

УРАВНЕНИЕ $X^n = A$ ДЛЯ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

К.Л. Якуто

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Важное значение для решения большого круга задач, связанных с моделированием экономических, социальных процессов, имеет задача о целом положительном решении уравнения $X^n = A$ для матриц различных порядков [1, с. 189]. Целью настоящей работы является доказательство эффективности использования аналитических методов для решения задачи по нахождению целых положительных решений нелинейного матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка.

Материал и методы. В данной работе изучаются нелинейные матричные уравнения вида $X^n = A$ где A, X – матрицы второго порядка, n – натуральное число. Методика проводимого исследования: решаемое уравнение записывалось в виде системы из девяти нелинейных уравнений, которая затем решалась аналитическими методами.

Результаты и их обсуждение.

Пусть необходимо выяснить, когда корень n -ой степени матрицы третьего порядка будет иметь нулевые диагональные элементы и отличные от нуля внедиагональные, т. е.

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} K & L & M \\ N & P & Q \\ R & S & T \end{pmatrix}.$$

Лемма. При $n = 4$ переменные b, c, f можно найти, используя следующие формулы: $b = \sqrt[4]{\frac{x^3 z}{y}}, c = \sqrt[4]{\frac{x}{y^3 z}}, f = \sqrt[4]{\frac{1}{xyz^3}}$, где x – корень уравнения $\frac{L\alpha^2\gamma}{x} + N\beta x = A$, y – корень уравнения $\frac{R\alpha\gamma}{y} + M\beta^2 y = B$, z – корень уравнения $\frac{S\beta}{z} + Q\alpha\gamma^2 z = E$, переменные d, g, h можно найти, используя следующие формулы: $d = \frac{\alpha}{b}, g = \frac{\beta}{c}, h = \frac{\gamma}{f}$.

$$A = LN + \beta\gamma(\alpha^2 - (2\alpha + \beta + \gamma)^2), B = MR + \alpha\gamma(\beta^2 - (\alpha + 2\beta + \gamma)^2),$$

$$E = QS + \alpha\beta(\gamma^2 - (\alpha + \beta + 2\gamma)^2), \alpha = bd, \beta = cg, \gamma = fh.$$

Доказательство. В рассматриваемом случае система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} b^2 d^2 + 2bcdg + bdfh + cfgh + c^2 g^2 = K, \\ 2bcdh + b^2 fg + c^2 gh + cfh^2 = L, \\ 2bcfg + c^2 dh + b^2 df + bf^2 h = M, \\ 2bdfg + cd^2 h + cfg^2 + f^2 gh = N, \\ b^2 d^2 + 2bdfh + bcdg + cfgh + f^2 h^2 = P, \\ 2cdfh + bcd^2 + c^2 dg + bf^2 g = Q, \\ 2cdgh + bd^2 h + dfh^2 + bfg^2 = R, \\ 2bfgh + b^2 dg + bcg^2 + cdh^2 = S, \\ c^2 g^2 + 2cgfh + bcdg + bdfh + f^2 h^2 = T. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим первое, пятое и девятое уравнения системы (1):

$$\begin{cases} b^2d^2 + 2bcdg + bdfh + cfgh + c^2g^2 = K, \\ b^2d^2 + 2bdfh + bcdg + cfgh + f^2h^2 = P, \\ c^2g^2 + 2cgfh + bcdg + bdfh + f^2h^2 = T. \end{cases} \quad (2)$$

Сделаем следующую замену: $\alpha = bd$, $\beta = cg$, $\gamma = fh$.

Решая систему (2), можно найти переменные α и β , которые в данном случае будут зависеть от переменной γ .

$$\alpha = \frac{4\gamma^2(P - T) + (-K + P + T)^2 - \gamma^4}{4\gamma(-K + P + T + \gamma^2)}, \quad \beta = \frac{-4\gamma^2(P - T) + (-K + P + T)^2 - \gamma^4}{4\gamma(-K + P + T + \gamma^2)}.$$

Оценка для γ имеет вид: $1 \leq \gamma \leq \sqrt{P - 5}$.

Таким образом произведения всех пар симметричных относительно главной диагонали элементов считаем известными.

Перепишем второе и четвёртое уравнения системы (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} ch(2bd + cg + fh) = L - b^2fg, \\ fg(2bd + cg + fh) = N - cd^2h. \end{cases} \quad (3)$$

Перемножив уравнения системы (3), получим следующее уравнение:

$$Lcd^2h + Nb^2gh = A \quad (4)$$

где $A = LN + \beta\gamma(\alpha^2 - (2\alpha + \beta + \gamma)^2)$.

Перепишем третье и седьмое уравнения системы (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} bf(bd + 2cg + fh) = M - c^2dh, \\ dh(bd + 2cg + fh) = R - bfg^2. \end{cases} \quad (5)$$

Перемножив уравнения системы (5), получим следующее уравнение:

$$Rc^2dh + Mbfg^2 = B \quad (6)$$

где $B = MR + \alpha\gamma(\beta^2 - (\alpha + 2\beta + \gamma)^2)$.

Перепишем шестое и восьмое уравнения системы (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} cd(bd + cg + 2fh) = Q - bf^2g, \\ bg(bd + cg + 2fh) = R - cdh^2. \end{cases} \quad (7)$$

Перемножив уравнения системы (7), получим следующее уравнение:

$$Qcdh^2 + Sbf^2g = E \quad (8)$$

где $E = QS + \alpha\beta(\gamma^2 - (\alpha + \beta + 2\gamma)^2)$.

Поскольку α , β , γ считаем известными, то A , B , E также можем считать известными.

Таким образом имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Lcd^2h + Nb^2gh = A, \\ Rc^2dh + Mbfg^2 = B, \\ Qcdh^2 + Sbf^2g = E, \\ bd = \alpha, \\ cg = \beta, \\ fh = \gamma. \end{cases} \quad (9)$$

Выразив переменные d , g , h из трёх последних уравнений системы (9) и подставив полученные значения в первые три уравнения, получим:

$$\begin{cases} \frac{L\alpha^2\gamma}{x} + N\beta x = A, \\ \frac{R\alpha\gamma}{y} + M\beta^2 y = B, \\ \frac{S\beta}{z} + Q\alpha\gamma^2 z = E. \end{cases} \quad (10)$$

где $x = \frac{b^2 f}{c}$, $y = \frac{bf}{c^2}$, $z = \frac{c}{bf^2}$.

Считая x , y , z известными, можно найти переменные b , c , f : $b = \sqrt[4]{\frac{x^3 z}{y}}$, $c = \sqrt[4]{\frac{x}{y^3 z}}$,
 $f = \sqrt[4]{\frac{1}{xyz^3}}$.

Заключение. Для решения задачи по нахождению целых положительных решений матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка в случае натуральных n можно использовать аналитические методы.

Список литературы

1. Буснюк, Н.Н. Математическое моделирование: учеб. пособие / Н.Н. Буснюк, А. А. Черняк. – Минск: Беларусь, 2014. – 214 с.