \varphi$, называется *поверхностной сферической функцией*, или просто *сферической функцией* порядка n . Нашей задачей и является нахождение $2n+1$ линейно независимых сферических функций.

Отметим простой факт, связанный с решением уравнения (97). Напишем интеграл, зависящий от параметров x, y и z :

$$u(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z + ix \cos t + iy \sin t, t) dt, \quad (100)$$

причем мы предполагаем, что интеграл (100) можно дифференцировать под знаком интеграла по x, y и z . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta u &= \int_{-\pi}^{\pi} [1 + (i \cos t)^2 + (i \sin t)^2] f''(z + ix \cos t + iy \sin t, t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos^2 t - \sin^2 t] f''(z + ix \cos t + iy \sin t, t) dt = 0, \end{aligned}$$

где через $f''(\tau, t)$ обозначена вторая производная от функции $f(\tau, t)$ по первому аргументу.

Теперь, применяя конструкцию (100), можно построить $(2n+1)$ однородных многочленов степени n , удовлетворяющих уравнению (97). Напишем их в следующем виде:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (z + ix \cos t + iy \sin t)^n \cos mt dt \quad (m=0, 1, \dots, n), \quad (101)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (z + ix \cos t + iy \sin t)^n \sin mt dt \quad (m=1, 2, \dots, n). \quad (102)$$

Вводя сферические координаты, получим, пользуясь интегралами (101) и (102), следующие выражения для сферических функций:

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi \cos t + i \sin \theta \sin \varphi \sin t)^n \cos mt dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [\cos \theta + i \sin \theta \cos(t - \varphi)]^n \cos mt dt = \\ &= \int_{-\pi - \varphi}^{\pi - \varphi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi)^n \cos m(\varphi + \psi) d\psi = \\ &\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi)^n (\cos m\varphi \cos m\psi - \sin m\varphi \sin m\psi) d\psi = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi)^n \cos m\psi \, d\psi \cos m\varphi \quad (m=0,1,2,\dots,n). \quad (103)$$

Аналогично интеграл (102) приводит нас к следующим n сферическим функциям

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi)^n \cos m\psi \, d\psi \sin m\varphi \quad (m=1,2,\dots,n). \quad (104)$$

Линейная независимость всех $(2n+1)$ функций (103) и (104) следует из того, что зависимость этих функций от φ содержится в множителях $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$ и что не может существовать линейной зависимости между этими функциями, поскольку они ортогональны между собой на интервале $(-\pi, \pi)$. Таким образом, мы построили все $2n+1$ сферических функций порядка n . Коэффициенты при $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ в выражениях (103) и (104) являются одними и теми же функциями от θ . Мы их выразим через многочлены Лежандра.

Мы имели следующие выражения для многочленов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (105)$$

Введем еще функции $P_{n,m}(x)$, которые выражаются через многочлены Лежандра следующим образом:

$$P_{n,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{n!2^n} \frac{d^{n+m} [(x^2 - 1)^n]}{dx^{n+m}}. \quad (106)$$

При нечетном m множитель $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ определен лишь с точностью до знака. Если рассматривать x из промежутка $-1 \leq x \leq 1$ и положить $x = \cos \theta$, где $0 \leq \theta \leq \pi$, то множитель $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ можно считать неотрицательным. Действительно, тогда

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}} = (1-\cos^2 \theta)^{\frac{m}{2}} = \sin^m \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

Выведем теперь другие выражения для $P_n(x)$ и $P_{n,m}(x)$. Согласно формуле Коши можем написать

$$(x^2 - 1)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(z^2 - 1)^n}{z - x} dz, \quad (107)$$

где C – любой замкнутый контур, внутри которого находится точка $z=x$, причем этот контур обходится против часовой стрелки. Отсюда в силу (107) получаем

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_C \frac{(z-1)^n (z+1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz. \quad (108)$$

Возьмем в качестве контура C окружность с центром $z=x$ и радиусом $|x^2-1|^{1/2}$ (считается, что $x \neq \pm 1$). При этом переменная интегрирования z запишется в виде

$$z = x + (x^2-1)^{1/2} e^{i\psi}, \quad (109)$$

где выбор значения $(x^2-1)^{1/2}$ безразличен, и можно считать, что $-\pi \leq \psi \leq \pi$. Совершая в интеграле (108) замену (109), получаем

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^{n+1}} \int_C \frac{\left[x-1 + (x^2-1)^{1/2} e^{i\psi} \right]^n \left[x+1 + (x^2-1)^{1/2} e^{i\psi} \right]^n}{\left[(x^2-1)^{1/2} \right]^{(n+1)} e^{i(n+1)\psi}} \times \\ &\quad \times (x^2-1)^{1/2} i e^{i\psi} d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \frac{\left[x + (x^2-1)^{1/2} e^{i\psi} - 1 \right] \left[x + (x^2-1)^{1/2} e^{i\psi} + 1 \right]}{2(x^2-1)^{1/2} e^{i\psi}} \right\}^n d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \frac{\left[x + (x^2-1)^{1/2} e^{i\psi} \right]^2 - 1}{2(x^2-1)^{1/2} e^{i\psi}} \right\}^n d\psi. \end{aligned}$$

Преобразуем подынтегральное выражение к более простому виду

$$\begin{aligned} &\frac{\left[x + (x^2-1)^{1/2} e^{i\psi} \right]^2 - 1}{2(x^2-1)^{1/2} e^{i\psi}} = \frac{1}{2(x^2-1)^{1/2} e^{i\psi}} \times \\ &\quad \times \left[x^2 + 2x(x^2-1)^{1/2} e^{i\psi} + (x^2-1)e^{2i\psi} - 1 \right] = \\ &= \frac{(x^2-1)^{1/2}}{2(x^2-1)^{1/2} e^{i\psi}} \left[(x^2-1)^{1/2} + 2xe^{i\psi} + (x^2-1)^{1/2} e^{2i\psi} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(x^2-1)^{1/2} e^{-i\psi} + 2x + (x^2-1)^{1/2} e^{i\psi} \right] = \\ &= (x^2-1)^{1/2} \frac{e^{i\psi} + e^{-i\psi}}{2} = x + (x^2-1)^{1/2} \cos \psi. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая четность подынтегральной функции, получим

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[x + (x^2 - 1)^{1/2} \cos \psi \right]^n d\psi. \quad (110)$$

Если мы в правой части разложим выражение

$$\left[x + (x^2 - 1)^{1/2} \cos \psi \right]^n$$

по формуле *бинома Ньютона*, то, принимая во внимание, что интеграл от нечетной степени $\cos \psi$ по промежутку $(-\pi, \pi)$ равен нулю, мы видим, что все члены с нечетными степенями $(x^2 - 1)^{1/2}$ в правой части равенства (110) пропадут.

Проведем аналогичные вычисления для $P_{n,m}(x)$:

$$P_{n,m}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}} (n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2^{n+1} \pi i} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+m+1}} dz.$$

Будем для определенности считать, что $-1 < x < 1$. Совершая прежнюю замену переменной интегрирования, т.е.

$$z = x + (x^2 - 1)^{1/2} e^{i\psi},$$

и считая выражение $(x^2 - 1)^{1/2}$ положительно мнимым, т.е. вида pi , где $p > 0$, получим

$$P_{n,m}(x) = \frac{i^m (n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[x + (x^2 - 1) \cos \psi \right]^n e^{-im\psi} d\psi$$

или, принимая во внимание нечетность $\sin m\psi$,

$$P_{n,m}(x) = \frac{i^m (n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{\pi} \left[x + (x^2 - 1) \cos \psi \right]^n \cos m\psi d\psi. \quad (111)$$

Если мы в интеграле (100) положим $x = \cos \theta$, то получим, что

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi)^n d\psi.$$

Последнее выражение с точностью до множителя совпадает при $m=0$ с интегралом (103). Аналогично поступаем с интегралами (111).

Принимая во внимание, что постоянный множитель сохраняет свойство функции быть решением уравнения (97), мы приходим к следующему заключению: $(2n+1)$ сферических функций порядка n могут быть записаны в виде

$$P_n(\cos \theta), P_{n,m}(\cos \theta) \cos m\varphi, P_{n,m}(\cos \theta) \sin m\varphi \quad (m=1, 2, \dots, n), \quad (112)$$

где $P_n(x)$ являются многочленами Лежандра, определяемыми равенством (105), а функции $P_{n,m}(x)$ определяются формулами (106).

Напомним, что множитель $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ при подстановке $x=\cos\theta$ считается равным $\sin^m\theta$. Умножая решения (112) на произвольные постоянные и складывая, получим *общий вид сферической функции порядка n* :

$$Y_n(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{m=n} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) P_{n,m}(\cos\theta). \quad (113)$$

Вместо тригонометрических функций мы можем, составляя линейные комбинации решений (112), брать показательные функции, так что вместо набора сферических функций (112) порядка n мы можем взять следующий набор сферических функций порядка n :

$$P_n(\cos\theta), P_{n,m}(\cos\theta)e^{im\varphi}, P_{n,m}(\cos\theta)e^{-im\varphi} \quad (m=1, 2, \dots, n). \quad (114)$$

Согласно построению общий вид однородных многочленов степени n от переменных (x, y, z) , удовлетворяющих уравнению Лапласа, будет $r^n Y_n(\theta, \varphi)$, где $Y_n(\theta, \varphi)$ определяется формулой (113).

Свойство ортогональности. Докажем теперь ортогональность сферических функций на единичной сфере и вычислим интеграл от квадрата этих функций по единичной сфере. Предварительно займемся вычислением интегралов

$$I_{n,m} = \int_{-1}^1 [P_{n,m}(x)]^2 dx.$$

Мы имеем согласно определению этих функций

$$I_{n,m} = \int_{-1}^1 [P_{n,m}(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} dx,$$

причем при $m=0$ получаем интеграл от квадрата многочлена Лежандра

$$I_{n,0} = \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (115)$$

В конце настоящего пункта приведем доказательство равенства (115), а в данный момент приступим к вычислению интеграла $I_{m,n}$, пользуясь формулой (115). Производя интегрирование по частям, можно написать

$$\begin{aligned}
I_{n,m} &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} dx = \\
&= (1-x^2)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \frac{d^{m-1} P_n(x)}{dx^{m-1}} \Big|_{x=-1}^{x=1} - \\
&- \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1} P_n(x)}{dx^{m-1}} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right] dx = \\
&= - \int_{-1}^1 P_n^{(m-1)}(x) \left[(1-x^2)^m P_n^{(m)}(x) \right]' dx.
\end{aligned}$$

Но функция

$$z_m(x) = P_n^{(m-1)}(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+m-1} \left[(x^2-1)^n \right]}{dx^{n+m-1}}$$

является решением дифференциального уравнения

$$(1-x^2)z'' - 2mxz' + (n+m)(n-m+1)z = 0. \quad (116)$$

Действительно,

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) \equiv 0,$$

тогда, дифференцируя по x обе части последнего тождества, получаем

$$\begin{aligned}
-2xP_n''(x) + (1-x^2) \left[P_n'(x) \right]'' - 2P_n'(x) - 2x \left[P_n'(x) \right]' + n(n+1)P_n'(x) = \\
= (1-x^2) \left[P_n'(x) \right]'' - 4x \left[P_n'(x) \right]' + [n(n+1)-2]P_n'(x) = \\
= (1-x^2)z_2'' - 2 \cdot 2xz_2' + (n+2)(n-2+1)z_2 \equiv 0.
\end{aligned}$$

Применяя метод математической индукции, получаем уравнение (116).

Умножая обе части уравнения (116) на $(1-x^2)^{m-1}$, можно переписать его в виде

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^m P_n^{(m)}(x) \right] = -(n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_n(x)}{dx^{m-1}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
I_{n,m} &= - \int_{-1}^1 P_n^{(m-1)}(x) \left[(1-x^2)^m P_n^{(m)}(x) \right]' dx = \\
&= (n+m)(n-m+1) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{m-1} P_n^{(m-1)}(x) P_n^{(m-1)}(x) dx = \\
&= (n+m)(n-m+1) I_{n,m-1}
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$I_{n,m} = (n+m)(n-m+1)I_{n,m-1}.$$

Уменьшая число m постепенно на единицу, получим

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= (n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2)I_{n,m-2} = \\ &= (n+m)(n+m-1)(n+m-2)\dots[n+m-(m-1)](n-m+1) \times \\ &\quad \times (n-m+2)\dots(n-m+m)I_{n,0} = \\ &= \frac{(n+m)!}{n!} \cdot \frac{n!}{(n-m)!} I_{n,0} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \cdot \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\int_{-1}^1 [P_{n,m}(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (117)$$

Полученные результаты дадут возможность вычислить интеграл от квадрата сферических функций. Сферические функции $Y_n(\theta, \varphi)$ можно считать определенными на поверхности сферы единичного радиуса; θ и φ являются обычными географическими координатами точек этой поверхности, причем линии $\varphi = const$ являются меридианами и $\theta = const$ – параллели. При таком выборе координатных линий элемент площади поверхности выражается, как известно, следующей формулой

$$d\sigma = \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (118)$$

Докажем прежде всего, что две различные сферические функции $Y_p(\theta, \varphi)$ и $Y_q(\theta, \varphi)$ различных порядков, т.е. при $p \neq q$, будут ортогональными на поверхности s единичной сферы, т.е.

$$\iint_s Y_p(\theta, \varphi) Y_q(\theta, \varphi) d\sigma = 0. \quad (119)$$

Пусть v – объем, ограниченный этой сферой, и s – поверхность этой сферы. Применим к гармоническим функциям

$$U_p = r^p Y_p(\theta, \varphi), \quad V_q = r^q Y_q(\theta, \varphi) \quad (120)$$

формулу Грина

$$\iint_s \left(U_p \frac{\partial U_q}{\partial n} - U_q \frac{\partial U_p}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint_v (U_p \Delta U_q - U_q \Delta U_p) dv, \quad (121)$$

причем $\Delta U_p = \Delta U_q = 0$. В данном случае дифференцирование по нормали совпадает с дифференцированием по радиусу r , так что равенство (84) в силу (83) дает нам

$$\iint_s [q Y_p(\theta, \varphi) Y_q(\theta, \varphi) - p Y_q(\theta, \varphi) Y_p(\theta, \varphi)] d\sigma = 0,$$

откуда и вытекает непосредственно формула (119).

Покажем, что сферические функции (112), соответствующие одному и тому же значению n , также будут взаимно ортого-

нальными. Действительно, интегрирование по единичной сфере содержит операцию интегрирования по φ в промежутке $(0, 2\pi)$. Но функции (112) содержат следующие множители, зависящие от φ :

$$1, \cos \varphi, \sin \varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \dots, \cos n\varphi, \sin n\varphi,$$

и произведение любых двух из этих множителей, проинтегрированное в промежутке $(0, 2\pi)$, равно нулю. Точно также можно проверить, что функции (114) также образуют ортогональную систему.

Таким образом, если в равенстве (20) потенциал разложить по сферическим функциям, то $U(r) \approx \frac{\mu}{r} + \frac{\varepsilon\mu R_0^2}{3r^3}$, где $r = |\mathbf{r}|$ – расстояние от спутника до центра Земли, R_0 – экваториальный радиус Земли, ε – постоянная безразмерная величина, зависящая от сплюснутости Земли; для Земли можно принять $\varepsilon = 0,0016$.

Применяя систему уравнений (4.20), мы получаем следующее дифференциальное уравнение для радиальной составляющей

$$\ddot{r}(t) = \mu \left(\frac{p}{r^3} - \frac{1}{r^2} - \frac{\varepsilon R_0^2}{r^4} \right), \quad (122)$$

в котором $\mu = k^2$, $p = a(1 - e^2)$, a – большая полуось эллиптической орбиты спутника, p – фокальный параметр.

Таким образом, возникает необходимость аппроксимировать функцию

$$g(r) = \frac{p}{r^3} - \frac{1}{r^2} - \frac{\varepsilon R_0^2}{r^4} \quad (123)$$

полиномом $P(r) = a_1 r + a_0$. Для этого воспользуемся формулами (3.50) и (3.57).

Таким образом, дифференциальное уравнение, аппроксимирующее уравнение (122), примет вид

$$\ddot{r}(t) = \frac{k^2(1 - e^4)}{p^3} \left(\frac{4\varepsilon R_0^2}{p^2} - 1 \right) r(t) + \frac{k^2}{2p^2} \left[1 + 3e^2 - \frac{\varepsilon R_0^2(5 + 10e + e^4)}{p^2} \right] - \frac{k^2}{2p^2 t_*^4} \left(3t_*^2 - 4t_* + \frac{5\varepsilon R_0^2}{p^2} \right). \quad (124)$$

Г Л А В А 6

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ, НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Напомним, что дифференциальные уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек будут иметь вид ([45], с. 332):

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U_1}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U_1}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U_1}{\partial z_i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где функция U , называемая *силовой функцией* системы, определяется формулой

$$U_1 = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad (i \neq j), \quad (2)$$

в которой f – гравитационная постоянная,

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \quad (3)$$

Основная цель данной главы – аппроксимировать силовую функцию (2) многочленами наилучшего приближения в чебышевской метрике, для полученной силовой функции записать систему уравнений (1) и провести исследование полученной системы дифференциальных уравнений.

Силовая функция U_1 состоит из слагаемых вида

$$\frac{m_i m_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n; i \neq j).$$

Если обозначить

$$s_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$$

и применить к функции $\frac{1}{\sqrt{s_{ij}}}$ изложенный в главе 5 метод

аппроксимации, то мы получаем в качестве новой силовой функции U квадратичную форму, зависящую только от разностей координат.

Заметим, что в задачах определения эфемерид, как правило, являются известными неравенства

$$r_{ij \min}^2 = s_{ij \min} \leq s_{ij} \leq s_{ij \max} = r_{ij \max}^2,$$

(последнее неравенство может быть локальным), где $r_{ij \min}$ ($r_{ij \max}$) – минимальное (соответственно – максимальное) расстояния между телами M_i и M_j . Для удобства положим

$$a_{ij}(1 - e_{ij}) = r_{ij \min}, \quad a_{ij}(1 + e_{ij}) = r_{ij \max},$$

тогда величины a_{ij} и e_{ij} выразятся через $r_{ij \min}$ и $r_{ij \max}$ следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(r_{ij \max} + r_{ij \min}), \quad e_{ij} = \frac{r_{ij \max} - r_{ij \min}}{r_{ij \max} + r_{ij \min}}.$$

Запишем основное аппроксимационное соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{s_{ij}}} = -\frac{1}{2a_{ij}^3(1 - e_{ij}^2)} \cdot s_{ij} + \frac{1}{4a_{ij}(1 - e_{ij}^2)^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{3 + e_{ij}^2}{(1 - e_{ij}^2)^{\frac{2}{3}}} + 3 \right] + h_{ij}(s_{ij}), \quad (4)$$

где

$$|h_{ij}| \leq \frac{1}{4a_{ij}(1 - e_{ij}^2)^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{3 + e_{ij}^2}{(1 - e_{ij}^2)^{\frac{2}{3}}} - 3 \right], \quad (5)$$

Заменив в равенстве (2) функции

$$\frac{1}{\sqrt{s_{ij}}} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n; i \neq j)$$

первыми двумя слагаемыми равенства (4), получаем

$$U = \frac{f}{2} \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=n} m_i m_j b_{ij} s_{ij} + \sigma, \quad (6)$$

где

$$b_{ij} = -\frac{1}{2a_{ij}^3(1 - e_{ij}^2)} \quad (i \neq j), \quad b_{jj} = 0, \quad b_{ij} = b_{ji},$$

σ – некоторая постоянная. Так как в системе дифференциальных уравнений (1) участвуют только частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial U}{\partial z_k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

то будем считать, что $\sigma = 0$.

Сравним размерности силовых функций U_1 и U . Так как размерность $[f]$ постоянной тяготения

$$[f] = \frac{l^3}{mt^2},$$

то размерность U :

$$[U] = \frac{l^3}{mt^2} \cdot \frac{m^2}{l^3} \cdot l^2 = \frac{ml^2}{t^2},$$

а размерность исходной силовой функции U_1 :

$$[U_1] = \frac{l^3}{mt^2} \cdot \frac{m^2}{l} = \frac{ml^2}{t^2},$$

т.е. при таком способе аппроксимации размерность силовой функции сохраняется.

Сделаем следующее обозначение:

$$\mathbf{r}_x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Приведем сумму в выражении (6) к более удобному виду:

$$\begin{aligned} \frac{f}{2} \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=n} m_i m_j b_{ij} (x_i - x_j)^2 &= \frac{f}{2} \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=n} m_i m_j b_{ij} x_i^2 - \\ - 2 \cdot \frac{f}{2} \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=n} m_i m_j b_{ij} x_i x_j &+ \frac{f}{2} \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=n} m_i m_j b_{ij} x_j^2 = (Q \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$U = (Q \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_x) + (Q \mathbf{r}_y, \mathbf{r}_y) + (Q \mathbf{r}_z, \mathbf{r}_z), \quad (7)$$

где матрица Q имеет вид

$$Q_{ii} = \left(\sum_{j=0}^n f m_i m_j b_{ij} \right), \quad Q_{ij} = -f m_i m_j b_{ij} \quad (i \neq j), \quad (i, j = 0, 1, \dots, n). \quad (8)$$

Лемма 6.1. *Справедливы равенства*

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = 2 \left(Q \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial x_k}, \mathbf{r}_x \right), \quad \frac{\partial U}{\partial y_k} = 2 \left(Q \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial y_k}, \mathbf{r}_y \right), \quad \frac{\partial U}{\partial z_k} = 2 \left(Q \frac{\partial \mathbf{r}_z}{\partial z_k}, \mathbf{r}_z \right).$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \left(Q \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial x_k}, \mathbf{r}_x \right) + \left(Q \mathbf{r}_x, \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial x_k} \right) = 2 \left(Q \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial x_k}, \mathbf{r}_x \right). \quad (9)$$

В силу равенства (9) система дифференциальных уравнений (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
m_k \ddot{x}_k &= \frac{\partial U}{\partial x_k} = 2 \left(Q \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial x_k}, \mathbf{r}_x \right), \\
m_k \ddot{y}_k &= \frac{\partial U}{\partial y_k} = 2 \left(Q \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial y_k}, \mathbf{r}_y \right), \\
m_k \ddot{z}_k &= \frac{\partial U}{\partial z_k} = 2 \left(Q \frac{\partial \mathbf{r}_z}{\partial z_k}, \mathbf{r}_z \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n).
\end{aligned} \tag{10}$$

Перепишем систему (10) в скалярной форме

$$m_k \ddot{x}_k = 2 f m_k \left(\sum_{j \neq k} m_j b_{kj} \right) x_k - 2 f m_k \sum_{j \neq k} m_j b_{kj} x_j, \tag{11.1}$$

$$m_k \ddot{y}_k = 2 f m_k \left(\sum_{j \neq k} m_j b_{kj} \right) y_k - 2 f m_k \sum_{j \neq k} m_j b_{kj} y_j, \tag{11.2}$$

$$m_k \ddot{z}_k = 2 f m_k \left(\sum_{j \neq k} m_j b_{kj} \right) z_k - 2 f m_k \sum_{j \neq k} m_j b_{kj} z_j \quad (k = 0, 1, \dots, n). \tag{11.3}$$

Самым существенным является то, что система уравнений (11.1)–(11.3) распадается на три подсистемы: (11.1), (11.2), (11.3), у каждой из которых одна и та же матрица коэффициентов $2Q$.

Обозначив

$$\mathbf{r}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

сформулируем и докажем теорему о первых интегралах системы (11.1)–(11.3).

Теорема 6.1. *Справедливы следующие равенства*

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^n m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = 0, \quad m = \sum_{k=0}^n m_k, \tag{12}$$

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^n m_k \dot{\mathbf{r}}_k = \frac{1}{m} \mathbf{a}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^n m_k \mathbf{r}_k = \frac{1}{m} \mathbf{a} t + \frac{1}{m} \mathbf{b}, \tag{14}$$

где \mathbf{a}, \mathbf{b} – векторные константы; кроме того

$$\sum_{k=0}^n \left(x_k \frac{\partial U}{\partial x_k} + y_k \frac{\partial U}{\partial y_k} + z_k \frac{\partial U}{\partial z_k} \right) = \sum_{k=0}^n (\mathbf{r}_k, m_k \ddot{\mathbf{r}}_k) = 2U, \tag{15}$$

$$\sum_{k=0}^n [\mathbf{r}_k, m_k \dot{\mathbf{r}}_k] = \mathbf{L}, \tag{16}$$

где \mathbf{L} – постоянный вектор,

$$T := \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) = U + c, \quad (17)$$

а c – постоянная.

Доказательство. Равенство (12) вытекает из того, что

$$\sum_{k=0}^n m_k \ddot{x}_k = \sum_{k=0}^n \frac{\partial U}{\partial x_k} = 2 \sum_{k=0}^n \left(Q \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial x_k}, \mathbf{r}_x \right) = 2 \left(Q \sum_{k=0}^n \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial x_k}, \mathbf{r}_x \right) = 0$$

в силу структуры матрицы Q . Равенство (12), из которого следуют равенства (13) и (14), означает, что ускорение центра инерции системы равно нулю. Равенство (13) означает, что скорость центра инерции постоянна (по величине и направлению), т.е. (равенство (14)) центр инерции системы движется равномерно и прямолинейно.

Равенство (15) вытекает из теоремы Эйлера для однородных функций.

Докажем равенство (16). Так как третья координата векторного произведения $[\mathbf{r}_k, m_k \dot{\mathbf{r}}_k]$ имеет вид:

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}_k, m_k \dot{\mathbf{r}}_k]_3 &= x_k \frac{\partial U}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial U}{\partial x_k} = 2f \left(\sum_{j=0}^n m_k m_j b_{kj} x_k y_k - \sum_{j=0}^n m_k m_j b_{kj} x_k y_j \right) - \\ &- 2f \left(\sum_{j=0}^n m_k m_j b_{kj} x_k y_k - \sum_{j=0}^n m_k m_j b_{kj} x_j y_k \right) = \\ &= 2f \sum_{j=0}^n m_k m_j (x_j y_k - x_k y_j). \end{aligned} \quad (18)$$

Применяя равенство (18), получаем

$$\sum_{k=0}^n \left(x_k \frac{\partial U}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) = 2f \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n m_k m_j b_{kj} x_j y_k - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n m_k m_j b_{kj} x_k y_j \right) = 0.$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n [\mathbf{r}_k, m_k \dot{\mathbf{r}}_k] = \sum_{k=0}^n [\mathbf{r}_k, m_k \ddot{\mathbf{r}}_k] = 0,$$

то

$$\sum_{k=0}^n [\mathbf{r}_k, m_k \dot{\mathbf{r}}_k] = \mathbf{L} = \mathbf{const} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Равенство (19) показывает, что момент вектора количества движения системы остается постоянным, т.е. *плоскость Лапласа*

$$l_1 \left(x - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m m_k x_k \right) + l_2 \left(y - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m m_k y_k \right) + l_3 \left(z - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m m_k z_k \right) = 0$$

сохраняет неизменную ориентацию относительно абсолютных осей.

Для доказательства равенства (17) заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \dot{x}_k + \frac{\partial U}{\partial y_k} \cdot \dot{y}_k + \frac{\partial U}{\partial z_k} \cdot \dot{z}_k \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) = \frac{dT}{dt}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{d}{dt}(T - U) = 0$$

и, следовательно,

$$T - U = \text{const} = c.$$

Из равенств (15) и (17) следует, что

$$2T = \sum_{k=0}^n m_k (\dot{\mathbf{r}}_k, \dot{\mathbf{r}}_k) = 2U + 2c = \sum_{k=0}^n (\mathbf{r}_k, m_k \ddot{\mathbf{r}}_k) + 2c.$$

Теорема доказана.

Запишем теперь основную систему дифференциальных уравнений (11.1)–(11.3) в векторном виде

$$B\ddot{\mathbf{r}}_x = 2Q\mathbf{r}_x; \quad B\ddot{\mathbf{r}}_y = 2Q\mathbf{r}_y; \quad B\ddot{\mathbf{r}}_z = 2Q\mathbf{r}_z; \quad (20)$$

где B – диагональная матрица

$$B = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}.$$

Систему (20) можно записать в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_x = 2B^{-1}Q\mathbf{r}_x; \quad \ddot{\mathbf{r}}_y = 2B^{-1}Q\mathbf{r}_y; \quad \ddot{\mathbf{r}}_z = 2B^{-1}Q\mathbf{r}_z. \quad (21)$$

Так как квадратичная форма $(B\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_x)$ положительно определена, то пучок квадратичных форм

$$(2Q\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_x) - \lambda(B\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_x)$$

является регулярным ([58], с. 264) и матрица $D = 2B^{-1}Q$ имеет действительные собственные значения.

Напомним, что умножение матрицы простой структуры D на вектор \mathbf{r} может быть описано следующим образом: в n -мерном пространстве R существует n линейно независимых «направлений», вдоль которых матрица простой структуры D осуществляет «растяжение» с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Произвольный вектор \mathbf{r} может быть разложен на компоненты, идущие вдоль этих собственных направлений. Эти компоненты под-

вергаются соответствующим «растяжениям», после чего они в сумме дают вектор $D\mathbf{r}$.

Лемма 6.2. Матрица $D = 2B^{-1}Q$ является матрицей простой структуры, имеет неположительные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; собственные векторы, соответствующие этим значениям, удовлетворяют соотношениям

$$(B\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_k) = \delta_{ik} \quad (i, k = 0, 1, \dots, n), \quad (22)$$

где δ_{ik} – символ Кронекера.

Доказательство. Так как матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} -\sum_{j \neq 0} d_{0j} & d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0n} \\ d_{10} & -\sum_{j \neq 1} d_{1j} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{20} & d_{21} & -\sum_{j \neq 2} d_{2j} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \dots & -\sum_{j \neq n} d_{nj} \end{pmatrix},$$

где

$$d_{kj} = \frac{fm_j}{a_{kj}^3 (1 - e_{kj}^2)} > 0 \quad (k \neq j), \quad (23)$$

то в силу следствия 5.1 из ([6], с. 153) справедливо неравенство

$$\min_{0 \leq k \leq n} \left(-2 \sum_{j \neq k} d_{kj} \right) \leq \lambda \leq \max_{0 \leq k \leq n} \left(-\sum_{j \neq k} d_{kj} + \sum_{j \neq k} d_{kj} \right) = 0. \quad (24)$$

Заметим, что $\lambda = 0$ является собственным значением матрицы D . Действительно, определитель

$$\begin{vmatrix} -\sum_{j \neq 0} d_{0j} - \lambda & d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0n} \\ d_{10} & -\sum_{j \neq 1} d_{1j} - \lambda & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \dots & -\sum_{j \neq n} d_{nj} - \lambda \end{vmatrix}$$

добавлением к первому столбцу суммы остальных столбцов приводится к виду

$$\begin{vmatrix}
-\lambda & d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0n} \\
-\lambda & -\sum_{j \neq 1} d_{1j} - \lambda & d_{12} & \dots & d_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-\lambda & d_{n1} & d_{n2} & \dots & -\sum_{j \neq n} d_{1j} - \lambda
\end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix}
1 & d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0n} \\
1 & -\sum_{j \neq 1} d_{1j} - \lambda & d_{12} & \dots & d_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & d_{n1} & d_{n2} & \dots & -\sum_{j \neq n} d_{1j} - \lambda
\end{vmatrix},$$

а это означает, что $\lambda = 0$ является корнем характеристического уравнения.

Тот факт, что D имеет простую структуру, собственные значения являются действительными (а из неравенства (24) – неположительными) числами и справедливо свойство (22) вытекает из регулярности соответствующего пучка квадратичных форм.

Лемма доказана.

Далее более подробно изучим свойства матрицы D для системы из трех тел. В этом случае

$$D - \lambda E = \begin{pmatrix}
-d_{01} - d_{02} - \lambda & d_{01} & d_{02} \\
d_{10} & -d_{10} - d_{12} - \lambda & d_{12} \\
d_{20} & d_{21} & -d_{20} - d_{21} - \lambda
\end{pmatrix}.$$

Найдем характеристический многочлен матрицы D :

$$\begin{aligned}
\det(D - \lambda E) &= -\lambda \begin{vmatrix}
1 & d_{01} & d_{02} \\
1 & -d_{10} - d_{12} - \lambda & d_{12} \\
1 & d_{21} & -d_{20} - d_{21} - \lambda
\end{vmatrix} = \\
&= -\lambda \left[(d_{10} + d_{12} + \lambda)(d_{20} + d_{21} + \lambda) - d_{21}d_{12} - \right. \\
&\quad \left. - (-d_{01}d_{20} - d_{01}d_{21} - d_{01}\lambda - d_{02}d_{21}) \right] - \\
&\quad - \lambda(d_{01}d_{12} + d_{10}d_{02} + d_{12}d_{02} + d_{02}\lambda) = \\
&= -\lambda \left[\lambda^2 + (d_{10} + d_{12} + d_{20} + d_{21} + d_{01} + d_{02})\lambda \right] - \\
&\quad - \lambda(d_{10}d_{20} + d_{10}d_{21} + d_{12}d_{20} + d_{12}d_{21} - d_{21}d_{12} + \\
&\quad + d_{01}d_{20} + d_{01}d_{21} + d_{02}d_{21} + d_{01}d_{12} + d_{10}d_{02} + d_{12}d_{02}) = \\
&= -\lambda \left[\lambda^2 - 2f(m_0b_{10} + m_2b_{12} + m_0b_{02} + m_1b_{12} + m_1b_{01} + m_2b_{02})\lambda \right] - \\
&\quad - 4f^2\lambda(m_0^2b_{01}b_{02} + m_0m_1b_{01}b_{12} + m_0m_2b_{12}b_{02} + m_1m_0b_{01}b_{02} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_1^2 b_{01} b_{12} + m_1 m_2 b_{02} b_{12}) - \\
& -4f^2 \lambda (m_1 m_2 b_{01} b_{12} + m_0 m_2 b_{01} b_{02} + m_2^2 b_{12} b_{02}) = \\
& = -\lambda \left\{ \lambda^2 - 2f [b_{01}(m_0 + m_1) + b_{02}(m_0 + m_2) + b_{12}(m_1 + m_2)] \lambda \right\} - \\
& -4f^2 \lambda (m_0 + m_1 + m_2) (m_0 b_{01} b_{02} + m_1 b_{01} b_{12} + m_2 b_{02} b_{12}). \quad (25)
\end{aligned}$$

В дальнейшем, естественно, перейти к численному анализу поведения корней характеристического уравнения (25).

Однако для случая ограниченной ($m_2 = 0$) задачи трех тел корни характеристического уравнения находятся в удобном виде. В этом случае матрица $D - \lambda E$ имеет вид

$$D - \lambda E = \begin{pmatrix} -d_{01} - \lambda & d_{01} & 0 \\ d_{10} & -d_{10} - \lambda & 0 \\ d_{20} & d_{21} & -d_{20} - d_{21} - \lambda \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned}
\det(D - \lambda E) &= -(d_{20} + d_{21} + \lambda) [(d_{01} + \lambda)(d_{10} + \lambda) - d_{10} d_{01}] = \\
&= -\lambda (d_{20} + d_{21} + \lambda) (d_{01} + d_{10} + \lambda),
\end{aligned}$$

т.е. $\lambda_0 = 0$,

$$\lambda_1 = -d_{20} - d_{21} = -f \left[\frac{m_0}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} + \frac{m_1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} \right], \quad (26)$$

$$\lambda_2 = -d_{01} - d_{10} = -f \left[\frac{m_1}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)} + \frac{m_0}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)} \right] = -\frac{f(m_0 + m_1)}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)}. \quad (27)$$

Отметим, что размерность собственных значений

$$[\lambda_0] = [\lambda_1] = [\lambda_2] = \frac{l^3}{m t^2} \cdot \frac{m}{l^3} = \frac{1}{t^2}.$$

Собственный вектор, соответствующий корню $\lambda_0 = 0$, имеет вид

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие корням λ_1, λ_2 характеристического уравнения. Для этого надо решить однородную систему алгебраических уравнений (при $\lambda = \lambda_1$):

$$(-d_{01} + d_{20} + d_{21})u_0 + d_{01}u_1 = 0, \quad (28.1)$$

$$d_{10}u_0 + (-d_{10} + d_{20} + d_{21})u_1 = 0, \quad (28.2)$$

$$d_{20}u_0 + d_{21}u_1 + (-d_{20} - d_{21} + d_{21} + d_{20})u_2 = 0, \quad (28.3)$$

т.е.

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В случае, когда $\lambda = \lambda_2$, получаем систему алгебраических уравнений

$$d_{10}v_0 + d_{01}v_1 = 0, \quad (29.1)$$

$$d_{10}v_0 + d_{01}v_1 = 0, \quad (29.2)$$

$$d_{20}v_0 + d_{21}v_1 + (-d_{20} - d_{21} + d_{01} + d_{10})v_2 = 0. \quad (29.3)$$

Выражая из уравнения (29.1) v_1 через v_0 , получаем

$$v_1 = -\frac{d_{10}}{d_{01}}v_0 = -\frac{m_0}{m_1}v_0.$$

Далее рассмотрим случай различных собственных значений, т.е. случай, когда выполняется условие

$$\frac{m_0}{a_{20}^3(1-e_{20}^2)} + \frac{m_1}{a_{21}^3(1-e_{21}^2)} - \frac{m_0+m_1}{a_{01}^3(1-e_{01}^2)} \neq 0. \quad (30)$$

Подставим значение v_1 в уравнение (29.3) и выразим после такой подстановки v_2 :

$$\left(d_{20} - \frac{m_0}{m_1}d_{21}\right)v_0 = (d_{20} + d_{21} - d_{01} - d_{10})v_2;$$

$$v_2 = \frac{(m_1d_{20} - m_0d_{21})v_0}{m_1(d_{20} + d_{21} - d_{01} - d_{10})},$$

т.е. собственное направление \mathbf{w}_2 имеет вид

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m_0}{m_1} \\ \frac{m_1d_{20} - m_0d_{21}}{m_1(d_{20} + d_{21} - d_{01} - d_{10})} \end{pmatrix} v_0.$$

Если в качестве v_0 взять значение

$$v_0 = m_1(d_{20} + d_{21} - d_{01} - d_{10}) = m_1(\lambda_2 - \lambda_1),$$

то \mathbf{w}_2 будет иметь вид

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} m_1(d_{20} + d_{21} - d_{01} - d_{10}) \\ -m_0(d_{20} + d_{21} - d_{01} - d_{10}) \\ m_1 d_{20} - m_0 d_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1(\lambda_2 - \lambda_1) \\ -m_0(\lambda_2 - \lambda_1) \\ m_1 d_{20} - m_0 d_{21} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Таким образом, в случае ограниченной задачи трех тел мы можем записать решения каждой из систем

$$\ddot{\mathbf{r}}_x = 2B^{-1}Q\mathbf{r}_x; \quad \ddot{\mathbf{r}}_y = 2B^{-1}Q\mathbf{r}_y; \quad \ddot{\mathbf{r}}_z = 2B^{-1}Q\mathbf{r}_z;$$

в терминах известных частот ω_1, ω_2 :

$$\omega_1^2 = f \left[\frac{m_0}{a_{02}^3(1-e_{02}^2)} + \frac{m_1}{a_{12}^3(1-e_{12}^2)} \right],$$

$$\omega_2^2 = f \left[\frac{m_1}{a_{01}^3(1-e_{01}^2)} + \frac{m_0}{a_{01}^3(1-e_{01}^2)} \right] = \frac{f(m_0 + m_1)}{a_{01}^3(1-e_{01}^2)},$$

и собственных векторов $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$. Это приводит к равенствам

$$\begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = (\alpha_1 t + \alpha_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_x^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \omega_1 t + a_x^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \omega_1 t$$

$$+ b_x^1 \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cos \omega_2 t + b_x^2 \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \sin \omega_2 t,$$

$$\begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = (\beta_1 t + \beta_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_y^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \omega_1 t + a_y^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \omega_1 t + b_y^1 \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cos \omega_2 t + b_y^2 \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \sin \omega_2 t,$$

$$\begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = (\gamma_1 t + \gamma_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_z^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \omega_1 t + a_z^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \omega_1 t + b_z^1 \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cos \omega_2 t + b_z^2 \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \sin \omega_2 t,$$

в которых $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j (j=0,1)$; $a_x^k, b_x^k, a_y^k, b_y^k, a_z^k, b_z^k (k=1,2)$ – постоянные, определяемые начальными или краевыми условиями.

Запишем последние равенства в координатном виде:

$$\begin{cases} x_0(t) = \alpha_1 t + \alpha_0 + b_x^1 v_0 \cos \omega_2 t + b_x^2 v_0 \sin \omega_2 t, \\ y_0(t) = \beta_1 t + \beta_0 + b_y^1 v_0 \cos \omega_2 t + b_y^2 v_0 \sin \omega_2 t, \\ z_0(t) = \gamma_1 t + \gamma_0 + b_z^1 v_0 \cos \omega_2 t + b_z^2 v_0 \sin \omega_2 t; \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 t + \alpha_o + b_x^1 v_1 \cos \omega_2 t + b_x^2 v_1 \sin \omega_2 t, \\ y_1(t) = \beta_1 t + \beta_o + b_y^1 v_1 \cos \omega_2 t + b_y^2 v_1 \sin \omega_2 t, \\ z_1(t) = \gamma_1 t + \gamma_o + b_z^1 v_1 \cos \omega_2 t + b_z^2 v_1 \sin \omega_2 t; \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} x_2(t) = \alpha_1 t + \alpha_o + a_x^1 \cos \omega_1 t + a_x^2 \sin \omega_1 t + b_x^1 v_2 \cos \omega_2 t + b_x^2 v_2 \sin \omega_2 t, \\ y_2(t) = \beta_1 t + \beta_o + a_y^1 \cos \omega_1 t + a_y^2 \sin \omega_1 t + b_y^1 v_2 \cos \omega_2 t + b_y^2 v_2 \sin \omega_2 t, \\ z_2(t) = \gamma_1 t + \gamma_o + a_z^1 \cos \omega_1 t + a_z^2 \sin \omega_1 t + b_z^1 v_2 \cos \omega_2 t + b_z^2 v_2 \sin \omega_2 t. \end{cases} \quad (34)$$

Далее для системы (32)–(34) решим задачу Коши. Для этого обозначим $x_{00}, x_{10}, x_{20}, y_{00}, y_{10}, y_{20}, z_{00}, z_{10}, z_{20}$ – начальные координаты тел системы; $\dot{x}_{00}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{y}_{00}, \dot{y}_{10}, \dot{y}_{20}, \dot{z}_{00}, \dot{z}_{10}, \dot{z}_{20}$ – начальные скорости тел системы. Положив в равенствах (32)–(34) $t = 0$, получаем

$$\alpha_0 + b_x^1 v_0 = x_{00}, \quad \alpha_0 + b_x^1 v_1 = x_{10}, \quad (35.1)$$

$$\beta_0 + b_y^1 v_0 = y_{00}, \quad \beta_0 + b_y^1 v_1 = y_{10}, \quad (35.2)$$

$$\gamma_0 + b_z^1 v_0 = z_{00}, \quad \gamma_0 + b_z^1 v_1 = z_{10}. \quad (35.3)$$

Из уравнений (35.1)–(35.3) получаем

$$b_x^1 = \frac{x_{10} - x_{00}}{v_1 - v_0}, \quad b_y^1 = \frac{y_{10} - y_{00}}{v_1 - v_0}, \quad b_z^1 = \frac{z_{10} - z_{00}}{v_1 - v_0}. \quad (36)$$

Подставляя найденные значения в уравнения (35.1)–(35.3), получаем

$$\alpha_0 = \frac{x_{00} v_1 - x_{10} v_0}{v_1 - v_0}, \quad \beta_0 = \frac{y_{00} v_1 - y_{10} v_0}{v_1 - v_0}, \quad \gamma_0 = \frac{z_{00} v_1 - z_{10} v_0}{v_1 - v_0}. \quad (37)$$

Далее, продифференцировав каждое из равенств (32)–(34) по t и подставив значение $t = 0$, получаем

$$\alpha_1 + b_x^2 v_0 \omega_2 = \dot{x}_{00}, \quad \alpha_1 + b_x^2 v_1 \omega_2 = \dot{x}_{10}; \quad (38.1)$$

$$\beta_1 + b_y^2 v_0 \omega_2 = \dot{y}_{00}, \quad \beta_1 + b_y^2 v_1 \omega_2 = \dot{y}_{10}; \quad (38.2)$$

$$\gamma_1 + b_z^2 v_0 \omega_2 = \dot{z}_{00}, \quad \gamma_1 + b_z^2 v_1 \omega_2 = \dot{z}_{10}. \quad (38.3)$$

Из уравнений (35.1)–(35.3) находим

$$b_x^2 = \frac{\dot{x}_{10} - \dot{x}_{00}}{\omega_2 (v_1 - v_0)}, \quad b_y^2 = \frac{\dot{y}_{10} - \dot{y}_{00}}{\omega_2 (v_1 - v_0)}, \quad b_z^2 = \frac{\dot{z}_{10} - \dot{z}_{00}}{\omega_2 (v_1 - v_0)}. \quad (39)$$

Из равенств (34) при $t = 0$ получаем

$$\alpha_0 + a_x^1 + b_x^1 v_2 = x_{20}, \quad \beta_0 + a_y^1 + b_y^1 v_2 = y_{20}, \quad \gamma_0 + a_z^1 + b_z^1 v_2 = z_{20}. \quad (40)$$

Выражая из уравнений (40) a_x^1, a_y^1, a_z^1 , будем иметь

$$a_x^1 = \frac{1}{v_1 - v_0} \left[v_0 (x_{10} - x_{20}) + v_1 (x_{20} - x_{00}) + v_2 (x_{00} - x_{10}) \right], \quad (41.1)$$

$$a_y^1 = \frac{1}{v_1 - v_0} [v_0(y_{10} - y_{20}) + v_1(y_{20} - y_{00}) + v_2(y_{00} - y_{10})], \quad (41.2)$$

$$a_z^1 = \frac{1}{v_1 - v_0} [v_0(z_{10} - z_{20}) + v_1(z_{20} - z_{00}) + v_2(z_{00} - z_{10})]. \quad (41.3)$$

Далее из равенств (38.1)–(38.3) найдем постоянные $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{v_1 - v_0} (v_1 \dot{x}_{00} - v_0 \dot{x}_{10}), \\ \beta_1 &= \frac{1}{v_1 - v_0} (v_1 \dot{y}_{00} - v_0 \dot{y}_{10}), \\ \gamma_1 &= \frac{1}{v_1 - v_0} (v_1 \dot{z}_{00} - v_0 \dot{z}_{10}). \end{aligned} \quad (42)$$

После дифференцирования по t равенств (34) и подстановки $t = 0$ найдем постоянные a_x^2, a_y^2, a_z^2 :

$$a_x^2 = \frac{1}{\omega_1(v_1 - v_0)} [v_0(\dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}) + v_1(\dot{x}_{20} - \dot{x}_{00}) + v_2(\dot{x}_{00} - \dot{x}_{10})], \quad (43.1)$$

$$a_y^2 = \frac{1}{\omega_1(v_1 - v_0)} [v_0(\dot{y}_{10} - \dot{y}_{20}) + v_1(\dot{y}_{20} - \dot{y}_{00}) + v_2(\dot{y}_{00} - \dot{y}_{10})], \quad (43.2)$$

$$a_z^2 = \frac{1}{\omega_1(v_1 - v_0)} [v_0(\dot{z}_{10} - \dot{z}_{20}) + v_1(\dot{z}_{20} - \dot{z}_{00}) + v_2(\dot{z}_{00} - \dot{z}_{10})]. \quad (43.3)$$

Приведем равенства (34) к удобному для дальнейшего анализа виду. Так как

$$\begin{aligned} v_0 &= -m_1(\omega_2^2 - \omega_1^2), \\ v_1 &= m_0(\omega_2^2 - \omega_1^2), \end{aligned} \quad (44)$$

$$v_1 - v_0 = (m_0 + m_1)(\omega_2^2 - \omega_1^2);$$

$$\frac{v_0}{v_1 - v_0} = -\frac{m_1}{m_0 + m_1}, \quad \frac{v_1}{v_1 - v_0} = \frac{m_0}{m_0 + m_1}; \quad (45)$$

$$v_2 = fm_0m_1 \left[\frac{1}{a_{12}^3(1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3(1 - e_{02}^2)} \right]; \quad (46)$$

$$\frac{v_2}{v_1 - v_0} = \frac{fm_0m_1}{(m_0 + m_1)(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[\frac{1}{a_{12}^3(1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3(1 - e_{02}^2)} \right]. \quad (47)$$

Подставляя найденные значения в равенство (34), получаем, например, $x_2(t)$:

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & \left(\frac{m_0 \dot{x}_{00}}{m_0 + m_1} + \frac{m_1 \dot{x}_{10}}{m_0 + m_1} \right) t + \frac{m_0 x_{00}}{m_0 + m_1} + \frac{m_1 x_{10}}{m_0 + m_1} + \\
& + \frac{1}{m_0 + m_1} \left\{ -m_1 (x_{10} - x_{20}) + m_0 (x_{20} - x_{00}) + \right. \\
& + \left. \frac{f m_0 m_1 (x_{00} - x_{10})}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left[\frac{1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] \right\} \cos \omega_1 t + \\
& + \frac{1}{\omega_1 (m_0 + m_1)} \left\{ -m_1 (\dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}) + m_0 (\dot{x}_{20} - \dot{x}_{00}) + \right. \\
& + \left. \frac{f m_0 m_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left[\frac{1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] (\dot{x}_{00} - \dot{x}_{10}) \right\} \sin \omega_1 t + \\
& + \frac{f m_0 m_1}{(m_0 + m_1) (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[\frac{1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] (x_{10} - x_{00}) \cos \omega_2 t + \\
& + \frac{f m_0 m_1}{(m_0 + m_1) \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[\frac{1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] (\dot{x}_{10} - \dot{x}_{00}) \sin \omega_2 t.
\end{aligned} \tag{48.1}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
y_2(t) = & \left(\frac{m_0 \dot{y}_{00}}{m_0 + m_1} + \frac{m_1 \dot{y}_{10}}{m_0 + m_1} \right) t + \frac{m_0 y_{00}}{m_0 + m_1} + \frac{m_1 y_{10}}{m_0 + m_1} + \\
& + \frac{1}{m_0 + m_1} \left\{ -m_1 (y_{10} - y_{20}) + m_0 (y_{20} - y_{00}) + \right. \\
& + \left. \frac{f m_0 m_1 (y_{00} - y_{10})}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left[\frac{1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] \right\} \cos \omega_1 t + \\
& + \frac{1}{\omega_1 (m_0 + m_1)} \left\{ -m_1 (\dot{y}_{10} - \dot{y}_{20}) + m_0 (\dot{y}_{20} - \dot{y}_{00}) + \right. \\
& + \left. \frac{f m_0 m_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left[\frac{1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] (\dot{y}_{00} - \dot{y}_{10}) \right\} \sin \omega_1 t + \\
& + \frac{f m_0 m_1}{(m_0 + m_1) (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[\frac{1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] (y_{10} - y_{00}) \cos \omega_2 t + \\
& + \frac{f m_0 m_1}{(m_0 + m_1) \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[\frac{1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] (\dot{y}_{10} - \dot{y}_{00}) \sin \omega_2 t.
\end{aligned} \tag{48.2}$$

$$\begin{aligned}
z_2(t) = & \left(\frac{m_0 \dot{z}_{00}}{m_0 + m_1} + \frac{m_1 \dot{z}_{10}}{m_0 + m_1} \right) t + \frac{m_0 z_{00}}{m_0 + m_1} + \frac{m_1 z_{10}}{m_0 + m_1} + \\
& + \frac{1}{m_0 + m_1} \left\{ -m_1 (z_{10} - z_{20}) + m_0 (z_{20} - z_{00}) + \right. \\
& + \left. \frac{f m_0 m_1 (z_{00} - z_{10})}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left[\frac{1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] \right\} \cos \omega_1 t + \\
& + \frac{1}{\omega_1 (m_0 + m_1)} \left\{ -m_1 (\dot{z}_{10} - \dot{z}_{20}) + m_0 (\dot{z}_{20} - \dot{z}_{00}) + \right. \\
& + \left. \frac{f m_0 m_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left[\frac{1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] (\dot{z}_{00} - \dot{z}_{10}) \right\} \sin \omega_1 t + \\
& + \frac{f m_0 m_1}{(m_0 + m_1) (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[\frac{1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] (z_{10} - z_{00}) \cos \omega_2 t + \\
& + \frac{f m_0 m_1}{(m_0 + m_1) \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[\frac{1}{a_{12}^3 (1 - e_{12}^2)} - \frac{1}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] (\dot{z}_{10} - \dot{z}_{00}) \sin \omega_2 t.
\end{aligned} \tag{48.3}$$

Выясним, какие следствия имеет данный метод для задачи двух тел. Матрица D в этом случае будет иметь вид

$$D = \frac{f}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)} \begin{pmatrix} -m_1 & m_1 \\ m_0 & -m_0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Найдем собственные значения матрицы D :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -m_1 - \mu & m_1 \\ m_0 & -m_0 - \mu \end{vmatrix} &= \mu^2 + (m_0 + m_1) \mu + m_1 m_0 - m_1 m_0 = \\
&= \mu^2 + (m_0 + m_1) \mu = 0,
\end{aligned}$$

т.е.

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -(m_0 + m_1),$$

но тогда

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{f (m_0 + m_1)}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (21) для двух тел будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_0(t) = \alpha_1 t + \alpha_o + b_x^1 v_0 \cos \omega t + b_x^2 v_0 \sin \omega t, \\ y_0(t) = \beta_1 t + \beta_o + b_y^1 v_0 \cos \omega t + b_y^2 v_0 \sin \omega t, \\ z_0(t) = \gamma_1 t + \gamma_o + b_z^1 v_0 \cos \omega t + b_z^2 v_0 \sin \omega t; \end{cases} \tag{50.0}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 t + \alpha_o + b_x^1 v_1 \cos \omega t + b_x^2 v_1 \sin \omega t, \\ y_1(t) = \beta_1 t + \beta_o + b_y^1 v_1 \cos \omega t + b_y^2 v_1 \sin \omega t, \\ z_1(t) = \gamma_1 t + \gamma_o + b_z^1 v_1 \cos \omega t + b_z^2 v_1 \sin \omega t; \end{cases} \quad (50.1)$$

где

$$\omega^2 = \frac{f(m_0 + m_1)}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)}, \quad \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ -m_0 \end{pmatrix} -$$

собственный вектор матрицы D , соответствующий собственному значению λ_2 . По формулам (36)

$$\begin{aligned} b_x^1 &= \frac{x_{10} - x_{00}}{v_1 - v_0} = \frac{x_{00} - x_{10}}{m_0 + m_1}, \\ b_y^1 &= \frac{y_{10} - y_{00}}{v_1 - v_0} = \frac{y_{00} - y_{10}}{m_0 + m_1}, \\ b_z^1 &= \frac{z_{10} - z_{00}}{v_1 - v_0} = \frac{z_{00} - z_{10}}{m_0 + m_1}. \end{aligned} \quad (51)$$

Далее в силу равенств (37)

$$\alpha_0 = \frac{m_0 x_{00} + m_1 x_{10}}{m_0 + m_1}, \quad \beta_0 = \frac{m_0 y_{00} + m_1 y_{10}}{m_0 + m_1}, \quad \gamma_0 = \frac{m_0 z_{00} + m_1 z_{10}}{m_0 + m_1}. \quad (52)$$

И применяя формулы (39), получаем

$$b_x^2 = \frac{\dot{x}_{10} - \dot{x}_{00}}{\omega(m_0 + m_1)}, \quad b_y^2 = \frac{\dot{y}_{10} - \dot{y}_{00}}{\omega(m_0 + m_1)}, \quad b_z^2 = \frac{\dot{z}_{10} - \dot{z}_{00}}{\omega(m_0 + m_1)}. \quad (53)$$

Кроме того, из равенств (41.1)–(41.3)

$$\alpha_1 = \frac{m_0 \dot{x}_{00} + m_1 \dot{x}_{10}}{m_0 + m_1}; \quad \beta_1 = \frac{m_0 \dot{y}_{00} + m_1 \dot{y}_{10}}{m_0 + m_1}; \quad \gamma_1 = \frac{m_0 \dot{z}_{00} + m_1 \dot{z}_{10}}{m_0 + m_1}. \quad (54)$$

Запишем равенства (50.0), (50.1) с найденными значениями коэффициентов $b_x^1, b_y^1, b_z^1, b_x^2, b_y^2, b_z^2$:

$$\begin{cases} x_0(t) = \alpha_1 t + \alpha_o + \frac{m_1 (x_{00} - x_{10})}{m_0 + m_1} \cos \omega t + \frac{m_1 (\dot{x}_{00} - \dot{x}_{10})}{\omega(m_0 + m_1)} \sin \omega t, \\ y_0(t) = \beta_1 t + \beta_o + \frac{m_1 (y_{00} - y_{10})}{m_0 + m_1} \cos \omega t + \frac{m_1 (\dot{y}_{00} - \dot{y}_{10})}{\omega(m_0 + m_1)} \sin \omega t, \\ z_0(t) = \gamma_1 t + \gamma_o + \frac{m_1 (z_{00} - z_{10})}{m_0 + m_1} \cos \omega t + \frac{m_1 (\dot{z}_{00} - \dot{z}_{10})}{\omega(m_0 + m_1)} \sin \omega t. \end{cases} \quad (55.0)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 t + \alpha_0 - \frac{m_0(x_{00} - x_{10})}{m_0 + m_1} \cos \omega t - \frac{m_0(\dot{x}_{00} - \dot{x}_{10})}{\omega(m_0 + m_1)} \sin \omega t, \\ y_1(t) = \beta_1 t + \beta_0 - \frac{m_0(y_{00} - y_{10})}{m_0 + m_1} \cos \omega t - \frac{m_0(\dot{y}_{00} - \dot{y}_{10})}{\omega(m_0 + m_1)} \sin \omega t, \\ z_1(t) = \gamma_1 t + \gamma_0 + \frac{m_0(z_{00} - z_{10})}{m_0 + m_1} \cos \omega t + \frac{m_0(\dot{z}_{00} - \dot{z}_{10})}{\omega(m_0 + m_1)} \sin \omega t. \end{cases} \quad (55.1)$$

Заметим, что квадрат T_1^2 периода тригонометрических функций в равенствах (55.0)–(55.1) выражается следующим образом

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} = \frac{4\pi^2 a_{01}^2 (1 - e_{01}^2)}{f(m_0 + m_1)}. \quad (56)$$

Из равенства (56), применяя этот результат к планетам Солнечной системы, взятым попарно с Солнцем (тело M_0), получаем *третий закон Кеплера*

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{4\pi^2 a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)}{f(m_0 + m_1)} \cdot \frac{f(m_0 + m_2)}{4\pi^2 a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} = \frac{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2) (m_0 + m_2)}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2) (m_0 + m_1)}. \quad (57)$$

Равенство (57) отличается от классической формулировки множителем

$$\frac{1 - e_{01}^2}{1 - e_{02}^2} \approx 1. \quad (58)$$

Остановимся на применении развиваемого метода к задаче *двух неподвижных центров*. Пусть в двух неподвижных центрах расположены материальные точки с массами m_1 и m_2 соответственно. Построим систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось Oz проходила через точки m_1 и m_2 . Расстояние (рис. 36) от O до массы m_1 обозначим через c_1 , а от O до m_2 — через c_2 . Пусть в суммарном поле сил ньютоновского притяжения к каждой из точек m_1, m_2 находится точка с массой m , движение которой изучается. Ее движение определяется силовой функцией

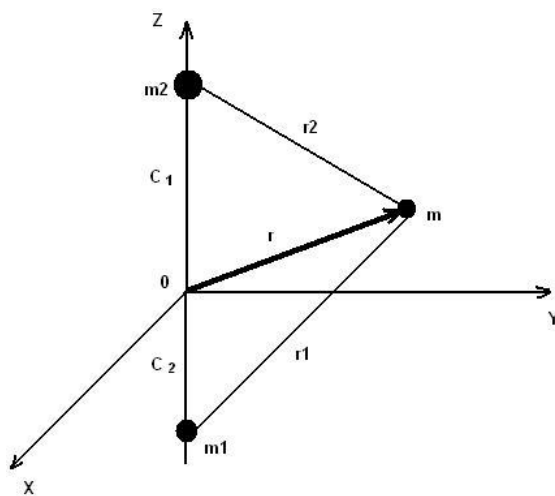


Рис. 36. Задача двух неподвижных центров.

$$U_0 = fm \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right), \quad (59)$$

где r_1, r_2 – расстояния от m_1, m_2 соответственно до движущейся точки m :

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c_2)^2}.$$

Пусть выполняются условия

$$a_{01}^2 (1 - e_{01})^2 \leq r^2 - 2c_1 z + c_1^2 \leq a_{01}^2 (1 + e_{01})^2, \quad (60.1)$$

$$a_{02}^2 (1 - e_{02})^2 \leq r^2 - 2c_2 z + c_2^2 \leq a_{02}^2 (1 + e_{02})^2. \quad (60.2)$$

Применяя чебышевские приближения к функциям

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2c_1 z + c_1^2}}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2c_2 z + c_2^2}},$$

приводим силовую функцию к следующему виду:

$$U = -\frac{fm}{2} \left[\frac{m_1 (r^2 - 2c_1 z + c_1^2)}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)} + \frac{m_2 (r^2 - 2c_2 z + c_2^2)}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] + const. \quad (61)$$

После такого приведения получим систему соответствующих дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} = -f \left[\frac{m_1}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)} + \frac{m_2}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] x; \quad (62.1)$$

$$\ddot{y} = -f \left[\frac{m_1}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)} + \frac{m_2}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] y; \quad (62.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} = & -f \left[\frac{m_1}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)} + \frac{m_2}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right] z + \\ & + f \left[\frac{c_1 m_1}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)} + \frac{c_2 m_2}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)} \right]. \end{aligned} \quad (62.3)$$

Запишем решение задачи Коши для системы (62.1)–(62.3):

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t; \quad (63.1)$$

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t; \quad (63.2)$$

$$z(t) = \left[z_0 - \frac{\frac{c_1 m_1}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)} + \frac{c_2 m_2}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)}}{\frac{m_1}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)} + \frac{m_2}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)}} \right] \cos \omega t + \frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{\frac{c_1 m_1}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)} + \frac{c_2 m_2}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)}}{\frac{m_1}{a_{01}^3 (1 - e_{01}^2)} + \frac{m_2}{a_{02}^3 (1 - e_{02}^2)}}. \quad (63.3)$$

ГЛАВА 7

ЗАДАЧА МНОГИХ ТЕЛ В ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Перейдем далее к относительной системе координат с началом в точке M_0 и с неизменными направлениями осей. Возьмем за начало новой системы координат точку M_0 , а новые оси M_0x, M_0y, M_0z будем считать параллельными соответственным осям старой системы. В новой системе координат будут выполняться равенства

$$\dot{x}'_k = \dot{x}_k - \dot{x}_0, \dot{y}'_k = \dot{y}_k - \dot{y}_0, \dot{z}'_k = \dot{z}_k - \dot{z}_0, \quad (1)$$

где (x'_k, y'_k, z'_k) – новые координаты точки M_k ($k=1, 2, \dots, n$).

Из равенств (1) следует, что

$$\dot{x}'_k - \dot{x}'_j = \dot{x}_k - \dot{x}_j, \dot{y}'_k - \dot{y}'_j = \dot{y}_k - \dot{y}_j, \dot{z}'_k - \dot{z}'_j = \dot{z}_k - \dot{z}_j. \quad (2)$$

Получим систему уравнений, аналогичную системе (6.21), в относительных координатах. Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_k} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_k} &= 2f \left[m_0 b_{k0} (x_k - x_0) + \sum_{j \neq 0, j \neq k} m_j b_{kj} (x_k - x_j) \right], \\ \frac{1}{m_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_0} &= 2f \left[m_k b_{0k} (x_0 - x_k) + \sum_{j \neq 0, j \neq k} m_j b_{0j} (x_0 - x_j) \right], \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \ddot{x}'_k &= \ddot{x}_k - \ddot{x}_0 = \frac{1}{m_k} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_k} - \frac{1}{m_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_0} = \\ &= 2f \left[m_0 b_{k0} (x_k - x_0) + \sum_{j \neq 0, j \neq k} m_j b_{kj} (x_k - x_j) \right] - \\ &\quad - 2f \left[m_k b_{0k} (x_0 - x_k) + \sum_{j \neq 0, j \neq k} m_j b_{0j} (x_0 - x_j) \right] = \\ &= 2f \left[(m_0 + m_1) b_{0k} (\dot{x}'_k - \dot{x}'_0) + \sum_{j \neq 0, j \neq k} m_j b_{kj} (\dot{x}'_k - \dot{x}'_j) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j \neq 0, j \neq k} m_j b_{0j} (\dot{x}'_0 - \dot{x}'_j) \right] = 2f \left\{ \left[(m_0 + m_k) b_{0k} + \sum_{j \neq 0, j \neq k} m_j b_{kj} \right] \dot{x}'_k + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \neq 0, j \neq k} m_j (b_{0j} - b_{kj}) \dot{x}'_j \right\} \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Таким образом, в относительной системе координат система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k = 2f \left\{ \left[(m_0 + m_k)b_{0k} + \sum_{j \neq 0, j \neq k} m_j b_{kj} \right] x_k' + \right. \\ \left. + \sum_{j \neq 0, j \neq k} m_j (b_{0j} - b_{kj}) x_j' \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (3)$$

Изучим более подробно свойства системы (3) для случая трех тел. В этом случае (для сокращения записи опустим штрих при переменных (x_k, y_k, z_k)):

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 2f [(m_0 + m_1)b_{01} + m_2 b_{12}] x_1 + 2f m_2 (b_{02} - b_{12}) x_2, \\ \ddot{x}_2 = 2f m_1 (b_{01} - b_{21}) x_1 + 2f [(m_0 + m_2)b_{02} + m_1 b_{21}] x_2. \end{cases} \quad (4)$$

Характеристическое уравнение матрицы

$$D = 2f \begin{pmatrix} (m_0 + m_1)b_{01} + m_2 b_{12} & m_2 (b_{02} - b_{12}) \\ m_1 (b_{01} - b_{21}) & (m_0 + m_2)b_{02} + m_1 b_{21} \end{pmatrix}$$

будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2f[(m_0 + m_1)b_{01} + m_2 b_{12}] - \lambda & 2f m_2 (b_{02} - b_{12}) \\ 2f m_1 (b_{01} - b_{21}) & 2f[(m_0 + m_2)b_{02} + m_1 b_{21}] - \lambda \end{vmatrix} = \\ & = \lambda^2 - 2f \{ [(m_0 + m_1)b_{01} + m_2 b_{12}] + [(m_0 + m_2)b_{02} + m_1 b_{21}] \} \lambda + \\ & \quad + 4f^2 [(m_0 + m_1)b_{01} + m_2 b_{12}] \cdot [(m_0 + m_2)b_{02} + m_1 b_{21}] - \\ & \quad - 4f^2 m_1 m_2 (b_{01} - b_{12})(b_{02} - b_{12}) = \\ & = \lambda^2 - 2f [m_0 (b_{01} + b_{02}) + m_1 (b_{01} + b_{02}) + m_2 (b_{02} + b_{12})] \lambda + \\ & \quad + 4f^2 (m_0 + m_1 + m_2) (m_0 b_{01} b_{02} + m_1 b_{01} b_{12} + m_2 b_{02} b_{12}) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Приведем дискриминант δ полученной квадратичной (по λ) функции к более удобному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{4f^2} &= [m_0 (b_{01} + b_{02}) + m_1 (b_{01} + b_{02}) + m_2 (b_{12} + b_{02})]^2 - \\ &- 4(m_0 + m_1 + m_2) (m_0 b_{01} b_{02} + m_1 b_{01} b_{12} + m_2 b_{02} b_{12}) = m_0^2 b_{10}^2 + 2m_0^2 b_{10} b_{02} + \\ & \quad + m_0^2 b_{02}^2 + m_1^2 b_{01}^2 + 2m_1^2 b_{01} b_{12} + m_1^2 b_{12}^2 + m_2^2 b_{12}^2 + 2m_2^2 b_{12} b_{02} + m_2^2 b_{02}^2 + \\ & \quad + 2m_0 m_1 b_{01}^2 + 2m_0 m_1 b_{01} b_{12} + 2m_0 m_1 b_{01} b_{02} + 2m_0 m_1 b_{02} b_{12} + 2m_0 m_2 b_{01} b_{12} + \\ & \quad + 2m_0 m_2 b_{01} b_{02} + 2m_0 m_2 b_{02} b_{12} + 2m_0 m_2 b_{02}^2 + 2m_1 m_2 b_{01} b_{12} + 2m_1 m_2 b_{01} b_{02} + \\ & \quad + 2m_1 m_2 b_{12}^2 + 2m_1 m_2 b_{02} b_{12} - 4m_0^2 b_{01} b_{02} - 4m_0 m_1 b_{01} b_{12} - 4m_0 m_2 b_{02} b_{12} - \\ & \quad - 4m_0 m_1 b_{01} b_{02} - 4m_1^2 b_{01} b_{12} - 4m_1 m_2 b_{02} b_{12} - 4m_0 m_2 b_{01} b_{02} - 4m_1 m_2 b_{01} b_{12} - \\ & \quad - 4m_2^2 b_{02} b_{12} = m_0^2 (b_{01} - b_{02})^2 + m_1^2 (b_{01} - b_{12})^2 + m_2^2 (b_{12} - b_{02})^2 + \end{aligned}$$

$$+ 2m_0m_1(b_{01} - b_{02})(b_{01} - b_{12}) + 2m_0m_2(b_{02} - b_{01})(b_{02} - b_{12}) + 2m_1m_2(b_{12} - b_{01})(b_{12} - b_{02}). \quad (6)$$

Если обозначить

$$s_0 = b_{01} - b_{02}, \quad s_1 = b_{01} - b_{12},$$

то

$$b_{12} - b_{02} = s_0 - s_1,$$

и тогда выражение (6) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & m_0^2 s_0^2 + m_1^2 s_1^2 + m_2^2 (s_0 - s_1)^2 + 2m_0m_1s_0s_1 + 2m_0m_2(-s_0)(s_1 - s_0) + \\ & + 2m_1m_2(-s_1)(s_0 - s_1) = (m_0^2 + m_2^2 + 2m_0m_2)s_0^2 + (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2)s_1^2 + \\ & + 2(m_0m_1 - m_2^2 - m_0m_2 - m_1m_2)s_0s_1 = (m_0 + m_2)^2 s_0^2 + (m_1 + m_2)^2 s_1^2 + \\ & + 2(m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2)s_0s_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой квадратичную форму относительно переменных s_0, s_1 с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} (m_0 + m_2)^2 & m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 \\ m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 & (m_1 + m_2)^2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Покажем, что матрица M является положительно определенной. Действительно, $\Delta_1 = (m_0 + m_2)^2 > 0$,

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} (m_0 + m_2)^2 & m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 \\ m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2 & (m_1 + m_2)^2 \end{vmatrix} = \\ &= (m_0^2 + 2m_0m_2 + m_2^2)(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2) - \\ &\quad - (m_0m_1 - m_0m_2 - m_1m_2 - m_2^2)^2 = \\ &= m_0^2m_1^2 + 2m_0^2m_1m_2 + m_0^2m_2^2 + 2m_0m_1^2m_2 + 4m_0m_1m_2^2 + 2m_0m_2^3 + \\ &\quad + m_1^2m_2^2 + 2m_1m_2^3 + m_2^4 - (m_0^2m_1^2 + m_0^2m_2^2 + m_1^2m_2^2 + m_2^4) - \\ &= -2(-m_0^2m_1m_2 - m_0m_1^2m_2 - m_0m_1m_2^2 + m_0m_1m_2^2 + m_0m_2^3 + m_1m_2^3) = \\ &= 4m_0m_1m_2(m_0 + m_1 + m_2) > 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались критерием Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Отрицательность корней следует из теоремы Виета:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2f[m_0(b_{01} + b_{02}) + m_1(b_{01} + b_{12}) + m_2(b_{02} + b_{12})] < 0,$$

$$\lambda_1\lambda_2 = 4f^2(m_0 + m_1 + m_2)(m_0b_{01}b_{02} + m_1b_{01}b_{12} + m_2b_{02}b_{12}) > 0.$$

Осталось найти собственные векторы, соответствующие корням λ_1, λ_2 характеристического уравнения (5), но эти вычисления удобнее проводить в численном виде.

Однако, в случае ограниченной задачи трех тел (когда $m_2 = 0$) матрица D имеет треугольный вид и характеристическое уравнение (5) становится существенно проще:

$$\begin{vmatrix} 2f(m_0 + m_1)b_{01} - \lambda & 0 \\ 2fm_1(b_{01} - b_{12}) & 2f(m_0b_{02} + m_1b_{12}) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

т.е.

$$\lambda_1 = 2f(m_0 + m_1)b_{01}, \quad \lambda_2 = 2f(m_0b_{02} + m_1b_{12}). \quad (10)$$

Найдем собственные векторы, соответствующие корням λ_1 и λ_2 :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12}) \\ m_1(b_{01} - b_{12}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем решение системы (4):

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = a_x^1 \begin{pmatrix} m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12}) \\ m_1(b_{01} - b_{12}) \end{pmatrix} \cos \omega_1 t + \\ + a_x^2 \begin{pmatrix} m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12}) \\ m_1(b_{01} - b_{12}) \end{pmatrix} \sin \omega_1 t + b_x^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \omega_2 t + b_x^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \omega_2 t.$$

Аналогичный вид будут иметь функции

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}.$$

Найдем вид решения задачи Коши для каждого из тел в отдельности. Так как

$$x_1(t) = a_x^1 [m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12})] \cos \omega_1 t + \\ + a_x^2 [m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12})] \sin \omega_1 t, \quad (11.1)$$

$$y_1(t) = a_y^1 [m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12})] \cos \omega_1 t + \\ + a_y^2 [m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12})] \sin \omega_1 t, \quad (11.2)$$

$$z_1(t) = a_z^1 [m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12})] \cos \omega_1 t + \\ + a_z^2 [m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12})] \sin \omega_1 t, \quad (11.3)$$

$$x_2(t) = a_x^1 m_1(b_{01} - b_{12}) \cos \omega_1 t + a_x^2 m_1(b_{01} - b_{12}) \sin \omega_1 t + \\ + b_x^1 \cos \omega_2 t + b_x^2 \sin \omega_2 t, \quad (12.1)$$

$$y_2(t) = a_y^1 m_1(b_{01} - b_{12}) \cos \omega_1 t + a_y^2 m_1(b_{01} - b_{12}) \sin \omega_1 t + \\ + b_y^1 \cos \omega_2 t + b_y^2 \sin \omega_2 t, \quad (12.2)$$

$$z_2(t) = a_z^1 m_1(b_{01} - b_{12}) \cos \omega_1 t + a_z^2 m_1(b_{01} - b_{12}) \sin \omega_1 t +$$

$$+b_z^1 \cos \omega_2 t + b_z^2 \sin \omega_2 t, \quad (12.3)$$

то

$$a_x^1 v_0 = x_{10}, a_y^1 v_0 = y_{10}, a_z^1 v_0 = z_{10}.$$

Из последней системы уравнений находим

$$a_x^1 = \frac{x_{10}}{v_0}, a_y^1 = \frac{y_{10}}{v_0}, a_z^1 = \frac{z_{10}}{v_0}. \quad (13)$$

Далее из системы равенств (12.1)–(12.3) при $t = 0$ получаем

$$a_x^1 v_1 + b_x^1 = x_{20}, a_y^1 v_1 + b_y^1 = y_{20}, a_z^1 v_1 + b_z^1 = z_{20}. \quad (14)$$

Из системы (14) находим значения постоянных b_x^1, b_y^1, b_z^1 :

$$b_x^1 = x_{20} - \frac{x_{10} v_1}{v_0} = \frac{1}{v_0} (x_{20} v_0 - x_{10} v_1), \quad (15.1)$$

$$b_y^1 = y_{20} - \frac{y_{10} v_1}{v_0} = \frac{1}{v_0} (y_{20} v_0 - y_{10} v_1), \quad (15.2)$$

$$b_z^1 = z_{20} - \frac{z_{10} v_1}{v_0} = \frac{1}{v_0} (z_{20} v_0 - z_{10} v_1). \quad (15.3)$$

Далее, дифференцируя по t равенства (11.1)–(11.3) и подставляя значение $t = 0$, получаем

$$a_x^2 \omega_1 v_0 = \dot{x}_{10}, a_y^2 \omega_1 v_0 = \dot{y}_{10}, a_z^2 \omega_1 v_0 = \dot{z}_{10},$$

откуда

$$a_x^2 = \frac{\dot{x}_{10}}{\omega_1 v_0}, a_y^2 = \frac{\dot{y}_{10}}{\omega_1 v_0}, a_z^2 = \frac{\dot{z}_{10}}{\omega_1 v_0}. \quad (16)$$

Дифференцируя по t равенства (12.1)–(12.3) и подставляя $t = 0$, получаем

$$a_x^2 v_1 \omega_1 + b_x^2 \omega_2 = \dot{x}_{20}, a_y^2 v_1 \omega_1 + b_y^2 \omega_2 = \dot{y}_{20}, a_z^2 v_1 \omega_1 + b_z^2 \omega_2 = \dot{z}_{20},$$

т.е.

$$b_x^2 = \frac{1}{\omega_2} \left(\dot{x}_{20} - \frac{\dot{x}_{10} v_1}{v_0} \right) = \frac{\dot{x}_{20} v_0 - \dot{x}_{10} v_1}{\omega_2 v_0}, \quad (17.1)$$

$$b_y^2 = \frac{1}{\omega_2} \left(\dot{y}_{20} - \frac{\dot{y}_{10} v_1}{v_0} \right) = \frac{\dot{y}_{20} v_0 - \dot{y}_{10} v_1}{\omega_2 v_0}, \quad (17.2)$$

$$b_z^2 = \frac{1}{\omega_2} \left(\dot{z}_{20} - \frac{\dot{z}_{10} v_1}{v_0} \right) = \frac{\dot{z}_{20} v_0 - \dot{z}_{10} v_1}{\omega_2 v_0}. \quad (17.3)$$

Окончательно равенства (11.1)–(11.3) примут следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_{10}}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t, \\ y_1(t) = y_{10} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{y}_{10}}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t, \\ z_1(t) = z_{10} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{z}_{10}}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t; \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} x_2(t) = \frac{x_{10}v_1}{v_0} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_{10}v_1}{\omega_1 v_0} \sin \omega_1 t + \\ + \frac{x_{20}v_0 - x_{10}v_1}{v_0} \cos \omega_2 t + \frac{\dot{x}_{20}v_0 - \dot{x}_{10}v_1}{\omega_2 v_0} \sin \omega_2 t, \\ y_2(t) = \frac{y_{10}v_1}{v_0} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{y}_{10}v_1}{\omega_1 v_0} \sin \omega_1 t + \\ + \frac{y_{20}v_0 - y_{10}v_1}{v_0} \cos \omega_2 t + \frac{\dot{y}_{20}v_0 - \dot{y}_{10}v_1}{\omega_2 v_0} \sin \omega_2 t, \\ z_2(t) = \frac{z_{10}v_1}{v_0} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{z}_{10}v_1}{\omega_1 v_0} \sin \omega_1 t + \\ + \frac{z_{20}v_0 - z_{10}v_1}{v_0} \cos \omega_2 t + \frac{\dot{z}_{20}v_0 - \dot{z}_{10}v_1}{\omega_2 v_0} \sin \omega_2 t. \end{cases} \quad (19)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи решений (18)–(19).

Если выполняются равенства

$$\begin{aligned} x_{20}v_0 - x_{10}v_1 = 0, \quad \dot{x}_{20}v_0 - \dot{x}_{10}v_1 = 0, \quad y_{20}v_0 - y_{10}v_1 = 0, \\ \dot{y}_{20}v_0 - \dot{y}_{10}v_1 = 0, \quad z_{20}v_0 - z_{10}v_1 = 0, \quad \dot{z}_{20}v_0 - \dot{z}_{10}v_1 = 0, \end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{x_{20}}{x_{10}} = \frac{y_{20}}{y_{10}} = \frac{z_{20}}{z_{10}} = \frac{\dot{x}_{20}}{\dot{x}_{10}} = \frac{\dot{y}_{20}}{\dot{y}_{10}} = \frac{\dot{z}_{20}}{\dot{z}_{10}} = \frac{v_1}{v_0}, \quad (20)$$

то

$$x_2(t) = \frac{v_1}{v_0} x_{10} \cos \omega_1 t + \frac{v_1}{v_0} \cdot \frac{\dot{x}_{10}}{\omega_1} \sin \omega_1 t = \frac{v_1}{v_0} x_1(t). \quad (21)$$

Аналогично

$$y_2(t) = \frac{v_1}{v_0} y_1(t), \quad z_2(t) = \frac{v_1}{v_0} z_1(t). \quad (22)$$

Равенства (21)–(22) означают, что

$$\mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \frac{v_1}{v_0} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \frac{v_1}{v_0} \mathbf{r}_1(t). \quad (23)$$

Векторная функция $\mathbf{r}_2(t)$, связанная равенством (23) с векторной функцией $\mathbf{r}_1(t)$, называется *точкой либрации*. В частности, условие

$$v_1 = v_0$$

является условием нахождения тел M_1 и M_2 на одной орбите. Выясним смысл этого условия

$$v_1 = m_1(b_{01} - b_{12}) = m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12}) = v_0,$$

что после сокращения дает равенство $b_{01} = b_{02}$.

Равенства (18)–(19), записанные в векторной форме, будут выглядеть так

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_{10} \cos \omega_1 t + \frac{1}{\omega_1} \dot{\mathbf{r}}_{10} \sin \omega_1 t, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2(t) = & \frac{v_1}{v_0} \mathbf{r}_{10} \cos \omega_1 t + \frac{v_1}{\omega_1 v_0} \dot{\mathbf{r}}_{10} \sin \omega_1 t + \\ & + \left(\mathbf{r}_{20} - \frac{v_1}{v_0} \mathbf{r}_{10} \right) \cos \omega_2 t + \frac{1}{\omega_2} \left(\dot{\mathbf{r}}_{20} - \frac{v_1}{v_0} \dot{\mathbf{r}}_{10} \right) \sin \omega_2 t. \end{aligned} \quad (25)$$

Получим теперь решение *двухточечной краевой задачи*. По формулам (11.1)–(11.3) имеем

$$x_1(t) = a_x^1 v_0 \cos \omega_1 t + a_x^2 v_0 \sin \omega_1 t,$$

$$y_1(t) = a_y^1 v_0 \cos \omega_1 t + a_y^2 v_0 \sin \omega_1 t,$$

$$z_1(t) = a_z^1 v_0 \cos \omega_1 t + a_z^2 v_0 \sin \omega_1 t,$$

Предположим, что нам известны результаты двух наблюдений: при $t = t_0$ и $t = t_1$, тогда

$$a_x^1 v_0 \cos \omega_1 t_0 + a_x^2 v_0 \sin \omega_1 t_0 = x_{10}, \quad (26.1)$$

$$a_x^1 v_0 \cos \omega_1 t_1 + a_x^2 v_0 \sin \omega_1 t_1 = x_{11}. \quad (26.2)$$

Найдем определитель

$$\begin{aligned} \Delta = v_0^2 \begin{vmatrix} \cos \omega_1 t_0 & \sin \omega_1 t_0 \\ \cos \omega_1 t_1 & \sin \omega_1 t_1 \end{vmatrix} &= v_0^2 (\cos \omega_1 t_0 \sin \omega_1 t_1 - \cos \omega_1 t_1 \sin \omega_1 t_0) = \\ &= v_0^2 \sin \omega_1 (t_1 - t_0). \end{aligned}$$

Далее

$$\Delta_1 = v_0 \begin{vmatrix} x_{10} & \sin \omega_1 t_0 \\ x_{11} & \sin \omega_1 t_1 \end{vmatrix} = v_0 (x_{10} \sin \omega_1 t_1 - x_{11} \sin \omega_1 t_0),$$

$$\Delta_2 = v_0 \begin{vmatrix} \cos \omega_1 t_0 & x_{10} \\ \cos \omega_1 t_1 & x_{11} \end{vmatrix} = v_0 (x_{11} \cos \omega_1 t_0 - x_{10} \cos \omega_1 t_1)$$

и, следовательно,

$$a_x^1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{v_0 (x_{10} \sin \omega_1 t_1 - x_{11} \sin \omega_1 t_0)}{v_0^2 \sin \omega_1 (t_1 - t_0)} = \frac{x_{10} \sin \omega_1 t_1 - x_{11} \sin \omega_1 t_0}{v_0 \sin \omega_1 (t_1 - t_0)},$$

$$a_x^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{v_0 (x_{11} \cos \omega_1 t_0 - x_{10} \cos \omega_1 t_1)}{v_0^2 \sin \omega_1 (t_1 - t_0)} = \frac{x_{11} \cos \omega_1 t_0 - x_{10} \cos \omega_1 t_1}{v_0 \sin \omega_1 (t_1 - t_0)}.$$

Аналогично находятся коэффициенты $a_y^1, a_y^2, a_z^1, a_z^2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \frac{\mathbf{r}_{10} \sin \omega_1 t_1 - \mathbf{r}_{11} \sin \omega_1 t_0}{\sin \omega_1 (t_1 - t_0)} \cos \omega_1 t + \frac{\mathbf{r}_{11} \cos \omega_1 t_0 - \mathbf{r}_{10} \cos \omega_1 t_1}{\sin \omega_1 (t_1 - t_0)} \sin \omega_1 t = \\ &= \frac{\mathbf{r}_{10}}{\sin \omega_1 (t_1 - t_0)} (\sin \omega_1 t_1 \cos \omega_1 t - \cos \omega_1 t_1 \sin \omega_1 t) + \\ &+ \frac{\mathbf{r}_{11}}{\sin \omega_1 (t_1 - t_0)} (\cos \omega_1 t_0 \sin \omega_1 t - \sin \omega_1 t_0 \cos \omega_1 t) = \\ &= \frac{\sin \omega_1 (t_1 - t)}{\sin \omega_1 (t_1 - t_0)} \mathbf{r}_{10} + \frac{\sin \omega_1 (t - t_0)}{\sin \omega_1 (t_1 - t_0)} \mathbf{r}_{11}. \end{aligned} \quad (27)$$

Далее из равенства (12.1) получим

$$b_x^1 \cos \omega_2 t_0 + b_x^2 \sin \omega_2 t_0 = x_{20} - s x_{10}, \quad (28.1)$$

$$b_x^1 \cos \omega_2 t_1 + b_x^2 \sin \omega_2 t_1 = x_{21} - s x_{11}, \quad (28.2)$$

где $s = \frac{v_1}{v_0}$. Из системы (28.1)–(28.2) обычным образом находим

постоянные b_x^1, b_x^2 :

$$b_x^1 = \frac{\sin \omega_2 t_1}{\sin \omega_2 (t_1 - t_0)} (x_{20} - s x_{10}) - \frac{\sin \omega_2 t_0}{\sin \omega_2 (t_1 - t_0)} (x_{21} - s x_{11}); \quad (29.1)$$

$$b_x^2 = \frac{\cos \omega_2 t_0}{\sin \omega_2 (t_1 - t_0)} (x_{21} - s x_{11}) - \frac{\cos \omega_2 t_1}{\sin \omega_2 (t_1 - t_0)} (x_{20} - s x_{10}). \quad (29.2)$$

Применяя формулы (29.1)–(29.2), из равенства (12.1) получаем выражение для $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{s \sin \omega_1 (t_1 - t)}{\sin \omega_1 (t_1 - t_0)} x_{10} + \frac{s \sin \omega_1 (t - t_0)}{\sin \omega_1 (t_1 - t_0)} x_{11} + \\ &+ \frac{\sin \omega_2 t_1 \cos \omega_2 t}{\sin \omega_2 (t_1 - t_0)} \cdot (x_{20} - s x_{10}) - \frac{\sin \omega_2 t_0 \cos \omega_2 t}{\sin \omega_2 (t_1 - t_0)} (x_{21} - s x_{11}) + \\ &= \frac{s \sin \omega_1 (t_1 - t)}{\sin \omega_1 (t_1 - t_0)} \cdot x_{10} + \frac{s \sin \omega_1 (t - t_0)}{\sin \omega_1 (t_1 - t_0)} \cdot x_{11} + \\ &+ \frac{\cos \omega_2 t_0 \sin \omega_2 t}{\sin \omega_2 (t_1 - t_0)} (x_{21} - s x_{11}) - \frac{\cos \omega_2 t_1 \sin \omega_2 t}{\sin \omega_2 (t_1 - t_0)} (x_{20} - s x_{10}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sin \omega_2(t_1 - t)}{\sin \omega_2(t_1 - t_0)} \cdot (x_{20} - sx_{10}) + \frac{\sin \omega_2(t - t_0)}{\sin \omega_2(t_1 - t_0)} \cdot (x_{21} - sx_{11}) = \\
& = \frac{m_1(b_{01} - b_{12})}{m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12})} \left[\frac{\sin \omega_1(t_1 - t)}{\sin \omega_1(t_1 - t_0)} - \frac{\sin \omega_2(t_1 - t)}{\sin \omega_2(t_1 - t_0)} \right] x_{10} + \\
& + \frac{m_1(b_{01} - b_{12})}{m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12})} \left[\frac{\sin \omega_1(t - t_0)}{\sin \omega_1(t_1 - t_0)} - \frac{\sin \omega_2(t - t_0)}{\sin \omega_2(t_1 - t_0)} \right] x_{11} + \\
& + \frac{\sin \omega_2(t_1 - t)}{\sin \omega_2(t_1 - t_0)} \cdot x_{20} + \frac{\sin \omega_2(t - t_0)}{\sin \omega_2(t_1 - t_0)} \cdot x_{21},
\end{aligned}$$

где $x_{10} = x_1(t_0)$, $x_{11} = x_1(t_1)$, $x_{20} = x_2(t_0)$, $x_{21} = x_2(t_1)$.

Далее сделаем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
g_{10}(t) &= \frac{m_1(b_{01} - b_{12})}{m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12})} \left[\frac{\sin \omega_1(t_1 - t)}{\sin \omega_1(t_1 - t_0)} - \frac{\sin \omega_2(t_1 - t)}{\sin \omega_2(t_1 - t_0)} \right], \\
g_{11}(t) &= \frac{m_1(b_{01} - b_{12})}{m_0(b_{01} - b_{02}) + m_1(b_{01} - b_{12})} \left[\frac{\sin \omega_1(t - t_0)}{\sin \omega_1(t_1 - t_0)} - \frac{\sin \omega_2(t - t_0)}{\sin \omega_2(t_1 - t_0)} \right], \\
h_{20}(t) &= \frac{\sin \omega_2(t_1 - t)}{\sin \omega_2(t_1 - t_0)}, \quad h_{21}(t) = \frac{\sin \omega_2(t - t_0)}{\sin \omega_2(t_1 - t_0)}.
\end{aligned}$$

Тогда векторная функция $\mathbf{r}_2(t)$ выразится следующим образом:

$$\mathbf{r}_2(t) = g_{10}(t)\mathbf{r}_{10} + g_{11}(t)\mathbf{r}_{11} + h_{20}(t)\mathbf{r}_{20} + h_{21}(t)\mathbf{r}_{21},$$

где $\mathbf{r}_{10} = \mathbf{r}_1(t_0)$, $\mathbf{r}_{11} = \mathbf{r}_1(t_1)$, $\mathbf{r}_{20} = \mathbf{r}_2(t_0)$, $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2(t_1)$,

$$\omega_1^2 = -2f(m_0 + m_1)b_{01}, \quad \omega_2^2 = -2f(m_0b_{02} + m_1b_{12}), \quad b_{ij} = -\frac{1}{2a_{ij}^3(1 - e_{ij}^2)}.$$

Г Л А В А 8

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛЕНИЙ С ТАБЛИЧНЫМИ

Воспользуемся данными «Астрономического ежегодника СССР на 1977 год». Применим построенную модель, т.е. систему дифференциальных уравнений (3) главы 7 для планет Солнечной системы. Точнее, приведем решение двухточечной краевой задачи в гелиоцентрической экваториальной системе координат. Возьмем ([25], с. 248) в качестве $t_0 = 160.5$; а $t_1 = 280.5$, где время измеряется в юлианских днях. Массы запишем в долях от массы Солнца m_0 и проведем вычисления в системе CGS:

```
t0:=160.5*24*60*60; t1:=280.5*24*60*60; f:= 6.672*10^(-8);
m[0]:=1.9880*10^33; m[1]:=m[0]/7000000.0;
m[2]:=m[0]/406500.5; m[3]:=m[0]/33000.5;
m[4]:=m[0]/3093500.0; m[5]:=m[0]/(1047.355);
m[6]:=m[0]/3500.5; m[7]:=m[0]/22869.0; m[8]:=m[0]/19314.0;
m[9]:=m[0]/3000000.0; a[1]:=149.59787*10^6*10^3*10^2;
x1(t0):=evalf[5](0.3651*a[1]*(cos(6.36*Pi/180))*cos(162.57*Pi/180));
x2(t0):=evalf[5](0.27545*a[1]); x3(t0):=evalf[5](-0.43728*a[1]);
x4(t0):=evalf[5](-0.04333*a[1]); x5(t0):=evalf[5](2.43203*a[1]);
x6(t0):=evalf[5](-6.16480*a[1]); x7(t0):=evalf[5](-14.6045*a[1]);
x8(t0):=evalf[5](-8.5673*a[1]); x9(t0):=evalf[5](-28.5633*a[1]);
x1(t1):=evalf[5](0.4651*a[1]*(cos(4.33*Pi/180))*cos(265.75*Pi/180));
x2(t1):=evalf[5](-0.65694*a[1]); x3(t1):=evalf[5](-0.57138*a[1]);
x4(t1):=evalf[5](1.34012*a[1]); x5(t1):=evalf[5](1.59266*a[1]);
x6(t1):=evalf[5](-6.67796*a[1]); x7(t1):=evalf[5](-14.3131*a[1]);
x8(t1):=evalf[5](-8.2086*a[1]); x9(t1):=evalf[5](-28.4314*a[1]);
```

$$t_0 = 1.3867 \cdot 10^7, t_1 = 2.4235 \cdot 10^7; f = 6.6720 \cdot 10^{-8};$$

$$m_0 = 1.9880 \cdot 10^{33}, m_1 = 2.8400 \cdot 10^{26}, m_2 = 4.8905 \cdot 10^{27},$$

$$m_3 = 6.0242 \cdot 10^{28}, m_4 = 6.4264 \cdot 10^{26}, m_5 = 1.8981 \cdot 10^{30},$$

$$m_6 = 5.6792 \cdot 10^{29}, m_7 = 8.6930 \cdot 10^{28}, m_8 = 1.0293 \cdot 10^{29},$$

$$m_9 = 6.6266 \cdot 10^{26}, a_1 = 1.4959787 \cdot 10^{13};$$

$$x_1(t_0) = -5.1791 \cdot 10^{12}, x_2(t_0) = 4.1207 \cdot 10^{12},$$

$$x_3(t_0) = -6.5417 \cdot 10^{12}, x_4(t_0) = -6.4822 \cdot 10^{11},$$

$$x_5(t_0) = 3.6383 \cdot 10^{13}, x_6(t_0) = -9.2225 \cdot 10^{13},$$

$$x_7(t_0) = -2.1848 \cdot 10^{14}, x_8(t_0) = -1.2817 \cdot 10^{14},$$

$$x_9(t_0) = -4.2730 \cdot 10^{14}; x_1(t_1) = -5.1356 \cdot 10^{11},$$

$$\begin{aligned}
x_2(t_1) &= -9.8278 \cdot 10^{12}, & x_3(t_1) &= -8.5478 \cdot 10^{12}, \\
x_4(t_1) &= 2.0048 \cdot 10^{13}, & x_5(t_1) &= 2.3827 \cdot 10^{13}, \\
x_6(t_1) &= -9.9903 \cdot 10^{13}, & x_7(t_1) &= -2.1412 \cdot 10^{14}, \\
x_8(t_1) &= -1.2280 \cdot 10^{14}, & x_9(t_1) &= -4.2533 \cdot 10^{14}.
\end{aligned}$$

Далее внесем числовые значения больших полуосей и эксцентриситетов планет:

$$\begin{aligned}
a[1,0] &:= a[1] * 0.387099; & a_{1,0} &= 5.7909 \cdot 10^{12}; \\
a[2,0] &:= a[1] * 0.723332; & a_{2,0} &= 1.0821 \cdot 10^{13}; \\
a[3,0] &:= a[1] * 1.0; & a_{3,0} &= 1.4960 \cdot 10^{13}; \\
a[4,0] &:= a[1] * 1.523692; & a_{4,0} &= 2.2794 \cdot 10^{13}; \\
a[5,0] &:= a[1] * 5.204267; & a_{5,0} &= 7.7855 \cdot 10^{13}; \\
a[6,0] &:= a[1] * 9.582018; & a_{6,0} &= 1.4334 \cdot 10^{14}; \\
a[7,0] &:= a[1] * 19.229412; & a_{7,0} &= 2.8767 \cdot 10^{14}; \\
a[8,0] &:= a[1] * 30.103658; & a_{8,0} &= 4.5034 \cdot 10^{14}; \\
a[9,0] &:= a[1] * 39.264230; & a_{9,0} &= 5.8738 \cdot 10^{14}; \\
e[1,0] &:= 0.205634; & e[2,0] &:= 0.006773; & e[3,0] &:= 0.016709; \\
e[4,0] &:= 0.093405; & e[5,0] &:= 0.048775; & e[6,0] &:= 0.055723; \\
e[7,0] &:= 0.044406; & e[8,0] &:= 0.011214; & e[9,0] &:= 0.244672;
\end{aligned}$$

Внесем минимальные и максимальные расстояния от планет до Солнца:

$$\begin{aligned}
rmax[1,0] &:= a[1,0] * (1 + e[1,0]); & rmax[2,0] &:= a[2,0] * (1 + e[2,0]); \\
rmax[3,0] &:= a[3,0] * (1 + e[3,0]); & rmax[4,0] &:= a[4,0] * (1 + e[4,0]); \\
rmax[5,0] &:= a[5,0] * (1 + e[5,0]); & rmax[6,0] &:= a[6,0] * (1 + e[6,0]); \\
rmax[7,0] &:= a[7,0] * (1 + e[7,0]); & rmax[8,0] &:= a[8,0] * (1 + e[8,0]); \\
rmax[9,0] &:= a[9,0] * (1 + e[9,0]); & rmin[1,0] &:= a[1,0] * (1 - e[1,0]); \\
rmin[2,0] &:= a[2,0] * (1 - e[2,0]); & rmin[3,0] &:= a[3,0] * (1 - e[3,0]); \\
rmin[4,0] &:= a[4,0] * (1 - e[4,0]); & rmin[5,0] &:= a[5,0] * (1 - e[5,0]); \\
rmin[6,0] &:= a[6,0] * (1 - e[6,0]); & rmin[7,0] &:= a[7,0] * (1 - e[7,0]); \\
rmin[8,0] &:= a[8,0] * (1 - e[8,0]); & rmin[9,0] &:= a[9,0] * (1 - e[9,0]);
\end{aligned}$$

Планета	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
rmax	$6.9817 \cdot 10^{12}$	$1.0894 \cdot 10^{13}$	$1.5210 \cdot 10^{13}$	$2.4923 \cdot 10^{13}$	$8.1652 \cdot 10^{13}$
Планета	6,0	7,0	8,0	9,0	
rmax	$1.5133 \cdot 10^{14}$	$3.0044 \cdot 10^{14}$	$4.5539 \cdot 10^{14}$	$7.3110 \cdot 10^{14}$	

Планета	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
rmin	$4.6001 \cdot 10^{12}$	$1.0748 \cdot 10^{13}$	$1.4710 \cdot 10^{13}$	$2.0665 \cdot 10^{13}$	$7.4057 \cdot 10^{13}$
Планета	6,0	7,0	8,0	9,0	
rmin	$1.3536 \cdot 10^{14}$	$2.7489 \cdot 10^{14}$	$4.4529 \cdot 10^{14}$	$4.4367 \cdot 10^{14}$	

Далее вычислим максимальные и минимальные расстояния между планетами (в качестве примера приведем только несколько максимальных расстояний):

$r_{\max}[2,1]:=a[2,0]*(1+e[2,0])+a[1,0]*(1-e[1,0])=1.5494 \cdot 10^{13}$;
 $r_{\max}[3,1]:=a[3,0]*(1+e[3,0])+a[1,0]*(1-e[1,0])=1.9810 \cdot 10^{13}$;
 $r_{\max}[4,1]:=a[4,0]*(1+e[4,0])+a[1,0]*(1-e[1,0])=2.9523 \cdot 10^{13}$;
 $r_{\max}[5,1]:=a[5,0]*(1+e[5,0])+a[1,0]*(1-e[1,0])=8.6252 \cdot 10^{13}$;
 $r_{\max}[6,1]:=a[6,0]*(1+e[6,0])+a[1,0]*(1-e[1,0])=1.5593 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[7,1]:=a[7,0]*(1+e[7,0])+a[1,0]*(1-e[1,0])=3.0504 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[8,1]:=a[8,0]*(1+e[8,0])+a[1,0]*(1-e[1,0])=4.5999 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[9,1]:=a[9,0]*(1+e[9,0])+a[1,0]*(1-e[1,0])=7.3570 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[3,2]:=a[3,0]*(1+e[3,0])+a[2,0]*(1-e[2,0])=2.5957 \cdot 10^{13}$;
 $r_{\max}[4,2]:=a[4,0]*(1+e[4,0])+a[2,0]*(1-e[2,0])=3.5671 \cdot 10^{13}$;
 $r_{\max}[5,2]:=a[5,0]*(1+e[5,0])+a[2,0]*(1-e[2,0])=9.2400 \cdot 10^{13}$;
 $r_{\max}[6,2]:=a[6,0]*(1+e[6,0])+a[2,0]*(1-e[2,0])=1.6208 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[7,2]:=a[7,0]*(1+e[4,0])+a[2,0]*(1-e[2,0])=3.2529 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[8,2]:=a[8,0]*(1+e[8,0])+a[2,0]*(1-e[2,0])=4.6614 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[9,2]:=a[9,0]*(1+e[4,0])+a[2,0]*(1-e[2,0])=6.5300 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[4,3]:=a[4,0]*(1+e[4,0])+a[3,0]*(1-e[3,0])=3.9633 \cdot 10^{13}$;
 $r_{\max}[5,3]:=a[5,0]*(1+e[5,0])+a[3,0]*(1-e[3,0])=9.6362 \cdot 10^{13}$;
 $r_{\max}[6,3]:=a[6,0]*(1+e[6,0])+a[3,0]*(1-e[3,0])=1.6604 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[7,3]:=a[7,0]*(1+e[7,0])+a[3,0]*(1-e[3,0])=3.1515 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[8,3]:=a[8,0]*(1+e[8,0])+a[3,0]*(1-e[3,0])=4.7010 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[9,3]:=a[9,0]*(1+e[9,0])+a[3,0]*(1-e[3,0])=7.4581 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[5,4]:=a[5,0]*(1+e[5,0])+a[4,0]*(1-e[4,0])=1.0232 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[6,4]:=a[6,0]*(1+e[6,0])+a[4,0]*(1-e[4,0])=1.7200 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[7,4]:=a[7,0]*(1+e[7,0])+a[4,0]*(1-e[4,0])=3.2111 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[8,4]:=a[8,0]*(1+e[8,0])+a[4,0]*(1-e[4,0])=4.7606 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[9,4]:=a[9,0]*(1+e[9,0])+a[4,0]*(1-e[4,0])=7.5177 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[6,5]:=a[6,0]*(1+e[6,0])+a[5,0]*(1-e[5,0])=2.2539 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[7,5]:=a[7,0]*(1+e[7,0])+a[5,0]*(1-e[5,0])=3.7450 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[8,5]:=a[8,0]*(1+e[7,0])+a[5,0]*(1-e[5,0])=5.4440 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[9,5]:=a[9,0]*(1+e[7,0])+a[5,0]*(1-e[5,0])=6.8753 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[7,6]:=a[7,0]*(1+e[7,0])+a[6,0]*(1-e[6,0])=4.3580 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[8,6]:=a[8,0]*(1+e[8,0])+a[6,0]*(1-e[6,0])=5.9075 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[9,6]:=a[9,0]*(1+e[9,0])+a[6,0]*(1-e[6,0])=8.6646 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[8,7]:=a[8,0]*(1+e[8,0])+a[7,0]*(1-e[7,0])=7.3029 \cdot 10^{14}$;
 $r_{\max}[9,7]:=a[9,0]*(1+e[9,0])+a[7,0]*(1-e[7,0])=1.0060 \cdot 10^{15}$;
 $r_{\max}[9,8]:=a[9,0]*(1+e[9,0])+a[8,0]*(1-e[8,0])=1.1764 \cdot 10^{15}$;

> for j from 1 to 9 do rmin[j,0]:=a[j,0]*(1-e[j,0]^2)^(1/2) end do;
for j from 2 to 9 do rmin[j,1]:=a[j,0]*(1-e[j,0]^2)^(1/2)-
a[1,0]*(1-e[1,0]^2)^(1/2) end do;

```

    for j from 3 to 9 do rmin[j,2]:=a[j,0]*(1-e[j,0]^2)^(1/2)-
a[2,0]*(1-e[2,0]^2)^(1/2) end do;
    for j from 4 to 9 do rmin[j,3]:=a[j,0]*(1-e[j,0]^2)^(1/2)-
a[3,0]*(1-e[3,0]^2)^(1/2) end do;
    for j from 5 to 9 do rmin[j,4]:=a[j,0]*(1-e[j,0]^2)^(1/2)-
a[4,0]*(1-e[4,0]^2)^(1/2) end do;
    for j from 6 to 9 do rmin[j,5]:=a[j,0]*(1-e[j,0]^2)^(1/2)-
a[5,0]*(1-e[5,0]^2)^(1/2) end do;
    for j from 7 to 9 do rmin[j,6]:=a[j,0]*(1-e[j,0]^2)^(1/2)-
a[6,0]*(1-e[6,0]^2)^(1/2) end do;
    for j from 8 to 9 do rmin[j,7]:=a[j,0]*(1-e[j,0]^2)^(1/2)-
a[7,0]*(1-e[7,0]^2)^(1/2) end do;
    for j from 9 to 9 do rmin[j,8]:=a[j,0]*(1-e[j,0]^2)^(1/2)-
a[8,0]*(1-e[8,0]^2)^(1/2) end do;

```

Планета	2,1	3,1	4,1	5,1
rmin	$5.1535 \cdot 10^{12}$	$9.2905 \cdot 10^{13}$	$1.7027 \cdot 10^{13}$	$7.2095 \cdot 10^{13}$
Планета	6,1	7,1	8,1	9,1
rmin	$1.3746 \cdot 10^{14}$	$2.8172 \cdot 10^{14}$	$4.4465 \cdot 10^{14}$	$5.6386 \cdot 10^{14}$
Планета	3,2	4,2	5,2	6,2
rmin	$4.1371 \cdot 10^{12}$	$1.1874 \cdot 10^{13}$	$6.6941 \cdot 10^{13}$	$1.3230 \cdot 10^{14}$
Планета	7,2	8,2	9,2	4,3
rmin	$2.7656 \cdot 10^{14}$	$4.3950 \cdot 10^{14}$	$5.5871 \cdot 10^{14}$	$7.7368 \cdot 10^{12}$
Планета	5,3	6,3	7,3	8,3
rmin	$6.2804 \cdot 10^{13}$	$1.2816 \cdot 10^{14}$	$2.7243 \cdot 10^{14}$	$4.3536 \cdot 10^{14}$
Планета	9,3	5,4	6,4	7,4
rmin	$5.5457 \cdot 10^{14}$	$5.5068 \cdot 10^{13}$	$1.2043 \cdot 10^{14}$	$2.6469 \cdot 10^{14}$
Планета	8,4	9,4	6,5	7,5
rmin	$4.2762 \cdot 10^{14}$	$5.4684 \cdot 10^{14}$	$5.5360 \cdot 10^{13}$	$2.0962 \cdot 10^{14}$
Планета	8,5	9,5	7,6	8,6
rmin	$3.7255 \cdot 10^{14}$	$4.9177 \cdot 10^{14}$	$1.4426 \cdot 10^{14}$	$3.0719 \cdot 10^{14}$
Планета	9,6	8,7	9,7	9,8
rmin	$4.2641 \cdot 10^{14}$	$1.6293 \cdot 10^{14}$	$2.8215 \cdot 10^{14}$	$1.1922 \cdot 10^{14}$

В качестве следующего шага найдем относительные эксцентриситеты $e[i, j](i, j = 1, 2, \dots, 9; i \neq j)$:

```

> for j from 2 to 9 do e[j,1]:=(rmax[j,1]-
rmin[j,1])/(rmax[j,1]+rmin[j,1])end do;
    for j from 3 to 9 do e[j,2]:=(rmax[j,2]-
rmin[j,2])/(rmax[j,2]+rmin[j,2])end do;
    for j from 4 to 9 do e[j,3]:=(rmax[j,3]-
rmin[j,3])/(rmax[j,3]+rmin[j,3])end do;

```

```

    for j from 5 to 9 do e[j,4]:=(rmax[j,4]-
rmin[j,4])/(rmax[j,4]+rmin[j,4])end do;
    for j from 6 to 9 do e[j,5]:=(rmax[j,5]-
rmin[j,5])/(rmax[j,5]+rmin[j,5])end do;
    for j from 7 to 9 do e[j,6]:=(rmax[j,6]-
rmin[j,6])/(rmax[j,6]+rmin[j,6])end do;
    for j from 8 to 9 do e[j,7]:=(rmax[j,7]-
rmin[j,7])/(rmax[j,7]+rmin[j,7])end do;
    for j from 9 to 9 do e[j,8]:=(rmax[j,8]-
rmin[j,8])/(rmax[j,8]+rmin[j,8])end do;
for j from 2 to 9 do a[j,1]:=(1/2)*(rmax[j,1]+rmin[j,1]) end do;
for j from 3 to 9 do a[j,2]:=(1/2)*(rmax[j,2]+rmin[j,2]) end do;
for j from 4 to 9 do a[j,3]:=(1/2)*(rmax[j,3]+rmin[j,3]) end do;
for j from 5 to 9 do a[j,4]:=(1/2)*(rmax[j,4]+rmin[j,4]) end do;
for j from 6 to 9 do a[j,5]:=(1/2)*(rmax[j,5]+rmin[j,5]) end do;
for j from 7 to 9 do a[j,6]:=(1/2)*(rmax[j,6]+rmin[j,6]) end do;
for j from 8 to 9 do a[j,7]:=(1/2)*(rmax[j,7]+rmin[j,7]) end do;
for j from 9 to 9 do a[j,8]:=(1/2)*(rmax[j,8]+rmin[j,8]) end do;

```

Планета	2,1	3,1	4,1	5,1
e _{i,j}	0.5008	0.3615	0.2684	0.0894
Планета	6,1	7,1	8,1	9,1
e _{i,j}	0.0630	0.0398	0.0170	0.1322
Планета	3,2	4,2	5,2	6,2
e _{i,j}	0.7251	0.5005	0.1598	0.1012
Планета	7,2	8,2	9,2	4,3
e _{i,j}	0.0810	0.0294	0.0778	0.6733
Планета	5,3	6,3	7,3	8,3
e _{i,j}	0.2108	0.1287	0.0727	0.0384
Планета	9,3	5,4	6,4	7,4
e _{i,j}	0.0147	0.3002	0.1764	0.0963
Планета	8,4	9,4	6,5	7,5
e _{i,j}	0.0536	0.1578	0.5504	0.2823
Планета	8,5	9,5	7,6	8,6
e _{i,j}	0.1874	0.1660	0.5026	0.3158
Планета	9,6	8,7	9,7	9,8
e _{i,j}	0.3404	0.6352	0.5619	0.8160

Планета	2,1	3,1	4,1	5,1
$a_{i,j}$	$1.0324 \cdot 10^{13}$	$1.4550 \cdot 10^{13}$	$2.3275 \cdot 10^{13}$	$7.9174 \cdot 10^{13}$
Планета	6,1	7,1	8,1	9,1
$a_{i,j}$	$1.4669 \cdot 10^{14}$	$2.9338 \cdot 10^{14}$	$4.5232 \cdot 10^{14}$	$6.4978 \cdot 10^{14}$
Планета	3,2	4,2	5,2	6,2
$a_{i,j}$	$1.5047 \cdot 10^{13}$	$2.3772 \cdot 10^{13}$	$7.9671 \cdot 10^{13}$	$1.4719 \cdot 10^{14}$
Планета	7,2	8,2	9,2	4,3
$a_{i,j}$	$3.0092 \cdot 10^{14}$	$4.5282 \cdot 10^{14}$	$6.0585 \cdot 10^{14}$	$2.3685 \cdot 10^{13}$
Планета	5,3	6,3	7,3	8,3
$a_{i,j}$	$7.9583 \cdot 10^{13}$	$1.4710 \cdot 10^{14}$	$2.9379 \cdot 10^{14}$	$4.5273 \cdot 10^{14}$
Планета	9,3	5,4	6,4	7,4
$a_{i,j}$	$6.5019 \cdot 10^{14}$	$7.8692 \cdot 10^{13}$	$1.4621 \cdot 10^{14}$	$2.9290 \cdot 10^{14}$
Планета	8,4	9,4	6,5	7,5
$a_{i,j}$	$4.5184 \cdot 10^{14}$	$6.4930 \cdot 10^{14}$	$1.4538 \cdot 10^{14}$	$2.9206 \cdot 10^{14}$
Планета	8,5	9,5	7,6	8,6
$a_{i,j}$	$4.5848 \cdot 10^{14}$	$5.8965 \cdot 10^{14}$	$2.9003 \cdot 10^{14}$	$4.4897 \cdot 10^{14}$
Планета	9,6	8,7	9,7	9,8
$a_{i,j}$	$6.4643 \cdot 10^{14}$	$4.4661 \cdot 10^{14}$	$6.4407 \cdot 10^{14}$	$6.4781 \cdot 10^{14}$

Далее сформируем коэффициенты b_{jk} системы дифференциальных уравнений:

```

> for j from 2 to 9 do b[j,1]:=-(1/2)*(1/(a[j,1]^3*(1-e[j,1]^2))) end do;
for j from 3 to 9 do b[j,2]:=-(1/2)*(1/(a[j,2]^3*(1-e[j,2]^2))) end do;
for j from 4 to 9 do b[j,3]:=-(1/2)*(1/(a[j,3]^3*(1-e[j,3]^2))) end do;
for j from 5 to 9 do b[j,4]:=-(1/2)*(1/(a[j,4]^3*(1-e[j,4]^2))) end do;
for j from 6 to 9 do b[j,5]:=-(1/2)*(1/(a[j,5]^3*(1-e[j,5]^2))) end do;
for j from 7 to 9 do b[j,6]:=-(1/2)*(1/(a[j,6]^3*(1-e[j,6]^2))) end do;
for j from 8 to 9 do b[j,7]:=-(1/2)*(1/(a[j,7]^3*(1-e[j,7]^2))) end do;
for j from 9 to 9 do b[j,8]:=-(1/2)*(1/(a[j,8]^3*(1-e[j,8]^2))) end do;
> for j from 1 to 9 do b[j,0]:=-(1/2)*(1/(a[j,0]^3*(1-e[j,0]^2))) end do;

```

После чего можно построить основную систему дифференциальных уравнений. Найдем правые части системы дифференциальных уравнений по примеру gx1:

```

> gx1:=
2*f*((m[0]+m[1])*b[1,0]+m[2]*b[2,1]+m[3]*b[3,1]+m[4]*b[4,1]+m[5]*b[5,1]+m[6]*b[6,1]+m[7]*b[7,1]+m[8]*b[8,1]+m[9]*b[9,1])*x1(t)
+2*f*(m[2]*(b[2,0]-b[2,1])*x2(t)+m[3]*(b[3,0]-b[3,1])*x3(t)+m[4]*(b[4,0]-b[4,1])*x4(t)+m[5]*(b[5,0]-b[5,1])*x5(t)+m[6]*(b[6,0]-b[6,1])*x6(t)+m[7]*(b[7,0]-b[7,1])*x7(t)+m[8]*(b[8,0]-b[8,1])*x8(t)+m[9]*(b[9,0]-b[9,1])*x9(t));

```


И так далее.

Таким образом,

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -7.1317 \cdot 10^{-13} x_1 + 1.3828 \cdot 10^{-19} x_2 + 3.0006 \cdot 10^{-19} x_3 + \\ &+ 1.2268 \cdot 10^{-23} x_4 - 1.1772 \cdot 10^{-20} x_5 - 8.5337 \cdot 10^{-22} x_6 - \\ &- 1.4073 \cdot 10^{-23} x_7 - 9.6992 \cdot 10^{-25} x_8 - 6.8032 x_9; \\ \ddot{x}_2 &= -7.8896 \cdot 10^{-20} x_1 - 1.0469 \cdot 10^{-13} x_2 + 1.2865 \cdot 10^{-18} x_3 + \\ &+ 6.0617 \cdot 10^{-22} x_4 - 1.2014 \cdot 10^{-20} x_5 - 8.9951 \cdot 10^{-22} x_6 - \\ &- 2.9879 \cdot 10^{-23} x_7 - 1.1713 \cdot 10^{-24} x_8 - 3.2031 \cdot 10^{-26} x_9; \\ \ddot{x}_3 &= -9.4806 \cdot 10^{-20} x_1 - 5.5607 \cdot 10^{-20} x_2 - 3.9631 \cdot 10^{-14} x_3 + \\ &+ 2.2516 \cdot 10^{-21} x_4 - 6.0602 \cdot 10^{-21} x_5 - 8.0053 \cdot 10^{-22} x_6 - \\ &- 1.4180 \cdot 10^{-23} x_7 - 1.0834 \cdot 10^{-24} x_8 - 6.7649 \cdot 10^{-26} x_9; \\ \ddot{x}_4 &= -1.0026 \cdot 10^{-19} x_1 - 2.2513 \cdot 10^{-19} x_2 - 6.4744 \cdot 10^{-19} x_3 - \\ &- 1.1299 \cdot 10^{-14} x_4 + 1.6625 \cdot 10^{-20} x_5 - 3.9317 \cdot 10^{-22} x_6 - \\ &- 1.1141 \cdot 10^{-23} x_7 - 5.3911 \cdot 10^{-25} x_8 - 6.6417 \cdot 10^{-26} x_9; \\ \ddot{x}_5 &= -1.0184 \cdot 10^{-19} x_1 - 2.5688 \cdot 10^{-19} x_2 - 1.1925 \cdot 10^{-18} x_3 - \\ &- 3.5555 \cdot 10^{-21} x_4 - 2.8204 \cdot 10^{-16} x_5 + 4.7885 \cdot 10^{-21} x_6 + \\ &+ 8.8442 \cdot 10^{-24} x_7 - 1.3462 \cdot 10^{-24} x_8 - 1.0283 \cdot 10^{-26} x_9; \\ \ddot{x}_6 &= -1.0188 \cdot 10^{-19} x_1 - 2.5744 \cdot 10^{-19} x_2 - 1.1996 \cdot 10^{-18} x_3 - \\ &- 3.6381 \cdot 10^{-21} x_4 - 2.0987 \cdot 10^{-19} x_5 - 4.5247 \cdot 10^{-17} x_6 + \\ &+ 7.3962 \cdot 10^{-23} x_7 + 9.0869 \cdot 10^{-24} x_8 - 4.6936 \cdot 10^{-26} x_9; \\ \ddot{x}_7 &= -1.0188 \cdot 10^{-19} x_1 - 2.5753 \cdot 10^{-19} x_2 - 1.2007 \cdot 10^{-18} x_3 - \\ &- 3.6505 \cdot 10^{-21} x_4 - 2.6348 \cdot 10^{-19} x_5 - 1.0827 \cdot 10^{-20} x_6 - \\ &- 5.5910 \cdot 10^{-18} x_7 + 5.4032 \cdot 10^{-23} x_8 + 9.7936 \cdot 10^{-27} x_9; \\ \ddot{x}_8 &= -1.0188 \cdot 10^{-19} x_1 - 2.5753 \cdot 10^{-19} x_2 - 1.2008 \cdot 10^{-18} x_3 - \\ &- 3.6518 \cdot 10^{-21} x_4 - 2.6764 \cdot 10^{-19} x_5 - 1.2440 \cdot 10^{-20} x_6 - \\ &- 1.3498 \cdot 10^{-22} x_7 - 1.4545 \cdot 10^{-18} x_8 + 2.5460 \cdot 10^{-25} x_9; \\ \ddot{x}_9 &= -1.0188 \cdot 10^{-19} x_1 - 2.5764 \cdot 10^{-19} x_2 - 1.2009 \cdot 10^{-18} x_3 - \\ &- 3.6521 \cdot 10^{-21} x_4 - 2.6837 \cdot 10^{-19} x_5 - 1.2746 \cdot 10^{-20} x_6 - \\ &- 2.1240 \cdot 10^{-22} x_7 + 3.9042 \cdot 10^{-25} x_8 - 6.9709 \cdot 10^{-19} x_9.\end{aligned}$$

Сформируем матрицу коэффициентов:

$$\begin{aligned}m[1,1] &:= 2 * f * ((m[0] + m[1]) * b[1,0] + m[2] * b[2,1] + m[3] * b[3,1] + \\ &+ m[4] * b[4,1] + m[5] * b[5,1] + m[6] * b[6,1] + m[7] * b[7,1] + m[8] * b[8,1] + \\ &+ m[9] * b[9,1]); \\ m[1,2] &:= 2 * f * (m[2] * (b[2,0] - b[2,1])); \\ m[1,3] &:= 2 * f * (m[3] * (b[3,0] - b[3,1]));\end{aligned}$$

```

m[1,4]:=2*f*(m[4]*(b[4,0]-b[4,1]));
m[1,5]:=2*f*(m[5]*(b[5,0]-b[5,1]));
  for j from 6 to 9 do m[1,j]:= 2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[j,1])) end do;
m[2,1]:=2*f*(m[1]*(b[1,0]-b[2,1]));
m[2,2]:=2*f*((m[0]+m[2])*b[2,0]+m[1]*b[2,1]+m[3]*b[3,2]+m[4]
*b[4,2]+m[5]*b[5,2]+m[6]*b[6,2]+m[7]*b[7,2]+m[8]*b[8,2]+m[9]*b[9,2]);
  for j from 3 to 9 do m[2,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[j,2])) end do;
  for j from 1 to 2 do m[3,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[3,j])) end do;
for j from 4 to 9 do m[3,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[j,3])) end do;
m[3,3]:=2*f*((m[0]+m[3])*b[3,0]+m[1]*b[3,1]+m[2]*b[3,2]+m[4]*b
[4,3]+m[5]*b[5,3]+m[6]*b[6,3]+m[7]*b[7,3]+m[8]*b[8,3]+m[9]*b[9,3]);
  for j from 1 to 3 do m[4,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[4,j])) end do;
  for j from 5 to 9 do m[4,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[j,4])) end do;
m[4,4]:=2*f*((m[0]+m[4])*b[4,0]+m[1]*b[4,1]+m[2]*b[4,2]+m[3]*b
[4,3]+m[5]*b[5,4]+m[6]*b[6,4]+m[7]*b[7,4]+m[8]*b[8,4]+m[9]*b[9,4]);
  for j from 1 to 4 do m[5,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[5,j])) end do;
for j from 6 to 9 do m[5,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[j,5])) end do;
m[5,5]:=2*f*((m[0]+m[5])*b[5,0]+m[1]*b[5,1]+m[2]*b[5,2]+m[3]*b
[5,3]+m[4]*b[5,4]+m[6]*b[6,5]+m[7]*b[7,5]+m[8]*b[8,5]+m[9]*b[9,5]);
  for j from 1 to 5 do m[6,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[6,j])) end do;
  for j from 7 to 9 do m[6,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[j,6])) end do;
m[6,6]:=2*f*((m[0]+m[6])*b[6,0]+m[1]*b[6,1]+m[2]*b[6,2]+m[3]*b
[6,3]+m[4]*b[6,4]+m[5]*b[6,5]+m[7]*b[7,6]+m[8]*b[8,6]+m[9]*b[9,6]);
  for j from 1 to 6 do m[7,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[7,j])) end do;
  for j from 8 to 9 do m[7,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[j,7])) end do;
m[7,7]:=2*f*((m[0]+m[7])*b[7,0]+m[1]*b[7,1]+m[2]*b[7,2]+m[3]*b
[7,3]+m[4]*b[7,4]+m[5]*b[7,5]+m[6]*b[7,6]+m[8]*b[8,7]+m[9]*b[9,7]);
  for j from 1 to 7 do m[8,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[8,j])) end do;
  for j from 9 to 9 do m[8,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[j,8])) end do;
m[8,8]:=2*f*((m[0]+m[8])*b[8,0]+m[1]*b[8,1]+m[2]*b[8,2]+m[3]*b
[8,3]+m[4]*b[8,4]+m[5]*b[8,5]+m[6]*b[8,6]+m[7]*b[8,7]+m[9]*b[9,8]);
  for j from 1 to 8 do m[9,j]:=2*f*(m[j]*(b[j,0]-b[9,j])) end do;
m[9,9]:=2*f*((m[0]+m[9])*b[9,0]+m[1]*b[9,1]+m[2]*b[9,2]+m[3]*b
[9,3]+m[4]*b[9,4]+m[5]*b[9,5]+m[6]*b[9,6]+m[7]*b[9,7]+m[8]*b[9,8]);
  > M:= li-
nalg[matrix](9,9,[[m[1,1],m[1,2],m[1,3],m[1,4],m[1,5],m[1,6],m[1,7],
m[1,8],m[1,9]],
[m[2,1],m[2,2],m[2,3],m[2,4],m[2,5],m[2,6],m[2,7],m[2,8],m[2,9]],
[m[3,1],m[3,2],m[3,3],m[3,4],m[3,5],m[3,6],m[3,7],m[3,8],m[3,9]],
[m[4,1],m[4,2],m[4,3],m[4,4],m[4,5],m[4,6],m[4,7],m[4,8],m[4,9]],
[m[5,1],m[5,2],m[5,3],m[5,4],m[5,5],m[5,6],m[5,7],m[5,8],m[5,9]],
[m[6,1],m[6,2],m[6,3],m[6,4],m[6,5],m[6,6],m[6,7],m[6,8],m[6,9]],
[m[7,1],m[7,2],m[7,3],m[7,4],m[7,5],m[7,6],m[7,7],m[7,8],m[7,9]],

```

[m[8,1],m[8,2],m[8,3],m[8,4],m[8,5],m[8,6],m[8,7],m[8,8],m[8,9]],
 [m[9,1],m[9,2],m[9,3],m[9,4],m[9,5],m[9,6],m[9,7],m[9,8],m[9,9]]];

Далее находим собственные значения и собственные векторы матрицы $M : h_j (j = 1, 2, \dots, 9)$. Для нахождения решения двухточечной краевой задачи необходимо найти коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n; d_1, d_2, \dots, d_n$ из системы линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^9 [h_{jk} c_k \cos(\omega_k t_0) + h_{jk} d_k \sin(\omega_k t_0)] = x_j(t_0);$$

$$\sum_{k=1}^9 [h_{jk} c_k \cos(\omega_k t_1) + h_{jk} d_k \sin(\omega_k t_1)] = x_j(t_1);$$

где $h_{jk} (j = 1, 2, \dots, 9; k = 1, 2, \dots, 9)$ – j -ая координата k -го собственного вектора.

Матрицу коэффициентов последней системы можно представить в виде произведения двух матриц $H \times B$:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{12} & 0 & h_{13} & \dots & h_{1n} & 0 \\ h_{21} & 0 & h_{22} & 0 & h_{23} & \dots & h_{2n} & 0 \\ h_{31} & 0 & h_{32} & 0 & h_{33} & \dots & h_{3n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n1} & 0 & h_{n2} & 0 & h_{n3} & \dots & h_{nn} & 0 \\ 0 & h_{11} & 0 & h_{12} & 0 & \dots & 0 & h_{1n} \\ 0 & h_{21} & 0 & h_{22} & 0 & \dots & 0 & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & h_{n1} & 0 & h_{n2} & 0 & \dots & 0 & h_{nn} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t_0) & \sin(\omega_1 t_0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cos(\omega_1 t_1) & \sin(\omega_1 t_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_2 t_0) & \sin(\omega_2 t_0) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_2 t_1) & \sin(\omega_2 t_1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos(\omega_n t_0) & \sin(\omega_n t_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos(\omega_n t_1) & \sin(\omega_n t_1) \end{bmatrix}.$$

Сформируем требуемые матрицы:

```
H18:=evalf[6](linalg[matrix](18,18,[[h1[1],0,h2[1],0,h3[1],0,h4[1],0,h5[1],0,h6[1],0,h7[1],0,h8[1],0,h9[1],0],
[h1[2],0,h2[2],0,h3[2],0,h4[2],0,h5[2],0,h6[2],0,h7[2],0,h8[2],0,h9[2],0],
[h1[3],0,h2[3],0,h3[3],0,h4[3],0,h5[3],0,h6[3],0,h7[3],0,h8[3],0,h9[3],0],
```

```

[h1[4],0,h2[4],0,h3[4],0,h4[4],0,h5[4],0,h6[4],0,h7[4],0,h8[4],0,h9[4],0,
[h1[5],0,h2[5],0,h3[5],0,h4[5],0,h5[5],0,h6[5],0,h7[5],0,h8[5],0,h9[5],0,
[h1[6],0,h2[6],0,h3[6],0,h4[6],0,h5[6],0,h6[6],0,h7[6],0,h8[6],0,h9[6],0,
[h1[7],0,h2[7],0,h3[7],0,h4[7],0,h5[7],0,h6[7],0,h7[7],0,h8[7],0,h9[7],0,
[h1[8],0,h2[8],0,h3[8],0,h4[8],0,h5[8],0,h6[8],0,h7[8],0,h8[8],0,h9[8],0,
[h1[9],0,h2[9],0,h3[9],0,h4[9],0,h5[9],0,h6[9],0,h7[9],0,h8[9],0,h9[9],0,
[0,h1[1],0,h2[1],0,h3[1],0,h4[1],0,h5[1],0,h6[1],0,h7[1],0,h8[1],0,h9[1]],
[0,h1[2],0,h2[2],0,h3[2],0,h4[2],0,h5[2],0,h6[2],0,h7[2],0,h8[2],0,h9[2]],
[0,h1[3],0,h2[3],0,h3[3],0,h4[3],0,h5[3],0,h6[3],0,h7[3],0,h8[3],0,h9[3]],
[0,h1[4],0,h2[4],0,h3[4],0,h4[4],0,h5[4],0,h6[4],0,h7[4],0,h8[4],0,h9[4]],
[0,h1[5],0,h2[5],0,h3[5],0,h4[5],0,h5[5],0,h6[5],0,h7[5],0,h8[5],0,h9[5]],
[0,h1[6],0,h2[6],0,h3[6],0,h4[6],0,h5[6],0,h6[6],0,h7[6],0,h8[6],0,h9[6]],
[0,h1[7],0,h2[7],0,h3[7],0,h4[7],0,h5[7],0,h6[7],0,h7[7],0,h8[7],0,h9[7]],
[0,h1[8],0,h2[8],0,h3[8],0,h4[8],0,h5[8],0,h6[8],0,h7[8],0,h8[8],0,h9[8]],
[0,h1[9],0,h2[9],0,h3[9],0,h4[9],0,h5[9],0,h6[9],0,h7[9],0,h8[9],0,h9[9]]]);
H18O:=evalf[6](inverse(H18));
for k from 1 to 9 do qq0[k] := evalf[5](cos(omega[k]*t0-
(floor(omega[k]*t0/(2*Pi)))*2*Pi)) end do;
for k from 1 to 9 do qs0[k] := evalf[5](sin(omega[k]*t0-
(floor(omega[k]*t0/(2*Pi)))*2*Pi)) end do;
for k from 1 to 9 do qq1[k] := evalf[5](cos(omega[k]*t1-
(floor(omega[k]*t1/(2*Pi)))*2*Pi)) end do;
for k from 1 to 9 do qs1[k] := evalf[5](sin(omega[k]*t1-
(floor(omega[k]*t1/(2*Pi)))*2*Pi)) end do;
B18:=linalg[matrix](18,18,[[qq0[1],qs0[1],0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
,0], [qq1[1],qs1[1],0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,qq0[2],qs0[2],0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,qq1[2],qs1[2],0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,qq0[3],qs0[3],0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,qq1[3],qs1[3],0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,qq0[4],qs0[4],0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,qq1[4],qs1[4],0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,qq0[5],qs0[5],0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,qq1[5],qs1[5],0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,qq0[6],qs0[6],0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,qq1[6],qs1[6],0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,qq0[7],qs0[7],0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,qq1[7],qs1[7],0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,qq0[8],qs0[8],0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,qq1[8],qs1[8],0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,qq0[9],qs0[9]],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,qq1[9],qs1[9]]]);

```


Вектор неизвестных находится по формуле

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \\ c_2 \\ d_2 \\ \vdots \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = B^{-1}H^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \\ x_1(t_1) \\ \vdots \\ x_n(t_1) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $Q = B^{-1}H^{-1}$. Далее мы можем записать в виде явных функций времени любую координату, например,

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^9 [h_{jk}c_k \cos(\omega_k t) + h_{jk}d_k \sin(\omega_k t)] \quad (j=1, 2, \dots, 9).$$

```
for k from 1 to 9 do qqt[k] :=
evalf[5](cos(omega[k]*t-(floor(omega[k]*t/(2*Pi)))*2*Pi)) end do;
for k from 1 to 9 do qst[k] :=
evalf[5](sin(omega[k]*t-(floor(omega[k]*t/(2*Pi)))*2*Pi)) end do;
x3t:=(evalf[5](h1[3]*X[1]*qqt[1]+h1[3]*X[2]*qst[1]+h2[3]*X[3]*qqt
[2]+h2[3]*X[4]*qst[2]+h3[3]*X[5]*qqt[3]+h3[3]*X[6]*qst[3]+h4[3]
*X[7]*qqt[4]+h4[3]*X[8]*qst[4]+h5[3]*X[9]*qqt[5]+h5[3]*X[10]*q
st[5]+h6[3]*X[11]*qqt[6]+h6[3]*X[12]*qst[6]+h7[3]*X[13]*qqt[7]+
h7[3]*X[14]*qst[7]+h8[3]*X[15]*qqt[8]+h8[3]*X[16]*qst[8]+h9[3]*
X[17]*qqt[9]+h9[3]*X[18]*qst[9]))/(a[1]));
```

$$\begin{aligned}
x_3 t := & -9.79492555710^{-8} \cos(8.4449 10^{-7} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(1.3440 10^{-7} t) \\
& - 1.00950635210^{-8} \sin(8.4449 10^{-7} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(1.3440 10^{-7} t) \\
& + 0.000001469071719 \cos(3.2356 10^{-7} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(5.1496 10^{-8} t) \\
& - 5.77795659810^{-7} \sin(3.2356 10^{-7} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(5.1496 10^{-8} t) + 0.7344355906 \cos(1.9908 10^{-7} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(3.1685 10^{-8} t) + 0.6576965301 \sin(1.9908 10^{-7} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(3.1685 10^{-8} t) \\
& - 1.20643429010^{-7} \cos(1.0630 10^{-7} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(1.6918 10^{-8} t) \\
& + 8.24878054810^{-9} \sin(1.0630 10^{-7} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(1.6918 10^{-8} t) \\
& - 5.26732098610^{-7} \cos(1.6794 10^{-8} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(2.6728 10^{-9} t) \\
& + 6.04975191210^{-7} \sin(1.6794 10^{-8} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(2.6728 10^{-9} t) \\
& + 1.09954774110^{-7} \cos(6.7266 10^{-9} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(1.0706 10^{-9} t) \\
& + 1.64059822510^{-7} \sin(6.7266 10^{-9} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(1.0706 10^{-9} t) \\
& + 2.47149240810^{-10} \cos(2.3645 10^{-9} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(3.7631 10^{-10} t) \\
& - 3.90647273310^{-10} \sin(2.3645 10^{-9} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(3.7631 10^{-10} t) \\
& + 5.36271004410^{-9} \cos(1.2060 10^{-9} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(1.9194 10^{-10} t) \\
& - 8.24543825410^{-9} \sin(1.2060 10^{-9} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(1.9194 10^{-10} t) \\
& + 4.90949503510^{-11} \cos(8.3492 10^{-10} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(1.3288 10^{-10} t) \\
& - 2.54582501810^{-11} \sin(8.3492 10^{-10} t) \\
& - 6.2832 \text{ floor}(1.3288 10^{-10} t)
\end{aligned}$$

Например, для Солнечной системы координата $x_3(t) \equiv x_3 t$ – это координата x для барицентра Земля + Луна. В сравнительной таблице для барицентра Земля + Луна в гелиоцентрической экваториальной системе координат представлены результаты решения краевой задачи и данные таблиц астрономического ежегодника.

Таблица 8.1

Координата x для барицентра Земля + Луна

Юлианские дни	Результаты решения краевой задачи	Данные астрономического ежегодника
180,5	-0,70968	-0,71785
200,5	-0,89890	-0,91080
220,5	-0,98279	-0,99390
240,5	-0,95153	-0,95891
260,5	-0,80877	-0,81184
280,5	-0,57124	-0,57138
300,5	-0,26678	-0,26606
320,5	+0,06894	+0,06917
340,5	+0,39659	+0,39669
360,5	+0,67775	+0,67987
380,5	+0,87955	+0,88661

Приведем вычисленные периоды обращения планет, выраженные в сутках, и сравним их с наблюдаемыми:

Таблица 8.2

Период обращения планет

Периоды обращения, сут	Наблюдаемые	Вычисленные
Меркурий	87.97	86.10
Венера	224.70	224.70
Земля	365.25	365.299
Марс	686.83	686.97
Юпитер	4330.94	4330.23
Сатурн	10754.88	10832.14
Уран	30675.85	30798.56
Нептун	60156.7	60326.56
Плутон	90434.8	89864.14

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии построен алгоритм квадратичной аппроксимации силовой функции общей задачи многих тел. Метод позволяет получить линейную аппроксимацию системы уравнений задачи $(n+1)$ -го тела, причем система из $3(n+1)$ -го дифференциального уравнения второго порядка распадается на три подсистемы из $(n+1)$ -го дифференциального уравнения второго порядка каждая.

С помощью разработанного авторами метода получены явные приближенные решения задачи многих тел и проанализированы качественные свойства решений этой задачи. Доказано хорошее совпадение полученных приближенных решений с истинными решениями, в том числе и для классической задачи описания движения планет Солнечной системы.

Идея замены задачи движения спутника в реальном гравитационном поле какой-то близкой интегрируемой задачей [46, с. 59] впервые, по-видимому, была предложена и осуществлена М.Д. Кисликом в 1958–1959 гг. (СССР) [59]; в США аналогичный подход приблизительно в то же время осуществлен в работах Дж. Винти [60]. Эта идея привела к разложению потенциала в ряды по полиномам Лежандра и получению интегрируемой системы нелинейных дифференциальных уравнений. Однако для получения зависимости координат от времени требуется обращение некоторых функций, что само по себе является задачей не очень простой.

В настоящей монографии на основе алгоритма, предложенного в [42], находятся требуемые многочлены наилучшего в чебышевской метрике приближения, и дифференциальные уравнения задачи многих тел становятся интегрируемыми.

Идея замены правых частей дифференциальных уравнений многочленами наилучшего приближения в чебышевской метрике с последующим разложением решений в ряды реализована в [61–63], в работе [64] сформулирована схема рассуждений, реализованная авторами настоящей монографии. В статье [65] разработан аналогичный подход, но аппроксимация осуществляется в метрике пространства L_2 .

Цель и задачи исследования выполнены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блажко, С.Н. Курс сферической астрономии / С.Н. Блажко. – 2-е изд. – М.: Гостехиздат, 1954.
2. Pekar, L. Tabulky galaktických smerových kosiny / L. Pekar // Astron. Ustav CSAV Publikace – 1964.
3. Torgard, I. Lund Observatory Table for the Conversion of Equatorial into Galactic Coordinates Based on the Galactic Pole R.A. $12^{\text{h}}49^{\text{m}}$, Decl. $+27^{\circ}4$ (1950) / I. Torgard // Ann. Observ. Of Lund, Nos. 15, 16, 17, 1961.
4. Danjon, A. Astronomie Generale / A. Danjon. – Paris: Sennac, 1952.
5. Вентцель, М.К. Сферическая астрономия / М.К. Вентцель. – М., 1952.
6. Загребин, Д.В. Введение в астрометрию / Д.В. Загребин. – М., 1966.
7. Казаков, С.А. Курс сферической астрономии / С.А. Казаков. – М., 1940.
8. Newcomb, S.A. A Compendium on Spherical Astronomy / S.A. Newcomb. – Washington, 1906.
9. Woolard, E.W., Clemence G.M. Spherical Astronomy / E.W. Woolard, G.M. Clemence. – N. Y.: Academic Press, 1966.
10. Ангелов, С.А. Шестизначные таблицы тригонометрических функций с аргументом, выраженным в часовой мере $[0^{\text{h}}(1^{\text{s}})12^{\text{h}}]$ / С.А. Ангелов. – М., 1957.
11. Жонголович, И.Д. Таблицы натуральных значений $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ и $\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)$ с пятью значащими цифрами / И.Д. Жонголович, Т.Б. Сабанина. – Л.: Изд-во АН СССР, 1963.
12. Загребин, Д.В. Семизначные таблицы натуральных значений тригонометрических функций для каждой сотой града / Д.В. Загребин. – М., 1966.
13. Хренов, Л.С. Семизначные таблицы тригонометрических функций $[0^{\circ}(10'')360^{\circ}]$ / Л.С. Хренов. – М., 1956.
14. Хренов, Л.С. Восьмизначные таблицы тригонометрических функций / Л.С. Хренов. – М., 1967.
15. Comrie, L.N. Seven-Figure Trigonometric Tables for Every Second of Time / L.N. Comrie. – London, 1939.
16. Natural Sines and Cosines to Eight Decimal Places // U.S. Coast and Geodetic Survey. Spec. Publication, No. 231, 1942.

17. Peters, J. Siebenstellige Werte der trigonometrischen Funktionen von Tausendstel zu Tausendstel des Neugrades / J. Peters. – Berlin, 1941.
18. Peters, J. Achtstellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Sexagesimalsekunde des Quadranten / J. Peters. – Berlin, 1939.
19. Roussilhe, H. Tables a 8 decimales des valeurs naturelles des sinus, cosines et tangents dans le systeme decimal de centigrade en centigrade de 0 a 100 grades / H. Roussilhe, M. Brandicourt. – Paris, 1933.
20. Salzer, H.E. Tables of Sines and Cosines to Ten Decimal Places at Thousandths of a Degree / H.E. Salzer, N. Levine. – N. Y.: Pergamon Press, 1962.
21. Бурунова, Н.М. Справочник по математическим таблицам / Н.М. Бурунова. – Дополнение № 1. – М., 1959.
22. Лебедев, А.В. Справочник по математическим таблицам / А.В. Лебедев, Р.М. Федорова. – М., 1956.
23. Davies, H.T. A Bibliography and Index of Mathematical Tables / H.T. Davies, Vera Fisher. – Ill. – Evanston, 1949.
24. Ohlsson, J. Lund Observatory Tables for the Conversion of Equatorial Coordinates into Galactic Coordinates Based on the Galactic Pole R. A. $12^{\text{h}}40^{\text{m}}$, Decl. $+28^{\circ}$ (1900,0) / J. Ohlsson // Ann. Observ. Of Lund, 3, 1932.
25. Астрономический ежегодник СССР на 1977 год. Объяснение / В.К. Абалакин [и др.]; под ред. В.К. Абалакина. – Л.: Наука, 1974. – Т. 56.
26. Дубошин, Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы / Г.Н. Дубошин. – М.: Наука, 1968.
27. Субботин, М.Ф. Введение в теоретическую астрономию / М.Ф. Субботин. – М.: Наука, 1968.
28. Орлов, А.Я. Курс теоретической астрономии / А.Я. Орлов, Б.А. Орлов. – М.: Гостехиздат, 1940.
29. Смарт, У.М. Небесная механика / У.М. Смарт. – М.: Мир, 1965.
30. Брауэр, Д. Методы небесной механики / Д. Брауэр, Дж. Клеменс. – М.: Мир, 1964.
31. Wood, H. J. and Proceed of the Roy / H. Wood. – Soc. of New South Wales 83, 150, 1950.
32. Субботин, М.Ф. Формулы и таблицы для вычисления орбит и эфемерид / М.Ф. Субботин. – Ташкент, 1929.
33. Субботин, М.Ф. Таблицы и формулы. Вспомогательные таблицы для вычисления орбит и эфемерид. Приложение к «Курсу небесной механики»: в 2 т. / М.Ф. Субботин. – М., 1941. – Т. 1.
34. Stumpf, K. Himmelsmechanik / K. Stumpf. – Bd. 1. – Berlin, 1959.

35. Абалакин, В.К. Основы эфемеридной астрономии / В.К. Абалакин. – М.: Наука, 1979.
36. Bauschinger, J. Tafeln zur theoretischen Astronomie / J. Bauschinger // 2 Auflage. – neubearb. Von G. Stracke, 1934.
37. Tietjen, F. Veroff d. Astr. Recheninstituts 1 / F. Tietjen. – Berlin, 1892.
38. Peters, J. Veroff d. Astr. Recheninstituts 41 / J. Peters. – Berlin, 2-te Aufl., 1933.
39. Schlesinger, F. Publ. of the Allegheny Obs. / F. Schlesinger, S. Udick // Publ. 17, 1912.
40. Voiquet, F. Tables du mouvement keplerien / F. Voiquet. – Paris, 1920.
41. Жонголович, И.Д. Сборник таблиц и номограмм для обработки наблюдений искусственных спутников Земли / И.Д. Жонголович, В.М. Амелин. – Л.: Изд-во АН СССР, 1960.
42. Трубников, Ю.В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – М., 2002.
43. Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974.
44. Дьедонне, Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне. – М.: Мир, 1964.
45. Дубошин, Г. Небесная механика / Г. Дубошин. – М.: Наука, 1975.
46. Белецкий, В. Очерки о движении космических тел / В. Белецкий. – М.: Наука, 1972.
47. Дубяго, А.Д. Определение орбит / А.Д. Дубяго. – М.: Гостехиздат, 1949.
48. Монтенбрук, О. Астрономия на персональном компьютере / О. Монтенбрук, Т. Пфлегер. – СПб., 2002.
49. Пеллинен, Л.П. Исследование гравитационных полей и формы Земли, других планет и Луны по наблюдениям космических аппаратов / Л.П. Пеллинен. – М., 1972.
50. Lundquist, C.A. Geodetic parameters for a 1966 Smithsonian institution Standard Earth. / C.A. Lundquist, G. Veis // Smithsonian institution Astrophysical Observatory, Spec. Rep. № 200, 1966.
51. Стандартная Земля: пер. с англ. / К. Лундквист, Г. Вейс; под ред. К. Лундквиста. – М.: Мир, 1969.
52. Kozai, Y. Revised values for Coefficients of Zonal Harmonics in the Geopotential / Y. Kozai // Smithsonian Astrophysical Observatory, Spec. Rep., № 295, 1969.
53. Gaposchkin, E.M. 1969 Smithsonian Standard Earth (II) / E.M. Gaposchkin, K. Lambeck // Smithsonian Astrophysical Observatory, Spec. Rep., № 315, 1970.
54. Аксенов, Е.П. Теория движения искусственных спутников земли / Е.П. Аксенов. – М.: Наука, 1977.

55. Holshevnikov, K.W. Le developpement du potential dans le cas d'une densite analytique / K.W. Holshevnikov // *Cel. Mech.* – 1971. – № 2, vol. 3.
56. Суетин, П.К. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин. – М.: Наука, 1979.
57. Гайер. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области / Гайер. – М.: Мир, 1986.
58. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967.
59. Кислик, М.Д. Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли / М.Д. Кислик // Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4. – М., 1960.
60. Vinti, J.P. Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy / J.P. Vinti // *J. Res. Nat. Bur. Standards*, v. 63 B, № 3, 1959.
61. Трубников, Ю.В. Решение задачи трех тел в терминах временных рядов / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // *Вестник ВДУ.* – 2007. – № 1(43).
62. Трубников, Ю.В. Решение задачи трех тел с предварительной чебышевской аппроксимацией / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Труды 4-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (AMADE-2006). – Мн., 2006. – Т. 2.
63. Трубникова, А.Ю. Применение чебышевских аппроксимаций в задаче двух тел / А.Ю. Трубникова // XII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2007). Тезисы докладов. 16–19 мая 2007 года. – Минск, 2007.
64. Трубников, Ю.В. Чебышевская аппроксимация силовой функции общей задачи многих тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания. 4-я международная конференция. Тезисы докладов. Российский фонд фундаментальных исследований. Обнинский государственный технический университет атомной энергетики. Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. Институт математического моделирования РАН. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. Институт прикладной математики РАН. Правительство Калужской области. Обнинский Дом ученых. 14–18 мая 2008 г. – Обнинск, 2008.
65. Трубников, Ю.В. Аппроксимация силовой функции общей задачи многих тел в метрике L_2 / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // *Вестник ПГУ. Серия С. Фундаментальные науки.* – Полоцк, 2008.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Азимут 8
– восточный (отрицательный) 8
– западный (положительный) 8
Альмукантарат 7
Аналогии Непера 18
Апогей 50
Апоцентр 50
Аргумент перицентра 52
Астрономическая вертикаль 28
Астрономические постоянные 4
Астрономический горизонт 6
Астрономический меридиан 30
Астрономический треугольник 19
Афелий 50

Б

Бином Ньютона 130

В

Вектор Лапласа 48, 95
Вертикаль 6
– первый 6
Восходящий узел 52

Г

Гармоники зональные 109
– секториальные 109
– тессеральные 109
Географическое положение 29
Геодезическая вертикаль 31
Геодезическая линия 32
Геодезическая система данных 32
Геодезический азимут 32
Геодезический горизонт 32
Геоид 31
Геоцентрический
радиус-вектор 35

Д

Дифференциальные изменения
координат 26
Долгота астрономическая 30
– восходящего узла 52
– галактическая 12
– геоцентрическая 35

– перицентра 54, 58
– планетоцентрическая 41, 42
– эклиптическая 11

З

Задача двух неподвижных
центров 115, 151
– – – – несимметричная 116
– – – – обобщенная 116
– – – – симметричная 116
– двухточечная краевая 160
– многих тел 89
Зенит 6
– геодезический 31
– геоцентрический 35
Зенитное расстояние 8

И

Интеграл Лапласа 48
– энергии 47
Интегралы площадей 47

К

Колур равенствий 7
– солнцестояний 7
Координаты
– геодезические 31
– геоцентрические 35
– дифференциальные 25
– – экваториальные 26
– – эклиптические 26
– орбитальные 49
– относительные 25
Космическая скорость вторая
(см. параболическая скорость)
– – первая (см. круговая скорость)
Круг равных высот
(см. альмукантарат)
– склонений 9
– широт 11
Круговая скорость 51

Л

- Линия апсид 50
- отвеса 5
- узлов 52

М

- Математический горизонт (см. астрономический)
- Множество выпуклое 65
- локально компактное 65
- существования 65, 66
- чебышевское 65

Н

- Надир 6
- Наилучшее приближение элемента 64
- Наклон эклиптики к экватору 7
- Наклонная дальность 8
- Небесная параллель 9
- Небесная сфера 5
- – гелиоцентрическая 5
- – геоцентрическая 5
- – планетоцентрическая 5
- – топоцентрическая 5
- Небесный меридиан 6
- Небесный экватор 6
- Невозмущенное кеплеровское движение 44
- Нисходящий узел 52

О

- Общий земной эллипсоид (см. сфероид)
- Оператор основной операции 28
- нелинейного проектирования 66
- Орбита гиперболическая 51
- круговая 50
- параболическая 51
- эллиптическая 50
- Ортометрическая высота 37
- Основная операция 27, 28
- Основная плоскость 7, 8, 10, 11, 12
- Основное направление 7, 9, 10, 11
- Ось мира 6

П

- Параболическая скорость 51
- Параллели 30

- геодезические 31
- Параметр фокальный 77
- Перигелий 50
- Перигелийное расстояние 54
- Перицентр 50
- Планетоцентрическое прямое восхождение 40
- Планетоцентрическое склонение 40
- Плоскость галактического экватора 12
- геодезического экватора 31
- Лапласа 139
- небесного меридиана 6
- Позиционный угол 25
- Полуденная линия 6
- Полунорма 64
- Полюс
- большого круга 14
- галактический 12
- – северный 12
- – южный 12
- географический 29
- геодезический 31
- мира 6
- – северный 6
- – южный 6
- эклиптики 7
- – северный 7
- – южный 7
- Полярное расстояние 9
- Постоянные Лапласа 48
- энергии 48
- Правило Непера 16
- Производная Фреше 85
- Промежуточное гравитационное поле Земли 115
- Прямое восхождение 10
- Прямолинейная траектория 51
- Пункты Лапласа 35
- Пятиугольник Непера 16

Р

- Радиус-вектор 11
- Расстояние геоцентрическое 63
- перигейное 60
- перигелийное 60

С

Северный полюс Галактики 13
Система координат 4
-- астрономическая 28, 29
-- барицентрическая 5
-- галактическая 12
-- гелиоцентрическая 5
-- геодезическая 28
-- геоцентрическая 5
-- геоэкваториальная 41
-- планетографическая
(селенографическая) 5, 41
-- планетоцентрическая 5
-- прямоугольная 21
-- топоцентрическая 5
-- экваториальная 8, 21
--- первая 8, 10
--- вторая 10
-- эклиптическая 11
Система отсчета 4
Стандартная Земля 111
Стандартный референц-
эллипсоид 32
Строго выпуклая норма 65
Строго нормированное
пространство 65
Субградиент нормы 66
Субдифференциал нормы 67
Суточная параллель
(см. небесная параллель)
Сферическая функция 127, 131
-- объемная 126
-- поверхностная 127
Сферический треугольник 13
-- присоединенный 17
-- простой 14
-- прямой 14
-- четвертной
(квадратный) 14, 16
-- полярный 14
Сфероид 31

Т

Теорема косинусов 14
-- синусов 15
Топоцентр 5
Точка весеннего равноденствия
(см. точка весны)
-- весны 7

-- востока 6
-- запада 6
-- зимнего солнцестояния
(см. точка зимы)
-- зимы 7
-- лета 7
-- летнего солнцестояния
(см. точка лета)
-- либрации 160
-- осени 7
-- осеннего равноденствия
(см. точка осени)
-- севера 6
-- юга 6
Третий закон Кеплера 151

У

Угловое расстояние 25
Угол вертикали 36
-- возвышения 8
-- места (см. угол возвышения)
-- позиционный 25
-- положения (см. позиционный
угол)
-- эксцентриситета 54
Уклонение отвеса 33
-- абсолютное 33
-- относительное 33
Уравнение Лапласа 35, 101, 126
-- Пуассона 101
-- Лагранжа 88
Условие Гельдера 101

Ф

Фокальный параметр 50
Формула Грина 133
Формулы Борда 17, 18
-- Деламбра 18
-- Каньоли 16
-- Льюийе 18
-- Михайлова 37
-- пяти элементов 15
-- связи между второй
гелиоцентрической и
геоцентрической системами
координат 23

— — — второй экваториальной и галактической системами координат 20
— — — второй экваториальной и эклиптической системами координат 20
— — — горизонтальной и первой экваториальной системами координат 19
— — — первой и второй экваториальными системами координат 19
— — — экваториальной и эклиптической прямоугольными системами координат 21
Фундаментальная поверхность относимости 28
Функционал наилучшего приближения 64
— полуаддитивный 64
— полуднородный 64
Функция силовая 90, 135

Ч

Часовой круг (см. круг склонений)
Часовой угол 9

Ш

Широта астрономическая 30
— галактическая 12
— геодезическая 32
— геоцентрическая 35
— параметрическая (геометрическая) 38
— планетоцентрическая 41
— приведенная 36, 38
— эклиптическая 11

Э

Экватор астрономический 30
— географический 29
Эклиптика 7
Эксцентрическая аномалия 97
Элемент наилучшего приближения 65
Элементы орбиты 52
Эпоха 8, 10
Эфемериды 41, 63

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ГЛАВА 1. Основные понятия и формулы сферической и эфемеридной астрономии	4
1.1. Небесная сфера	4
1.2. Главнейшие круги, линии и точки небесной сферы	5
1.3. Горизонтальная система координат	7
1.4. Экваториальные системы координат	8
1.5. Эклиптическая система координат	11
1.6. Галактическая система координат	12
1.7. Основные формулы сферической тригонометрии	13
1.8. Формулы перехода в различных астрономических системах координат	19
1.9. Прямоугольные системы координат	21
1.10. Системы географических координат	28
1.11. Соотношения между астрономическими и геодезическими координатами	33
1.12. Планетоцентрические системы координат	40
ГЛАВА 2. Задача двух тел	44
2.1. Общая теория невозмущенного кеплеровского движения	44
2.1.1. Постановка задачи. Различные формы дифференциальных уравнений движения	44
2.1.2. Первые интегралы уравнений невозмущенного кеплеровского движения	47
2.1.3. Типы невозмущенного кеплеровского движения ..	49
2.1.4. Элементы орбиты	52
2.1.5. Формулы, связывающие постоянные интегрирования и элементы орбиты	53
2.2. Основные формулы невозмущенного кеплеровского движения	54
2.2.1. Эллиптическое движение	54
2.2.2. Круговое движение	57
2.2.3. Гиперболическое движение	58
2.2.4. Параболическое движение	60
2.2.5. Прямолинейное движение	62
2.2.6. Вычисление эфемерид планет и комет	63
ГЛАВА 3. Развитие методов чебышевской аппроксимации	64
3.1. Наилучшее приближение фиксированного элемента..	64
3.1.1. Функционал наилучшего приближения	64

3.1.2. <i>О существовании и единственности ближайшего элемента</i>	65
3.1.3. <i>Оператор наилучшего приближения</i>	66
3.2. Субдифференциал нормы и критерии элемента наилучшего приближения	66
3.3. Построение полинома наилучшего приближения для произвольной строго выпуклой функции	68
ГЛАВА 4. Постановка задачи многих тел	85
4.1. Элементы дифференциального исчисления	85
4.2. Геометрический смысл уравнений Лагранжа	87
4.3. Постановка задачи многих тел	89
ГЛАВА 5. Аппроксимативный метод в теории невозмущенного кеплеровского движения	96
5.1. Первый способ аппроксимации	96
5.2. Немного о потенциале	100
5.2.1. <i>Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям</i>	102
5.2.2. <i>Различные формулы для потенциала притяжения Земли</i>	106
5.2.3. <i>Зональные, тессеральные и секториальные гармоники</i>	108
5.2.4. <i>Постоянные гравитационного поля Земли. Стандартная Земля</i>	110
5.2.5. <i>Промежуточное гравитационное поле Земли</i>	113
5.3. Комплексные аналоги многочленов Лежандра	116
5.4. Сферические функции и функции Лежандра.....	126
ГЛАВА 6. Первые интегралы аппроксимирующей системы, некоторые частные случаи	135
ГЛАВА 7. Задача многих тел в относительной системе координат	154
ГЛАВА 8. Сравнение результатов вычислений с табличными	163
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	177
ЛИТЕРАТУРА	178
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	182